2027학년도 대학수학능력시험 대비
수학 영역 SNUMO 무료 배포 1회 모의고사 정답 및 해설

[총평]

SNUMO 모의고사를 풀어주셔서 감사합니다.
SNUMO는 앞으로도 좋은 문제와 모의고사로 찾아뵙겠습니다.

이 문제지는 시험의 난이도가 수능보다 너무 어렵게 되는 것을 최대한 경계하면서 제작하여 실력을 정확하게 측정하는 데 도움이 되도록 하였습니다. 사설 모의고사들이 '모래주머니 효과'가 중요하다고 하면서 수능보다 과도하게 어렵게 시험지를 구성하곤 하는데, 이러면 잘못된 학습 방향을 제시하게 될 수도 있다고 생각하여 그런 역효과를 방지하는 데 심혈을 기울였습니다.
다만, 너무 배워갈 것이 없어도 수능 '대비 모의고사'로서는 적절하지 않을 것이므로 준킬러 난이도의 문항이 텅 비어 버렸던 2026학년도 수능보다는 몇몇 4점 문항 난이도를 약간 올렸습니다.

(2026년 3월 19일 수정) 처음에는 2023 수능이랑 비슷한 줄 알았는데, 너무 어렵나 봅니다. 아마 킬러 문제 난이도는 2026 수능과 비슷한데 준킬러 문제가 두터워졌다고 느낀 것 같습니다. 120~140분 정도 잡고 N제처럼 푸셔도 됩니다.

등급 구분 점수는 100분 시험 기준으로 다음과 같이 잡힐 것 같습니다.

	확률과 통계	미적분	기하
만점 표준점수	149	152	152
1등급(원점수)	80	76	76
2등급(원점수)	72	68	68
3등급(원점수)	66	62	62
4등급(원점수)	54	50	50

1번부터 8번은 전부 매우 쉽게 출제하였습니다. 한때 유행하던 '어려운 3점'은 전혀 넣지 않았습니다.

9~11번도 '어려운 3점'에 어울리는 수준으로 출제하였습니다.

12번은 어렵지는 않으나 삼각함수 그래프의 대칭성을 활용하는 약간의 발상이 필요했습니다.

13번은 19번은 문제의 조건을 몇 개 놓치면 잘 안 풀리거나 답이 잘못 나올 수 있지만, 어렵지는 않은 문제입니다.

14번은 등차수열의 합으로 추론 능력을 평가하는 문제였습니다. 쉬운 문제는 아니지만, 문제의 조건을 꼼꼼히 따져가면서 문제를 푸는 연습이 잘 되어 있는 상위권 학생들은 잘 풀었을 것입니다.

15번은 최근 기조에 따라 함수의 극한에서 출제된 준킬러에서 킬러 수준의 문항입니다.

단답형 3점인 16번부터 19번에도 '어려운 3점'은 넣지 않았습니다.

20번은 2026학년도 9월 모의평가 20번처럼 삼각함수의 도형에의 활용(사인법칙과 코사인법칙)의 빈칸 채우기 문제입니다.
9월 모의평가의 문제는 교육과정에 없는 '원과 비례'가 쓰여서 빈칸 문제로 제시되었다면, 이 문제는 빈칸이 없으면 문제 접근이 너무 어려울 수 있어 빈칸 풀이를 제시하였습니다.

21번은 2026학년도 9월 모의평가 15번과 비슷한 포지션의 문제를 의도했습니다. 서술형 문제 풀듯이 풀려면 꽤 어렵지만, 소위 '고인물' 학생에게는 정답 케이스가 쉽게 보일 수 있습니다. 정답 케이스가 쉽게 보이려면 어느 정도의 '고인물'이어야 할지는 잘 모르겠지만, 2등급만 되어도 쉽게 풀리지는 않을 거라고 판단했습니다.

22번은 2026학년도 6월 모의평가 22번과 비슷한 난이도를 의도했으나 풀이 방향은 많이 다른 지수함수와 로그함수의 그래프 문제입니다. 점 A의 좌표는 쉽게 구했을 것 같고, 점 B의 좌표를 구하는 것이 얼마나 어렵게 다가왔을지가 감이 안 잡히네요.
후기 많이 남겨주세요.

선택과목은 간략하게만 보겠습니다.

먼저 확률과 통계입니다.

27, 28번은 평이하지만, 자잘하게 계산할 것이 많은 이산확률변수와 정규분포 문제입니다.

29번도 케이스 분류 및 계산 실수만 안 했다면 어렵지 않습니다. 단답형이라 틀릴 확률이 높을 뿐입니다.

30번은 2026학년도 9월 모의평가 28번이랑 비슷하거나 더 어려운 경우의 수 문제를 의도했습니다. 사건들 사이의 복잡할 수 있는 관계를 실수 없이 잘 파악해야 했습니다. [다른 풀이]처럼 케이스 분류를 많이 늘리는 접근을 취했다면 여사건을 생각할 필요는 없지만, 꽤 귀찮았을 것입니다.

다음은 미적분입니다.

27번은 어려운 문제는 당연히 아닌데, 문제 풀이 전략을 못 잡는 중위권 이상의 학생들이 어딘가에는 있지 않을까 하고 출제해 본 문제입니다.

28번은 2026학년도 수능 28번과 같이 딱 4점 밥값만 하는 어렵지 않은 적분 문제를 의도했습니다.

29번은 약간의 추론이 필요하고 문제 풀이의 호흡이 긴 등비급수 문제입니다.

30번은 그래프의 개형을 그려보면서 조건의 성립 여부를 추론하는 전형적인 함수의 그래프 개형 추론 문제로 출제했습니다. 서술형 답안 쓰듯이 풀면 쉽지 않지만, 정답 상황이 특수하여 정답 맞히기는 쉬웠을 것 같습니다.

마지막으로 기하입니다.

27번은 공간에 대한 깊은 이해와 문제 해결 전략 평가보다는 단순하지만 계산할 것이 좀 있는 문제로 출제했습니다.

28번은 비주얼이 무서운 거에 비해 문제 풀이 난이도는 그렇게 어렵지는 않은 이차곡선 문제입니다. 2026학년도 6모 28번이 비주얼만 무섭고 매우 쉬웠는데 그 정도로 쉬운 문제까지는 아니고, 난이도와 풀이 전략의 방향성이 2026학년도 9모 29번, 2026학년도 수능 29번과 비슷하도록 설계하였습니다.

29번은 고난도 평면벡터 내적 문제이지만, 1등급 학생이나 백분위 93~96 정도의 2등급 학생들이면 풀만한 수준은 될 거라고 생각합니다.

30번은 공간에서 문제 해결 전략을 잘 수립해야 하는 어려운 공간도형 문제를 의도했습니다.

수학 영역

[공통(수학Ⅰ+수학Ⅱ)]

1	②	2	③	3	⑤	4	②	5	①
6	③	7	④	8	①	9	⑤	10	④
11	③	12	⑤	13	④	14	①	15	⑤
16	49	17	41	18	14	19	9	20	266
21	214	22	88						

[수학Ⅰ 난이도 분포]

단원 / 변별 등급대	지수함수와 로그함수	삼각함수	수열
5등급 이하	1, 6		3, 16
4등급 / 5등급	10	8	18
3등급 / 4등급		12, 20	
2등급 / 3등급			14
1등급 / 2등급	22		
1등급 / 만점			

[수학Ⅱ 난이도 분포]

단원 / 변별 등급대	함수의 극한과 연속	미분	적분
5등급 이하	4	2, 5, 19	7, 9, 17
4등급 / 5등급		11	
3등급 / 4등급			13
2등급 / 3등급			
1등급 / 2등급	15		
1등급 / 만점		21	

1 정답 | ② 행동 영역 | 계산
내용 영역 | 지수의 확장과 지수법칙

$$12^{\frac{3}{4}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{27}}=(2^2\times3)^{\frac{3}{4}}\times\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{3}{4}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}$$
$$=2\sqrt{2}\times3^0$$
$$=2\sqrt{2}$$

2 정답 | ③ 행동 영역 | 계산
내용 영역 | 미분계수의 정의, 도함수

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$ 이고 $f'(x)=6x^2-4$ 이므로 구하는 값은

$$f'(2)=6\times2^2-4=20$$

이다.

3 정답 | ⑤ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 등비수열

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $r>0$ 이고,

$$a_3=a_2\times r=3r,\quad a_4=a_3\times r=3r^2$$

이다. 따라서

$$a_3+a_4=3(r+r^2)=18$$
$$\Rightarrow r^2+r=6$$

에서 $r=2$ 이다.

$\therefore\ a_6=a_2\times r^4=3\times2^4=48$

4 정답 | ② 행동 영역 | 계산/이해
내용 영역 | 함수의 연속

$x>2$ 와 $x<2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 연속이므로 $x=2$ 에서의 연속성만 따지면 충분하다.

$$f(2)=a+2,\quad \lim_{x\to2+}f(x)=a+2,\quad \lim_{x\to2-}f(x)=2a$$

이므로 $a+2=2a$ 에서 $a=2$ 이다.

수학 영역

5

정답 | ① 행동 영역 | 계산

내용 영역 | 여러 가지 미분법(곱의 미분법)

$f(x)=(x+2)(x^2-x+1)$ 이므로

$$f'(x)=(x^2-x+1)\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)\frac{d}{dx}(x^2-x+1)$$
$$=(x^2-x+1)+(x+2)(2x-1)$$

이다. 따라서

$$f'(2)=(2^2-2+1)+(2+2)\times(2\times2-1)$$
$$=3+4\times3$$
$$=15$$

이다.

6

정답 | ③ 행동 영역 | 이해

내용 영역 | 로그의 정의, 로그의 성질

로그의 밑의 변환에 의해

$$\log_a 64=\frac{\log_2 64}{\log_2 a}=\frac{6}{b}=b+1$$
$$\Rightarrow b^2+b=6$$
$$\Rightarrow (b-2)(b+3)=0$$

이고, b는 양수이므로 $b=2$이다. 그러므로 $\log_2 a=2$에서 $a=2^2=4$이다.

$\therefore\ a+b=4+2=6$

7

정답 | ④ 행동 영역 | 이해

내용 영역 | 정적분의 활용(곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이)

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이는 각각

$$\int_0^1|f(x)|\,dx=\int_0^1 f(x)dx \qquad (\because\ 0\le x\le 1 \text{에서 } f(x)\ge 0)$$

$$\int_1^2|f(x)|\,dx=-\int_1^2 f(x)dx \qquad (\because\ 1\le x\le 2 \text{에서 } f(x)\le 0)$$

이다. 따라서 두 영역의 넓이의 차는

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\left(-\int_1^2 f(x)dx\right)\right|$$
$$=\left|\int_0^2 f(x)dx\right|$$

이다.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^4-3x^3+2x^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{32}{5}-12+\frac{16}{3}$$
$$=-\frac{4}{15}$$

이므로 구하는 값은 $\frac{4}{15}$ 이다.

8

정답 | ① 행동 영역 | 이해

내용 영역 | 삼각함수의 정의

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이고 $\sin\theta=\frac{1}{4}$ 이므로

$$\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

에서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

그런데 $\cos\theta<\sin\theta$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

$$\tan\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

이므로 구하는 값은

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}}=\sqrt{15}$$

이다.

9

정답 | ⑤ 행동 영역 | 이해

내용 영역 | 정적분

$$\int_0^2 f(x)\big(f(x)+x\big)dx=\int_0^2\big(f(x)\big)^2dx+\int_0^2 xf(x)dx,$$

$$\int_0^2\big(f(x)+1\big)\big(f(x)-1\big)dx=\int_0^2\big(f(x)\big)^2dx-\int_0^2 1\,dx$$

이므로

$$\int_0^2 xf(x)dx=-\int_0^2 1\,dx=-2$$

이다.

$$\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2(x^3-6x^2+ax)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=4-16+2a=2a-12$$

$$\Rightarrow 2a-12=-2$$

에서 $a=5$이다.

수학 영역

10 정답 | ④ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 로그함수

$0<a<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이고, $x=3$에서 최소이다. 따라서 $M=\log_a \frac{1}{4}$, $m=\log_a \frac{9}{4}$이다.

$$M-m=\log_a \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=\log_a \frac{1}{9}=2$$

이므로 $a^2=\frac{1}{9}$에서 $a=\frac{1}{3}$이다.

$$m+M=\log_a\left(\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\right)=\log_a \frac{9}{16}$$

이므로 $a^{m+M}=\frac{9}{16}$이다.

$$\therefore\ a^{m+M+2}=a^{m+M}\times a^2=\frac{9}{16}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{16}$$

11 정답 | ③ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 도함수의 활용(속도와 가속도)

ㄱ. 점 P의 시각 $t=2$에서의 속도는 0이다.

점 P의 위치가 $x=2t^3-7t^2+4t+a$이므로 점 P의 속도는

$$v=6t^2-14t+4$$

이다. 따라서 $t=2$일 때

$$v=6\times2^2-14\times2+4$$
$$=24-28+4=0$$

이다. (참)

ㄴ. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는 5이다.

$v=6t^2-14t+4=6(t-2)\left(t-\frac{1}{3}\right)$이므로 점 P의 위치는

$t=0$일 때 a,
$t=2$일 때 $a-4$

이다. 곧, 점 P의 위치의 좌표의 최솟값은 $a-4$이다.

$a>0$이므로 점 P가 원점을 한 번만 지나기 위해서는 $a=4$이어야 한다. $a=4$이면 $x=2t^3-7t^2+4t+4$이므로 $t=3$일 때

$$x=2\times3^3-7\times3^2+4\times3+4$$
$$=54-63+12+4=7$$

이다. (거짓)

ㄷ. 점 P가 원점을 지날 때 가속도는 10이다.

$v=6t^2-14t+4$이므로 점 P의 가속도는

$$a=12t-14$$

이다. 점 P는 시각 $t=2$에서 원점을 지나므로 $t=2$일 때

$$a=12\times2-14=24-14=10$$

이다. (참)

12 정답 | ⑤ 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 삼각함수의 그래프

START 문제 상황 파악하고 풀이 방향 설정하기

⇒ 문제에 미지수가 a, x_0이 제시되어 있지만, a의 값을 구한다면 x_0에 대한 정보는 바로 얻어지므로 실질적인 미지수는 a 하나이다.
삼각형 OPQ의 무게중심이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이라는 것이 a의 값을 구하는 데 사용될 것이다.

STEP 1 a의 값 구하기

⇒ 삼각형 OPQ의 무게중심의 좌표를 알기 위해서는 세 점 O, P, Q의 x좌표와 y좌표의 합을 알아야 한다. 그런데, 두 점 P와 Q의 y좌표가 a로 같으므로 삼각함수의 대칭성을 활용하면 두 점 P, Q의 x좌표의 합이 확정된다.

곡선 $y=-\cos x$는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이고 $0<a<1$이므로 직선 $y=-\cos x$가 직선 $y=a$와 만나는 두 점을 P, Q의 좌표를 각각 $(\pi-k,\ \cos k)$, $(\pi+k,\ \cos k)$라고 하자.

(단, $a=\cos k$, $0<k<\frac{\pi}{2}$)

삼각형 OPQ의 무게중심의 좌표는

$$x=\frac{1}{3}(0+(\pi-k)+(\pi+k))=\frac{2}{3}\pi,$$
$$y=\frac{1}{3}(0+\cos k+\cos k)=\frac{2}{3}\cos k$$

이다.

이 점이 곡선 $y=-\cos x$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{3}\cos k=-\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

에서 $\cos k=\frac{3}{4}$이다.

STEP 2 정답 구하기

따라서, $x_0=\pi+k$이므로

$$\tan x_0=\tan(\pi+k)=\tan k$$
$$=\frac{\sin k}{\cos k}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 k}}{\cos k}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

이다.

13 정답 | ④ 행동 영역 | 문제 해결

내용 영역 | 적분과 미분의 관계(정적분으로 정의된 함수)

STEP 1 (가) 조건으로부터 함수 $f(x)$의 최고차항 구하기

함수 $g(x)=(x-1)f(x)-\int_0^x f(t)dt$를 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-1)'f(x)+(x-1)f'(x)-f(x) \\ &= f(x)+(x-1)f'(x)-f(x) \\ &= (x-1)f'(x) \end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$의 최고차항이 kx^n이면

$f'(x)$의 최고차항은 nkx^{n-1}이고, $g'(x)$의 최고차항은 nkx^n이다.

따라서 $g(x)$의 최고차항은 $\frac{n}{n+1}kx^{n+1}$이다. 그런데

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)\times g(-x)}{x^6}=-4$$

이므로 $g(x)$의 최고차항은 $2x^3$ 또는 $-2x^3$이다. 따라서 $n=2$이고 $k=3$ 또는 $k=-3$이다.

그러면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 6 또는 -6인 일차함수이므로

$f'(x)=6(x-a)$ 또는 $f'(x)=-6(x-a)$

으로 놓을 수 있다.

STEP 2 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극소이기 위한 조건 구하기

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$g'(2)=f'(2)=0$

이다. 곧, $a=2$이다. 그리고 그 극값이 극댓값이므로 $x=2$에서 $g'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 바뀌어야 한다. 따라서

$f'(x)=-6(x-2)$이어서 $g'(x)=-6(x-1)(x-2)$

이다.

STEP 3 마무리 계산

$f'(x)=-6(x-2)$이므로 $f(x)=-3(x-2)^2+b$라 하자.

$$\begin{aligned} g(0) &= -f(0)-\int_0^0 f(t)dt \\ &= -f(0)=-b+12 \end{aligned}$$

이고, $g'(x)=-6(x-1)(x-2)=-6x^2+18x-12$이므로

$g(x)=-2x^3+9x^2-12x-b+12$

이다. 따라서 $g(2)=-b+8$이다. 이 값이 4이므로 $b=4$이다.

$f(x)=-3(x-2)^2+4,\quad g(x)=-2x^3+9x^2-12x+8$

이므로 $f(4)=-8$, $g(4)=-24$이고, 따라서 $f(4)-g(4)=16$이다.

14 정답 | ① 행동 영역 | 추론

내용 영역 | 등차수열의 합

START 문제 상황 파악하고 풀이 방향 설정하기

⇒ $\{b_n\}$은 모든 항이 0 또는 1이고, 주기가 4인 수열이고,

$\sum_{n=1}^{8}(a_nb_n)$은 $b_k=1$인 자연수 $k(1\le k\le 8)$에 대하여 a_k의 합이다.

한편, $\sum_{n=1}^{8}a_n=220$이라는 정보가 있으므로 등차수열 $\{a_n\}$은 하나의 자유도만을 가지고 있으며, $\{b_n\}$은 몇 번째 항이 1인지 모른다.

등차수열 $\{a_n\}$의 자유도를 줄이고 $\{b_n\}$의 항을 알아내는 과정에서

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수라는 것이 중요하게 사용될 것이다.

STEP 1 등차수열 $\{a_n\}$을 하나의 미지수(하나의 자유도)로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{8}a_n=220$이므로

$$a_1+a_8=a_2+a_7=a_3+a_6=a_4+a_5=\frac{220}{4}=55$$

이다. 따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 d도 자연수이고,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{55}{2}-\frac{7}{2}d, \\ a_2 &= \frac{55}{2}-\frac{5}{2}d, \\ a_3 &= \frac{55}{2}-\frac{3}{2}d, \\ a_4 &= \frac{55}{2}-\frac{1}{2}d, \\ a_5 &= \frac{55}{2}+\frac{1}{2}d, \\ a_6 &= \frac{55}{2}+\frac{3}{2}d, \\ a_7 &= \frac{55}{2}+\frac{5}{2}d, \\ a_8 &= \frac{55}{2}+\frac{7}{2}d \end{aligned}$$

이다. 이 모든 항이 자연수이므로 d는 홀수이고, $a_1>0$이어야 하므로 d는 7 이하의 홀수이다.

STEP 2 수열 $\{b_n\}$의 거동을 살피기

한편, 수열 $\{b_n\}$은 $b_{n+4}=b_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{8}(a_nb_n)=\sum_{n=1}^{4}\{(a_n+a_{n+4})b_n\}$$

이다. a_n+a_{n+4}를 정리하면

$$\begin{aligned} a_1+a_5 &= 55-3d, \\ a_2+a_6 &= 55-d, \\ a_3+a_7 &= 55+d, \\ a_4+a_8 &= 55+3d \end{aligned}$$

와 같다. 수열 $\{b_n\}$의 각 항은 0 또는 1인데,

$\sum_{n=1}^{8}(a_nb_n)<\sum_{n=1}^{8}a_n$이므로 $b_n=0$인 항이 있고,

$b_n = 1$ 인 자연수 $n(1 \le n \le 8)$에 대하여 a_n의 합이 98이다.

만약 $b_n = 1$인 4 이하의 자연수 n이 세 개라면 최소한

$$98 \ge (55-3d)+(55-d)+(55+d) = 165-3d$$

이어야 하는데, 이를 만족시키는 7 이하의 홀수 d는 존재하지 않는다.

$b_n = 1$인 4 이하의 자연수 n이 한 개라면 최소한

$$98 \le 55+3d$$

이어야 하는데, 이를 만족시키는 7 이하의 홀수 d는 존재하지 않는다.

따라서 $b_n = 1$인 4 이하의 자연수 n이 두 개다.

$98 \le 110$이므로

$$98 = (55-3d)+(55-d)$$

이거나

$$98 = (55-3d)+(55+d)$$

이어야 한다.

- $98 = (55-3d)+(55-d)$이면 $d=3$이므로
  d는 7 이하의 홀수라는 조건을 만족시킨다.
- $98 = (55-3d)+(55+d)$이면 $d=6$이므로 d는 홀수가 아니다.

따라서 $d=3$이고, $a_1 = 17$이므로 $a_n = 17+3(n-1) = 3n+14$이다.

그리고 $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 0$이다.

STEP 3 정답 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=3}^{19}(a_n b_n) &= \sum_{n=1}^{4}(a_{4n+1}+a_{4n+2}) \\ &= \sum_{n=1}^{4}(12n+17+12n+20) \\ &= \sum_{n=1}^{4}(24n+37) \\ &= 24\times\frac{4\times5}{2}+37\times4 \\ &= 240+148 \\ &= 388 \end{aligned}$$

15

정답 | ⑤ 행동 영역 | 추론

내용 영역 | 함수의 극한

STEP 1 모든 실수 a에 대하여 극한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)}$이 수렴할 조건 찾기

극한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)}$이 수렴할 조건을 찾아보자.

- $g(a) \ne 0$이면 극한의 분모가 0이 아니므로 극한이 수렴함
- $g(a) = 0$이면 극한의 분모가 0이므로 분자도 0이어야 함
  $\Rightarrow f(a)+a=0$ …… ㉠

이다.

함수 $g(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $g(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 가지고, 그 실근을 α라 하자. ㉠에 의해

$$f(\alpha)+\alpha=0$$

이 성립한다. 곧 $f(\alpha)=-\alpha$, $g(\alpha)=0$이므로

항등식 $f(x)-g(x)=x^2+3x+4$에 $x=\alpha$를 대입하면

$$f(\alpha)-g(\alpha)=-\alpha=\alpha^2+3\alpha+4$$
$$\Rightarrow \alpha^2+4\alpha+4=0$$

이다. 따라서 α로 가능한 값은 -2뿐이므로, 방정식 $g(x)=0$의 실근은 오직 $x=-2$뿐이다.

$\therefore$ $g(-2)=0$, $f(-2)=2$

이때 극한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)}$의 값을 조사해 보면

- $a \ne -2$이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)} = \frac{f(a)+a}{g(a)}$ …… ㉡
- $a=-2$이면
  $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)} = \lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{g(x)}\times\frac{f(x)-2}{x+2}\right) = \frac{f'(-2)}{g'(-2)}$ …… ㉢

이다. 함수 $g(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 방정식 $g(x)=0$의 실근은 오직 $x=-2$뿐이므로

- $x<-2$이면 $g(x)<0$
- $x>-2$이면 $g(x)>0$

이 성립한다. 따라서 ㉡과 (가) 조건에 의해

- $x<-2$이면 $f(x)+x \le 0$ …… ㉣-1
- $x>-2$이면 $f(x)+x \ge 0$ …… ㉣-2

이어야 한다.

STEP 2 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)}=0$인 실수 a의 값의 개수가 2가 되는 조건 찾기

㉡에 의하여 $a\ne-2$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)}=0$이기 위해서는 $f(a)+a=0$이 성립해야 한다.

이때 ㉣에 의하여 방정식 $f(x)+x=0$의 -2가 아닌 한 실근이 β이면, β는 중근이고 방정식 $f(x)+x=0$은 삼차방정식이므로 이러한 실수 β는 최대 한 개 존재한다.

곧, $a\ne-2$이고 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+a}{g(x)}=0$인 실수 a는 최대 한 개 존재한다.

그런데 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)+a}{g(x)}=0$을 만족시키는 실수 a의 개수가 2이므로

$a=-2$일 때에도 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)+a}{g(x)}=0$이 성립하여야 함

$\Rightarrow f'(-2)=0$ ($\because$ ㉢) …… ㉤

임을 알 수 있다.

따라서 $a \neq -2$이고 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)+a}{g(x)}=0$인 실수 a가 한 개 존재한다.

그러한 a를 $k(k \neq -2)$라 하면 $f(k)+k=0$이 성립한다.

$f(-2)=2$, $f(k)+k=0$과 ㉣에 의하여 함수 $f(x)+x$를

$$f(x)+x=(x+2)(x-k)^2$$

라 두자. 그러면

$$f'(x)+1=(x-k)^2+2(x+2)(x-k)$$

이고, ㉤에 의하여

$$f'(-2)+1=(-2-k)^2=1$$

$\Rightarrow k=-3$ 또는 $k=-1$

을 알 수 있다.

(i) $k=-3$

함수 $f(x)$가 $f(x)=(x+2)(x+3)^2-x$이므로 주어진 항등식에 대입하면

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-x^2-3x-4 \\ &= (x+2)(x+3)^2-x^2-4x-4 \\ &= (x+2)\left((x+3)^2-(x+2)\right) \\ &= (x+2)(x^2+5x+7) \end{aligned}$$

이다. 이때

방정식 $x^2+5x+7=0$의 판별식은 $D=25-28<0$이므로 실근을 가지지 않음

$\Rightarrow$ 방정식 $g(x)=0$는 오직 하나의 서로 다른 실근 -2를 가짐

이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $k=-1$이면

함수 $f(x)$가 $f(x)=(x+2)(x+1)^2-x$이므로 주어진 항등식에 대입하면

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-x^2-3x-4 \\ &= (x+2)(x+1)^2-x^2-4x-4 \\ &= (x+2)\left((x+1)^2-(x+2)\right) \\ &= (x+2)(x^2+x-1) \end{aligned}$$

이다. 이때

방정식 $x^2+x-1=0$의 판별식은 $D=1+4>0$이므로

-2가 아닌 서로 다른 두 실근을 가짐

$\Rightarrow$ 방정식 $g(x)=0$는 서로 다른 세 실근을 가짐

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

STEP 3 정답 구하기

이상에서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는

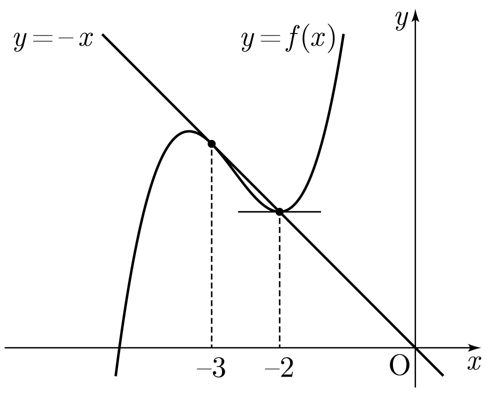
$$g(x)=(x+2)(x^2+5x+7)$$

이므로 구하는 값은 $g(1)=3\times13=39$이다.

참고 $k=-3$을 가정했을 때의 함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x+2)(x+3)^2-x$$

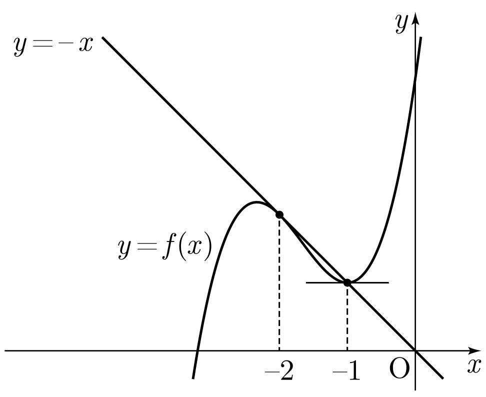
이고, 이때 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$k=-1$을 가정했을 때의 함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x+2)(x+1)^2-x$$

이고, 이때 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



16 정답 | 49 행동 영역 | 계산

내용 영역 | 수열의 합

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6}(k^2-2k) &= \sum_{k=1}^{6}k^2-2\times\sum_{k=1}^{6}k \\ &= \frac{6\times7\times13}{6}-2\times\frac{6\times7}{2} \\ &= 91-42=49 \end{aligned}$$

수학 영역

17 정답 | 41 행동 영역 | 계산
내용 영역 | 부정적분

$f'(x)=2x^3+x^2-3x+1$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

이다. $f(0)=2$ 이므로 $C=2$ 이다.

$$\therefore\ f(3)=\frac{1}{2}\times3^4+\frac{1}{3}\times3^3-\frac{3}{2}\times3^2+3+2$$
$$=\frac{81}{2}+9-\frac{27}{2}+3+2$$
$$=41$$

18 정답 | 14 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 수열의 귀납적 정의

$$a_1=2,\quad a_2=a_1+2=4,\quad a_3=9-2a_2=1,$$
$$a_4=a_1+2=3,\quad a_5=a_4+2=5,\quad a_6=9-2a_5=-1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{6}a_n=2+4+1+3+5+(-1)=14$ 이다.

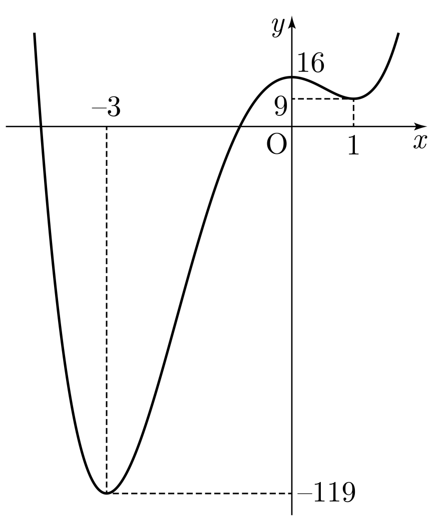
19 정답 | 9 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 도함수의 활용(방정식에의 활용)

함수 $y=3x^4+8x^3-18x^2+16$ 에 대하여

$$y'=12x^3+24x^2-36x=12x(x+3)(x-1)$$

이므로 함수의 증감을 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-119	$\nearrow$	16	$\searrow$	9	$\nearrow$

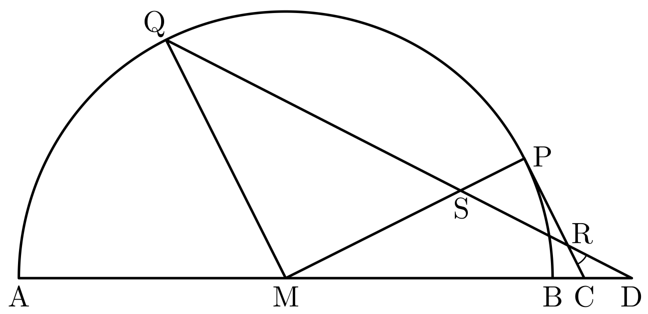


따라서 x에 대한 방정식 $3x^4+8x^3-18x^2+16=a$ 이 음의 실근을 가지기 위해서는 $a\ge-119$ 이어야 하고, 양의 실근의 가지기 위해서는 $a\ge9$ 이어야 한다.

따라서 x에 대한 방정식 $3x^4+8x^3-18x^2+16=a$ 이 양의 실근과 음의 실근을 모두 가지기 위한 실수 a의 최솟값은 9 이다.

20 정답 | 266 행동 영역 | 추론
내용 영역 | 사인법칙, 코사인법칙

두 선분 MP와 QR이 만나는 점을 S라 하고, $\overline{AM}=R$ 이라 하자.



두 선분 CP와 MQ가 평행하므로 $\angle CRD=\angle MQD$ 이다.

$\overline{MQ}=R$ 이고 $\cos(\angle CRD)=\cos(\angle MQD)=\frac{4}{5}$ 에서

$\tan(\angle CRD)=\tan(\angle MQD)=\frac{3}{4}$ 이므로

$$\overline{MS}=\frac{3}{4}R,\quad \overline{PS}=\frac{1}{4}R,\quad \overline{PR}=\frac{1}{3}R$$

이다. 따라서 $\overline{MR}=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PR}^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}R$ 이다. (가): $\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\overline{MR}:\overline{MD}=10:9\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{MD}=\frac{\sqrt{10}}{3}R\times\frac{9\sqrt{2}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}R$$

이다. $\cos(\angle MQD)=\frac{4}{5}$ 이므로 삼각형 MQD에서 $\overline{QD}=x\times R$ 이라 하고 코사인법칙을 적용하면

$$\cos(\angle MQD)=\frac{\overline{MQ}^2+\overline{QD}^2-\overline{MD}^2}{2\times\overline{MQ}\times\overline{QD}}$$
$$\Rightarrow\ \frac{4}{5}=\frac{1+x^2-\frac{9}{5}}{2x}$$
$$\Rightarrow\ x^2-\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}=0$$

에서 $x=2$ 이다. (나): 2

$\sin(\angle MQD)=\frac{3}{5}$ 인데, 삼각형 QMD에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{MD}:\overline{QD}=\sin(\angle MQD):\sin(\angle QMD)$$

이므로

$$\sin(\angle QMD)=\sin(\angle MQD)\times\frac{\overline{QD}}{\overline{MD}}$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{2R}{\frac{3}{\sqrt{5}}R}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(다): $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이다.

$$\therefore\ p=\frac{\sqrt{10}}{3},\ q=2,\ r=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$45\times(p^2+q^2+r^2)=45\times\left(\frac{10}{9}+4+\frac{4}{5}\right)=266$$

수학 영역

21 정답 | 214　　행동 영역 | 추론
내용 영역 | 접선의 방정식, 함수의 미분가능성

STEP 1　$f(\alpha)=0$ 인지 $g(\alpha)=0$ 인지 결정하기
⇒ $h(x)=|f(x)|-|g(x)|$ 가 $x=\alpha$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $f(\alpha)=0$ 이거나 $g(\alpha)=0$ 이다.

$g(\alpha)=0$ 이라고 가정하자. $f(\alpha)<g(\alpha)$ 이므로 $f(\alpha)<0$ 이다.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로

$f(\beta)=0$, $f'(\beta)\neq 0$ 인 어떤 실수 β가
열린구간 $(-\infty, \alpha)$ 또는 열린구간 (α, ∞)에 반드시 존재

한다. 그런데 $g(x)$는 일차함수이고 $g(\alpha)=0$ 이므로

$x\neq\alpha$ 이면 $g(x)\neq 0$
$\Rightarrow$ $x\neq\alpha$ 일 때 함수 $|g(x)|$는 미분가능함

인데, $x=\beta$에서도 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않게 되므로 모순이다.

따라서

- $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$
- $g(\alpha)>0$

이다.

만약 $g(x)$가 상수함수라면, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 x좌표는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 x좌표와 같다. 곧

$f(k)=0$, $f'(k)\neq 0$ 인 실수 k가 α뿐임

을 의미한다. 그러면 사차함수 $f(x)$는 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^3$ 의 꼴일 수밖에 없는데, 이 경우 함수 $g(x)$가 $g(\alpha)>0$ 이면서 상수함수일 수 없다.

따라서 $g(x)$는 일차함수이므로 $g(\beta)=0$ 인 실수 β가 존재한다.

STEP 2　$x=\beta$에서 함수 $h(x)$가 미분가능할 조건 찾기

$x=\beta$에서 함수 $h(x)$가 미분가능하려면

$$f(\beta)=0,\quad |f'(\beta)|=|g'(\beta)|$$

이어야 한다. 만약 $f(k)=0$, $f'(k)\neq 0$ 인 $k\neq\alpha$, $k\neq\beta$인 실수 k가 존재한다면 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 미분가능하지 않으므로 (가) 조건에 모순이다.

따라서, $f(k)=0$, $f'(k)\neq 0$ 인 $k\neq\alpha$, $k\neq\beta$인 실수 k가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $P(x)\geq 0$ 인 최고차항의 계수가 a 인 이차식 $P(x)$가 존재하여

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)P(x)$$

이다. 그런데 $f(0)=27$ 이므로

$\alpha\times\beta\times P(0)>0$
$\Rightarrow$ $\alpha\times\beta>0$ ($\because$ $P(x)\geq 0$)

이다. $\alpha>0$ 이므로 $\beta>0$ 이다.

- $g(\beta)=0$ 인 실수 β에 대하여 $\beta>0$
- $g(0)=27$

$\Rightarrow$ 일차함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기는 음수

이다. 또한 $g(\alpha)>0$ 이므로 $\alpha<\beta$이다.

STEP 3　함수 $f(x)-g(x)$의 식 세우기

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=0$에서 접하고,
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=\beta$에서 만나므로

$$f(x)-g(x)=ax^2(x-t)(x-\beta)\ (t\neq\beta)$$

이다. 특히,

$$f(\alpha)-g(\alpha)=-g(\alpha)<0$$

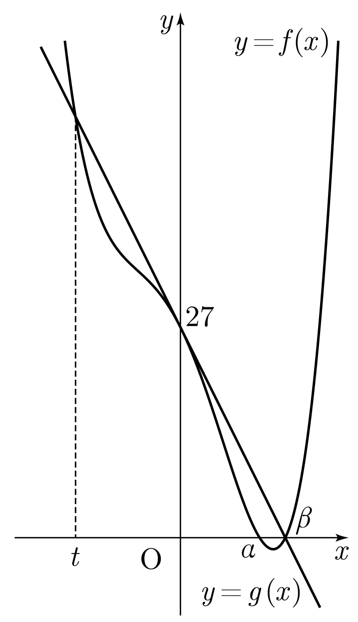
이므로

$a\alpha^2(\alpha-t)(\alpha-\beta)<0$
$\Rightarrow$ $\alpha-t>0$ ($\because$ $\alpha-\beta<0$)

에서 $t<\alpha$이다.

(i) $t<0$인 경우

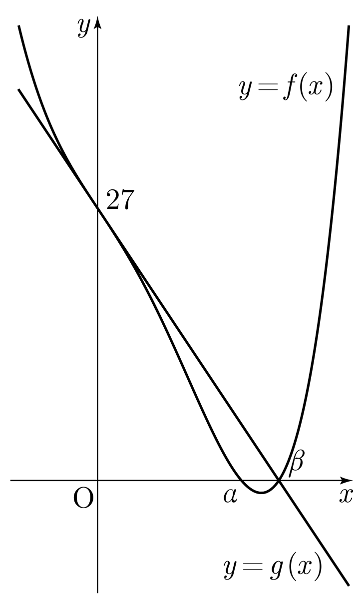
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 그려진다.



함수 $h(x)=|f(x)|-|g(x)|$가 극대가 되는 지점은 $x=0$뿐이므로 (나) 조건에 모순이다.

(ii) $t=0$인 경우

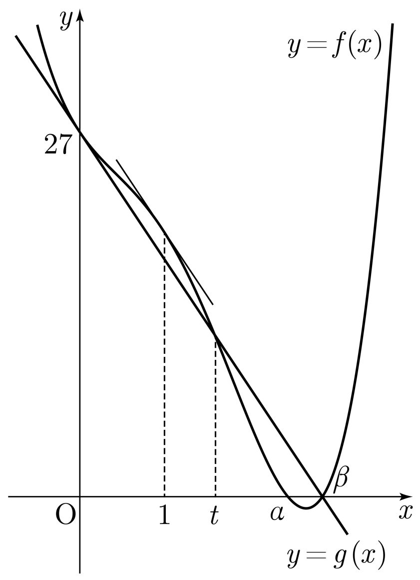
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 그려진다.



함수 $h(x)=|f(x)|-|g(x)|$가 극댓값을 가지지 않으므로 (나) 조건에 모순이다.

(iii) $t>0$ 인 경우

두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같이 그려진다.



위의 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 그려질 때 함수 $f(x)-g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{4}{3}a$ 를 가지면 함수 $h(x)$ 도 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{4}{3}a$ 를 가진다.

$$f(x)-g(x)=ax^2(x-t)(x-\beta),$$
$$f'(x)-g'(x)=a\{2x(x-t)(x-\beta)+x^2(x-\beta)+x^2(x-t)\}$$

이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)-g(1)=a(1-t)(1-\beta)=\frac{4}{3}a$$

$$\Rightarrow (1-t)(1-\beta)=\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(1)-g'(1)=a\{2(1-t)(1-\beta)+(1-\beta)+(1-t)\}=0$$
$$\Rightarrow 2(1-t)(1-\beta)+(1-\beta)+(1-t)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다. ㉡과 ㉠에 의해

$$(1-\beta)+(1-t)=-2(1-t)(1-\beta)=-\frac{8}{3} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이고, ㉠과 ㉢을 연립하기 위해 방정식 $x^2+\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=0$ 을 풀면

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}$$

이고, $t<\beta$ 이므로

$$1-t=-\frac{2}{3}, \quad 1-\beta=-2$$

에서 $t=\frac{5}{3}$, $\beta=3$ 이다.

STEP 4 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 식 구하기

$|g'(\beta)|=|f'(\beta)|$, 곧 $|g'(3)|=|f'(3)|$ 이므로 이를 이용하면 직선 $y=g(x)$ 의 기울기인 $g'(3)$ 의 값을 구할 수 있다.

$$f(x)-g(x)=ax^2\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3),$$

$$f'(x)-g'(x)=a\left\{2x\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3)+x^2(x-3)+x^2\left(x-\frac{5}{3}\right)\right\}$$

이므로

$$f'(3)-g'(3)=a\times 3^2\times\left(3-\frac{5}{3}\right)=12a$$

이다. 따라서 $f'(3)=6a$, $g'(3)=-6a$ 이다.

$g(3)=0$ 이므로 $g(x)=-6a(x-3)$ 이고,

$g(0)=27$ 이므로 $a=\frac{3}{2}$ 이다.

STEP 5 정답 구하기

$$g(x)=-9(x-3), \quad f(x)-g(x)=\frac{3}{2}x^2\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3)$$

이므로

$$g(5)=-18,$$
$$f(5)-g(5)=\frac{3}{2}\times 5^2\times\left(5-\frac{5}{3}\right)\times(5-3)=250,$$
$$f(5)=232$$

이므로 $h(5)=|f(5)|-|g(5)|=232-18=214$ 이다.

다른 풀이 **STEP 3** 에서 $t>0$ 을 얻고 t 와 β 의 값을 구하는 연립방정식을 푸는 과정이 쉽지 않을 수 있다. 이때 다음과 같은 우회 계산 방법이 존재한다.

함수 $f(x)-g(x)$ 는 최고차항의 계수가 a 인 사차함수이고, $x=0$ 에서 극소, $x=1$ 에서 극대이므로 어떤 실수 b 에 대하여

$$f'(x)-g'(x)=4ax(x-1)(x-b)$$
$$=4a(x^3-(b+1)x^2+bx)$$

이다. 따라서

$$f(x)-g(x)=a\left(x^4-\frac{4}{3}(b+1)x^3+2bx^2\right)$$

이고, 함수 $f(x)-g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{4}{3}a$ 를 가지므로

$$1-\frac{4}{3}(b+1)+2b=\frac{2}{3}b-\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}b-\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; b=\frac{5}{2}$$

이다. 곧,

$$f(x)-g(x)=a\left(x^4-\frac{14}{3}x^3+5x^2\right)=ax^2\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3)$$

이므로 $t=\frac{5}{3}$, $\beta=3$ 이다.

22 정답 | 88 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 지수함수의 그래프, 로그함수의 그래프

START 문제 상황 파악하고 풀이 방향 설정하기

⇒ 문제에서 미지수는 a와 b의 두 개가 제시되었다.
지수함수와 로그함수를 연립하여 간결한 대수적인 방정식을 얻을 수는 없다.
그러나 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점 A가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점이 아닌
두 그래프 $y=f^{-1}(x)$와 $y=g(x)$의 교점으로 해석한다면, 밑이 같은 두 로그함수의 연립이므로 교점을 a와 b에 대한 식으로 쉽게 얻을 것이다.
두 교점 A와 B를 잇는 직선의 기울기가 2라는 것으로부터 a와 b에 대한 식을 하나 더 얻게 될 것이다.

STEP 1 교점 A의 좌표를 얻기

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점 A가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 A는 두 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 $y=g(x)$의 교점이기도 하다.

$$x=\frac{1}{3}a^{y+b}-2b$$
$$\Rightarrow a^{y+b}=3(x+2b)$$
$$\Rightarrow y=\log_a(3x+6b)-b$$

이므로 $y=f^{-1}(x)=\log_a(3x+6b)-b$와 $y=\log_a(7x-10b)-b$의 교점을 구하면

$$\log_a(3x+6b)-b=\log_a(7x-10b)-b$$
$$\Rightarrow \log_a(3x+6b)=\log_a(7x-10b)$$
$$\Rightarrow 3x+6b=7x-10b$$
$$\Rightarrow x=4b$$

에서 $\mathrm{A}(4b,\ 4b)$이다. 그리고 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(4b,\ 4b)$를 지나므로

$$f(4b)=4b$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}a^{5b}-2b=4b$$
$$\Rightarrow a^{5b}=18b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

STEP 2 교점 B의 좌표를 얻기

직선 AB의 기울기가 2이고 점 A의 좌표가 $(4b,\ 4b)$이므로 실수 p에 대하여 점 B의 좌표를 $(4b+p,\ 4b+2p)$라 할 수 있다. 따라서

$$f(4b+p)=4b+2p$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}a^{5b+p}-2b=4b+2p$$
$$\Rightarrow a^{5b+p}=18b+6p \qquad \cdots\cdots ㉡$$
$$g(4b+p)=4b+2p$$
$$\Rightarrow \log_a(18b+7p)-b=4b+2p$$
$$\Rightarrow a^{5b+2p}=18b+7p \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이다. ㉠에 의해 $a^{5b}=18b$이므로

$$a^{5b+p}=18b+6p \Rightarrow a^p=1+\frac{p}{3b}$$
$$a^{5b+2p}=18b+7p \Rightarrow a^{2p}=1+\frac{7p}{18b}$$

이다.

따라서

$$a^{2p}=1+\frac{7p}{18b}, \quad a^{2p}=(a^p)^2=\left(1+\frac{p}{3b}\right)^2$$
$$\Rightarrow 1+\frac{7p}{18b}=1+\frac{2p}{3b}+\frac{p^2}{9b^2}$$
$$\Rightarrow -\frac{5p}{18b}=\frac{p^2}{9b^2}$$
$$\Rightarrow p=-\frac{5}{2}b$$

이다. 따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}b,\ -b\right)$이다.

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f\left(\frac{3}{2}b\right)=-b$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}a^{\frac{5}{2}b}-2b=-b$$
$$\Rightarrow a^{\frac{5}{2}b}=3b \qquad \cdots\cdots ㉣$$

이다.

STEP 3 a와 b의 값 구하기

㉠과 ㉣에 의하여 $a^{5b}=18b$, $a^{\frac{5}{2}b}=3b$이고,

특히 $a^{\frac{5}{2}b}=3b$으로부터 $a^{5b}=9b^2$이므로

$$18b=9b^2 \Rightarrow b=2$$

이다. 따라서 $a^{10}=36$이므로 $a=\sqrt[5]{6}$이다.

STEP 4 정답 구하기

삼각형 OAB의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times(\text{점 B에서 직선 } y=x\text{까지의 거리})$$
$$=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}$$
$$=20$$

이다. 그리고

$$f(13)=\frac{1}{3}\times\sqrt[5]{6}^{\,13+2}-4=\frac{1}{3}\times 6^3-4=72-4=68$$

이다.

$$\therefore\ S+f(13)=20+68=88$$

수학 영역

[확률과 통계]

				23	①	24	③	25	④
26	②	27	③	28	④	29	178	30	399

[확률과 통계 난이도 분포]

단원 / 변별 등급대	경우의 수	확률	통계
5등급 이하	23	24	25
4등급 / 5등급		26	
3등급 / 4등급			
2등급 / 3등급			27, 28
1등급 / 2등급		29	
1등급 / 만점	30		

23

정답 | ① 행동 영역 | 계산
내용 영역 | 이항정리

6차항은 x^2이 두 번, $3x$가 두 번 곱해진 항이므로

$${}_4C_2\times(x^2)^2\times(3x)^2=6\times x^4\times 9x^2=54x^6$$

이다. 따라서 x^6의 계수는 54이다.

24

정답 | ③ 행동 영역 | 계산
내용 영역 | 확률의 정의

1부터 5까지 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5^3=125$

3개의 자연수를 나열하여 이웃하는 두 수의 합이 모두 홀수인 경우는

(짝수, 홀수, 짝수), (홀수, 짝수, 홀수)

인 경우뿐이다.

(짝수, 홀수, 짝수)인 경우의 수는 $2\times3\times2=12$이다.

(홀수, 짝수, 홀수)인 경우의 수는 $3\times2\times3=18$이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12+18}{125}=\dfrac{6}{25}$이다.

25

정답 | ④ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 모평균의 추정

$\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$이고 표본의 크기가 $196=14^2$, 모표준편차가 3이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{3}{14}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{3}{14}$$

이다. $\bar{x}-1.96\times\dfrac{3}{14}=8.08$이므로

$$\bar{x}=8.08+1.96\times\frac{3}{14}=8.08+0.42=8.5$$

이다. 따라서

$$a=\bar{x}+0.42=8.92$$

이므로 $a+\bar{x}=8.92+8.5=17.42$이다.

26

정답 | ② 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률

10개의 공 중에서 3개를 고르는 전체 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$이다. 다음과 같이 경우를 나누어 확률을 구하자.

(i) 10을 포함하는 경우

10을 제외한 나머지 9개의 공 중에서 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_9C_2=36$이다.

(ii) 10을 포함하지 않고 5를 포함하는 경우

5와 10을 제외한 나머지 8개의 공 중에서 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$이다.

그 두 개의 공에 모두 홀수(1, 3, 7, 9)가 적혀 있는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이다.

따라서 이 경우의 수는 $28-6=22$이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36+22}{120}=\dfrac{29}{60}$이다.

다른 풀이 세 수의 곱이 10의 배수가 아닐 확률을 구하자.

먼저 세 수의 곱이 홀수인 경우의 수는 ${}_5C_3=10$이다.

세 수 중에서 5의 배수가 없는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$이다.

마지막으로 세 수의 곱이 홀수이면서 5의 배수도 아닌 경우의 수는 ${}_4C_3=4$이다.

따라서 세 수의 곱이 10의 배수가 아닌 경우의 수는 $10+56-4=62$이므로 세 수의 곱이 10의 배수인 경우의 수는 $120-62=58$이고, 구하는 확률은 $\dfrac{58}{120}=\dfrac{29}{60}$이다.

27

정답 | ③ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 이산확률분포

$\sigma(6X)=\sqrt{35}$ 이므로 $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$, $\mathrm{V}(X)=\dfrac{35}{36}$ 이다.

한편, $b=1-\left(\dfrac{1}{3}+a+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}-a$ 이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times\frac{1}{3}+2\times a+3\times\frac{1}{3}+4\times\left(\frac{1}{3}-a\right)\\&=\frac{1}{3}+2a+1+\frac{4}{3}-4a\\&=\frac{8}{3}-2a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=1\times\frac{1}{3}+2^2\times a+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\left(\frac{1}{3}-a\right)\\&=\frac{1}{3}+4a+3+\frac{16}{3}-16a\\&=\frac{26}{3}-12a\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{26}{3}-12a-\left(\frac{8}{3}-2a\right)^2\\&=-4a^2-\frac{4}{3}a+\frac{14}{9}\end{aligned}$$

이다. $\mathrm{V}(X)=\dfrac{35}{36}$ 이므로

$$-4a^2-\frac{4}{3}a+\frac{14}{9}=\frac{35}{36}$$
$$\Rightarrow\ 4a^2+\frac{4}{3}a-\frac{7}{12}=0$$
$$\Rightarrow\ 48a^2+16a-7=0$$
$$\Rightarrow\ (12a+7)(4a-1)=0$$

에서 $a=\dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서

$$\mathrm{E}(X)=\frac{8}{3}-2a=\frac{13}{6}$$

이므로 $\mathrm{E}(6X)=13$ 이다.

28

정답 | ④ 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\le t)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{t-2m}{\sigma}\right)$$

이고, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ (2\sigma)^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y\le t)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{t-m}{2\sigma}\right)$$

이다.

$$f(25)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{25-2m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{25-m}{2\sigma}\right)$$

이고 $f(25)=1$ 이므로

$$\frac{25-2m}{\sigma}=-\frac{25-m}{2\sigma}$$
$$\Rightarrow\ 50-4m=-(25-m)\ \ (\because\ \ \sigma\neq 0)$$

에서 $m=15$ 이다.

한편

$$\begin{aligned}f(33)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{33-30}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{33-15}{2\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9}{\sigma}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(21)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{21-30}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{21-15}{2\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{9}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(33)-f(21)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{9}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{9}{\sigma}\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$f(33)-f(21)=0.5468=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)$$

이므로 $\sigma=12$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \ f(33)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3}{12}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9}{12}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3}{4}\right)\\&=\left(\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{1}{4}\right)\right)\\&\qquad+\left(\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{4}\right)\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{1}{4}\right)+0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{4}\right)\\&=1+0.0987+0.2734\\&=1.3721\end{aligned}$$

이다.

29 정답 | 178 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 조건부확률

4번의 시행 이후에 두 점 A, B가 처음으로 같은 위치에 있게 되는 사건을 E, 두 점 A, B의 좌표가 2인 사건을 F라 하자.

점 B의 좌표에서 점 A의 좌표를 뺀 값(X)은
주사위의 눈이 1 또는 2가 나오면 1 줄어들고,
주사위의 눈이 3이 나오면 2 줄어들고,
주사위의 눈이 4 또는 5 또는 6이 나오면 변화가 없다.

(i) X의 변화량이 -2가 두 번, 0이 두 번인 경우

네 번째 시행에서 X의 변화량이 -2이어야 하므로
-2 두 개와 0 두 개를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

이다. 따라서 (i)의 확률은

$$3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{27}{6^4}$$

이다. 한편, (i)의 경우 네 번째 시행 이후 점 A와 B의 좌표는 2이므로 사건 F에 속한다.

(ii) X의 변화량이 -2가 한 번, -1이 두 번, 0이 한 번인 경우

네 번째 시행에서 X의 변화량이 0일 수 없으므로
-2 한 개, -1 두 개, 0 한 개를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$$

이다. 따라서 (ii)의 확률은

$$9\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{2}{6}\right)^2\times\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{108}{6^4}$$

이다. 한편, (ii)의 경우 점 A와 B의 좌표는 3이므로 사건 F에 속하지 않는다.

(iii) X의 변화량이 -1이 네 번인 경우

(iii)의 확률은

$$\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{16}{6^4}$$

이다. 한편, (iii)의 경우 점 A와 B의 좌표는 4이므로 사건 F에 속하지 않는다.

따라서

$$\mathrm{P}(E)=\frac{27+108+16}{6^4}=\frac{151}{6^4},$$
$$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{27}{6^4}=\frac{27}{6^4}$$

이므로 $\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{27}{151}$이다.

$\therefore\ p=151,\ q=27,\ p+q=178$

30 정답 | 399 행동 영역 | 추론
내용 영역 | 중복조합

학생 A가 빨간색 볼펜 2개를 받고, 나머지 학생은 빨간색 볼펜을 2개 받지 않으므로 나머지 2개의 빨간색 볼펜을 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$이다.

편의상 A가 2개, B가 1개, C가 1개 받았다고 하자.

초록색 볼펜 2개, 파란색 볼펜 4개를 학생 4명에게 나누어주는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2\times{}_4\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_4=10\times35=350$

(가)를 만족시키지 못하는 경우는 빨간색 볼펜을 받지 못한 D가 초록색 볼펜과 파란색 볼펜도 받지 못하는 경우이다.
초록색 볼펜 2개, 파란색 볼펜 4개를 3명의 학생 A, B, C에게만 나누어주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_4=6\times15=90$

따라서 (가)를 만족시키며 나누어주는 경우의 수는 $350-90=260$

(가)를 만족시키지만, (나) 규칙에 어긋나 볼펜을 받는 학생이 존재하는 경우의 수를 구하자. 학생 B와 C는 빨간색 볼펜을 하나만 받았으므로 (나) 조건을 위반할 수 없다.

따라서 (나)를 위반하는 경우는

- A가 볼펜을 더 안 받는 경우
- D가 초록색 볼펜만 2개 받는 경우
- D가 파란색 볼펜만 2개 이상 받는 경우

뿐이다.

(i) A가 볼펜을 더 안 받는 경우

초록색 볼펜 2개, 파란색 볼펜 4개를 3명의 학생 B, C, D에게만 나누어주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_4=6\times15=90$

D가 볼펜을 하나도 못 받는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_4={}_3\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_4=3\times5=15$

따라서 (i)의 경우의 수는 $90-15=75$

(ii) A는 (나)를 위반하지 않고,
D가 초록색 볼펜만 2개 받는 경우

파란색 볼펜 4개를 3명의 학생 A, B, C에게만 나누어주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

이때, A도 (나)를 위반하는 경우의 수는 파란색 볼펜 4개를 2명의 학생 B, C에게만 나누어주는 경우의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

따라서 (ii)의 경우의 수는 $15-5=10$

(iii) A는 (나)를 위반하지 않고,
D가 파란색 볼펜만 2개 이상 받는 경우

D가 파란색 볼펜을 $r\,(2\le r\le 4)$개 받는다고 하자.

초록색 볼펜 2개와 남은 파란색 볼펜 $(4-r)$개를 3명의 학생 A, B, C에게만 나누어주는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_{4-r}={}_4\mathrm{C}_2\times{}_{6-r}\mathrm{C}_{4-r}=6\times{}_{6-r}\mathrm{C}_2$

이때, A도 (나)를 위반하는 경우의 수는 초록색 볼펜 2개와 남은 파란색 볼펜 $(4-r)$개를 2명의 학생 B, C에게만 나누어주는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_{4-r}={}_3\mathrm{C}_2\times{}_{5-r}\mathrm{C}_{4-r}=3\times(5-r)$

따라서 (iii)의 경우의 수는

$$6\times({}_4C_2+{}_3C_2+{}_2C_2)-3\times(3+2+1)$$
$$=6\times(6+3+1)-3\times6$$
$$=60-18=42$$

이다.

따라서 (가)를 만족시키지만, (나) 규칙에 어긋나 볼펜을 받는 학생이 존재하는 경우의 수는 $75+10+42=127$이다.

따라서 빨간색 볼펜을 (다) 조건에 맞추어 나누어준 하나의 경우에서 (가), (나) 조건을 만족시키는 경우의 수는 $260-127=133$이다.

따라서 전체 경우의 수는 $3\times133=399$이다.

다른 풀이 A가 빨간색 볼펜을 2개, B와 C가 빨간색 볼펜을 1개 가져갔다고 하자.

초록색 볼펜 2개를 어떻게 나눠 가지는지에 따라 경우를 나눈다.

(i) A와 D가 초록색 볼펜을 각각 하나씩 가져갈 때

파란색 볼펜을 어떻게 나눠 가지든 규칙을 모두 만족시킨다.
따라서 파란색 볼펜 4개를 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4H_4={}_7C_4=35$이다.

(ii) A가 초록색 볼펜을 가져가고,
D는 초록색 볼펜을 가져가지 않을 때

A가 초록색 볼펜을 가져가고,
D가 초록색 볼펜을 가져가지 않는 경우의 수는

- A가 초록색 볼펜을 두 개 가져가는 경우: 1가지
- A가 초록색 볼펜을 한 개 가져가고,
  B나 C가 초록색 볼펜을 한 개 가져가는 경우: 2가지

에서 총 3가지이다.

D는 파란색 볼펜만을 가져갈 수 있고, 한 종류의 볼펜을 가져가면 (나)에 의해 볼펜을 한 자루만 가져갈 수 있으므로 D는 파란색 볼펜 한 자루만을 가져간다.

D가 파란색 볼펜 한 자루만 가져가면 나머지 학생 A, B, C는 파란색 볼펜을 어떻게 가져가든 규칙을 만족시킨다.

따라서 남은 파란색 볼펜 3개를 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=10$이다.

곧, 이 경우의 수는 $3\times10=30$이다.

(iii) D가 초록색 볼펜 두 개를 전부 가져갈 때

D는 파란색 볼펜을 한 자루 이상 가져가고,
A가 파란색 볼펜을 한 자루 이상 가져가야 한다.
남은 파란색 볼펜 두 자루를 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4H_2={}_5C_2=10$이다.

(iv) D가 초록색 볼펜을 한 자루 가져가고,
남은 초록색 볼펜 한 자루를 B 또는 C가 가져갈 때

A가 파란색 볼펜을 한 자루 이상 가져가야 한다.

남은 파란색 볼펜 세 자루를 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4H_3={}_6C_3=20$이다.

곧, 이 경우의 수는 $2\times20=40$이다.

(v) B 또는 C가 초록색 볼펜을 가져갈 때

B 또는 C가 초록색 볼펜을 가져가는 경우는

- B와 C가 각각 한 자루씩 가져가는 경우
- B 또는 C가 두 자루 다 가져가는 경우

에서 총 3가지이다.

D는 파란색 볼펜을 한 자루만 가져가고,
A가 파란색 볼펜을 한 자루 이상 가져간다.

남은 파란색 볼펜 두 자루를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이다.

곧, 이 경우의 수는 $3\times6=18$이다.

(i)~(v)에 의하여 빨간색 볼펜을 나누어 갖는 경우가 확정되면, 초록색 볼펜과 파란색 볼펜을 나누어 갖는 경우의 수는

$$35+30+10+40+18=133$$

이다.

수학 영역

[미적분]

				23	④	24	①	25	③
26	⑤	27	②	28	①	29	572	30	24

[미적분 난이도 분포]

단원 / 변별 등급대	수열의 극한	미분법	적분법
5등급 이하		23	24, 26
4등급 / 5등급	25		
3등급 / 4등급		27	
2등급 / 3등급			28
1등급 / 2등급	29		
1등급 / 만점		30	

23

정답 | ④ 행동 영역 | 계산

내용 영역 | 삼각함수의 극한

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 3x}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 3x}{(x-\pi)^2(1-\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 3x}{(x-\pi)^2(1-\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x+3\pi)}{x^2(1-\cos(3x+3\pi))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(3x+3\pi)}$$
$$=9\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{9}{2}$$

24

정답 | ① 행동 영역 | 계산

내용 영역 | 여러 가지 적분법

$$\int_0^1(7x+1)^{\frac{1}{3}}dx=\int_1^8 u^{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}du\ \ (u=7x+1\text{로 치환})$$
$$=\frac{1}{7}\left[\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right]_1^8$$
$$=\frac{3}{28}\times\left[8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right]$$
$$=\frac{3}{28}\times(16-1)$$
$$=\frac{45}{28}$$

25

정답 | ③ 행동 영역 | 이해

내용 영역 | 수열의 극한

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$$a_n=5+d(n-1)=dn+5-d$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n a_{n+1}}-kn\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(dn+5-d)(dn+5)}-kn\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(dn+5-d)(dn+5)-k^2n^2}{\sqrt{(dn+5-d)(dn+5)}+kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(d^2-k^2)n^2+(10d-d^2)n+d(d-5)}{\sqrt{(dn+5-d)(dn+5)}+kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(d^2-k^2)n+d(10-d)+\dfrac{d(d-5)}{n}}{\sqrt{\left(d+\dfrac{5-d}{n}\right)\left(d+\dfrac{5}{n}\right)}+k}$$

이다. 이 극한이 수렴하므로 $d^2-k^2=0$, 곧 $k=d$이고, 그러면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(d^2-k^2)n+d(10-d)+\dfrac{d(d-5)}{n}}{\sqrt{\left(d+\dfrac{5-d}{n}\right)\left(d+\dfrac{5}{n}\right)}+k}=\frac{d(10-d)}{d+d}$$
$$\Rightarrow\ \frac{10-d}{2}=4$$
$$\Rightarrow\ d=2$$

이다. 따라서 $k=2$이고 $a_3=a_1+2d=5+4=9$이다.

$\therefore\ k+a_3=2+9=11$

26

정답 | ⑤ 행동 영역 | 계산/이해

내용 영역 | 정적분과 급수의 관계

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k+n}{k^2+2kn+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\dfrac{k}{n}+1}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+2\times\dfrac{k}{n}+2}$$

이고, 이 값은 정적분과 급수의 관계에 따라

$$\int_1^2\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 5)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2$$
$$=\ln\sqrt{2}$$

이다.

27 정답 | ② 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 음함수의 미분법

식 $\ln(1-xy)+x-y=a$를 미분하면

$$\frac{-y-xy'}{1-xy}+1-y'=0$$

이다. 곡선 $\ln(1-xy)+x-y=a$가 직선 $y=-x+\frac{7}{4}$에 접하려면 접점의 기울기가 -1이어야 하므로 $y'=-1$을 대입하면

$$\frac{-y+x}{1-xy}+2=0$$

이다. 접점의 좌표를 $\left(k,\ -k+\frac{7}{4}\right)$이라 하면

$$\frac{-\left(-k+\frac{7}{4}\right)+k}{1-k\left(-k+\frac{7}{4}\right)}+2=0$$

$$\Rightarrow \frac{2k-\frac{7}{4}}{k^2-\frac{7}{4}k+1}+2=0$$

$$\Rightarrow 2k-\frac{7}{4}+2\left(k^2-\frac{7}{4}k+1\right)=0$$

$$\Rightarrow 2k^2-\frac{3}{2}k+\frac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow 2\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{4}\right)=0$$

에서 $k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=\frac{1}{4}$이다.

$k=\frac{1}{2}$이어서 접점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right)$이면

$$a=\ln\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}+\ln\frac{3}{8}$$

이다.

$k=\frac{1}{4}$이어서 접점의 좌표가 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{2}\right)$이면

$$a=\ln\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4}+\ln\frac{5}{8}$$

이다.

따라서 a로 가능한 모든 값의 합은

$$\left(-\frac{3}{4}+\ln\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{5}{4}+\ln\frac{5}{8}\right)=-2+\ln\frac{15}{64}$$

이다.

28 정답 | ① 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 여러 가지 적분법

STEP 1 함수 $g(x)$ 구하기

$x\geq 0$에서

$$g(x)=\int_0^x\left\{\left(f'(t)\right)^2\sin f(t)-f''(t)\cos f(t)\right\}dt$$

인데,

$$\begin{aligned}&\left(f'(t)\right)^2\sin f(t)-f''(t)\cos f(t)\\&=f'(t)\times f'(t)\sin f(t)-f''(t)\times\cos f(t)\\&=f'(t)\times\left(-\frac{d}{dt}\cos f(t)\right)-\frac{df'(t)}{dt}\times\cos f(t)\\&=-\frac{d}{dt}\left(f'(t)\cos f(t)\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^x-\frac{d}{dt}\left(f'(t)\cos f(t)\right)dt\\&=\Big[-f'(t)\cos f(t)\Big]_0^x\\&=f'(0)\cos f(0)-f'(x)\cos f(x)\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{d}{dx}\left(a\times\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\right)\\&=\frac{a}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

이므로

$$g(x)=a-\frac{a}{(x+1)^2}\cos\left(\frac{ax}{x+1}\right)$$

이다.

STEP 2 상수 a의 값 구하기

$g(x)=a-\frac{a}{(x+1)^2}\cos\left(\frac{ax}{x+1}\right)$이므로

$$g(3)=a-\frac{a}{16}\cos\frac{3a}{4},$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=a$$

이다. 따라서

$$g(3)=\frac{31}{32}\times\lim_{x\to\infty}g(x)$$

$$\Rightarrow a-\frac{a}{16}\cos\frac{3a}{4}=\frac{31}{32}a$$

$$\Rightarrow \cos\frac{3a}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4}=\frac{\pi}{3}$$

에서 $a=\frac{4}{9}\pi$이다.

STEP 3 정답 구하기

0 이상의 모든 실수 x에 대하여 $h(g(x))=x$를 만족시키는 함수 $h(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^{g(3)} h(x)\,dx &= \int_0^3 h(g(x))g'(x)\,dx\\ &= \int_0^3 x g'(x)\,dx\\ &= \Big[x g(x)\Big]_0^3 - \int_0^3 g(x)\,dx\\ &= 3g(3) - \int_0^3 g(x)\,dx\end{aligned}$$

이다.

$$g(x) = \frac{4\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\frac{1}{(x+1)^2}\cos\left(\frac{4\pi}{9}\times\frac{x}{x+1}\right)$$

이므로

$$g(3) = \frac{4\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\times\frac{1}{16}\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\times\frac{3}{4}\right) = \frac{31}{72}\pi,$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 g(x)\,dx &= \left[\frac{4\pi}{9}x - \sin\left(\frac{4\pi}{9}\times\frac{x}{x+1}\right)\right]_0^3\\ &= \frac{4\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned}\therefore \text{(구하는 값)} &= 3g(3) - \int_0^3 g(x)\,dx\\ &= \frac{31}{24}\pi - \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

29 정답 | 572 행동 영역 | 추론
내용 영역 | 등비급수

START 수열 $\{a_n\}$의 공비 r이 $0<|r|<1$을 만족시키는지 확인하기

급수 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이다.

$b_2=6$인데,

- $b_2=a_3$이면 $a_3=6$이고,
- $b_2=-2a_2$이면 $a_2=-3$

이므로 어느 경우든 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 0일 수 없다.

또한, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비의 절댓값이 1 이상이면

- $\lim_{n\to\infty}(a_n+a_3)$은 발산하거나 0으로 수렴하지 않고,
- $\lim_{n\to\infty}(a_n-2a_n)=\lim_{n\to\infty}(-a_n)$도 발산하거나 0으로 수렴하지 않는다.

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $-1<r<1$이다.

만약 $r=0$이면 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=0$이므로 $a_n\geq a_3$, 곧 $0\geq 0$이 성립하므로 $b_n=a_3=0$이다.

곧, $\sum_{n=2}^{19}(a_n+b_n)=0$이 되어야 하는데, 그러면 $a_3=1$이므로 조건에 모순이다.

따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이다.

STEP 1 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 완전히 알아내기

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이고 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 r에 대하여 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. 곧,

- $b_n=a_3$인 수열 $\{b_n\}$의 항은 유한하고
- 수열 $\{b_n\}$의 나머지 모든 항은 $b_n=-2a_n$을 만족시킨다.

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로 $a_3>0$이어야 한다.

곧, $a_1=\frac{a_3}{r^2}>0$이다.

(i) $0<r<1$인 경우

$1\leq n\leq 3$일 때, $a_n\geq a_3$이므로 $b_n=a_3$이고
$n>3$일 때 $b_n=-2a_n$이다.
곧, $b_2=a_3=6$이다.

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\frac{6}{r(1-r)},$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}b_n &= b_2+b_3+\sum_{n=4}^{\infty}b_n = 6+6+\frac{-2a_4}{1-r}\\ &= 12-\frac{12r}{1-r}\end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)=3a_3-3$$

$$\Rightarrow\ 12-\frac{12r}{1-r}+\frac{6}{r(1-r)}=15$$

$$\Rightarrow\ 6-12r^2=3r(1-r)$$

$$\Rightarrow\ 6-12r^2=3r-3r^2$$

$$\Rightarrow\ 9r^2+3r-6=0$$

$$\Rightarrow\ 3(3r-2)(r+1)=0$$

이고, $0<r<1$ 이므로 $r=\frac{2}{3}$ 이다.

$a_3=6$ 이므로 $a_1=\frac{a_3}{r^2}=6\times\frac{9}{4}=\frac{27}{2}$, $a_2=9$ 이다.

(ii) $-1<r<0$ 인 경우

$a_n\ge a_3$ 인 자연수 n은 1, 3뿐이므로

- $n=1$ 또는 $n=3$ 일 때 $b_n=a_3$ 이고,
- $n=2$ 또는 $n\ge 4$ 에서 $b_n=-2a_n$

이다. $b_2=-2a_2=6$ 이므로 $a_2=-3$ 이다. 곧,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}a_n+\left[-2a_2+a_3-2\sum_{n=4}^{\infty}a_n\right]$$

$$=2a_3-a_2-2\sum_{n=4}^{\infty}a_n$$

이므로

$$2\sum_{k=4}^{\infty}a_n=-a_3-a_2+3 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

이다. 그런데 $a_2=-3$ 이므로 $a_4=-3r^2<0$ 이어서

$$\sum_{n=4}^{\infty}a_n=\frac{a_4}{1-r}<0$$

이고,

$$-a_3-a_2=-3r+3>0$$

$$\Rightarrow\ -a_3-a_2+3>0$$

이다. 곧 ㉠의 양변의 부호가 다르므로 $-1<r<0$ 일 수 없다.

STEP 2 정답 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$ 의 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\sum_{n=4}^{\infty}(a_nb_n)$$

$$=\frac{27}{2}\times6+9\times6+6\times6+\sum_{n=4}^{\infty}\left(-2a_n^{\ 2}\right)$$

$$=171-2\times\frac{a_4^{\ 2}}{1-r^2}$$

$$=171-2\times\frac{16}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{567}{5}$$

이다.

$\therefore\ p=5$, $q=567$, $p+q=572$

다른 풀이 $-1<r<0$ 인 경우가 불가능함을 직접적인 계산으로 보일 수도 있다.

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\frac{a_2}{1-r}=\frac{-3}{1-r},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n=b_2+b_3+\sum_{n=4}^{\infty}b_n=6+a_3-2\sum_{n=4}^{\infty}a_n$$

$$=6+(-3r)-2\times\frac{-3r^2}{1-r}$$

이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)=3a_3-3$$

$$\Rightarrow\ \frac{-3}{1-r}+6-3r+\frac{6r^2}{1-r}=-9r-3$$

$$\Rightarrow\ \frac{6r^2-3}{1-r}=-6r-9$$

$$\Rightarrow\ 2r^2-1=(1-r)(-2r-3)$$

$$\Rightarrow\ 2r^2-1=2r^2+r-3$$

$$\Rightarrow\ r=2$$

이므로 $-1<r<0$ 을 만족시키지 않는다.

30 정답 | 24 행동 영역 | 추론
내용 영역 | 도함수의 활용(함수의 그래프의 개형)

STEP 1 함수 $g(t)$의 역함수의 성질 파악하기

⇒ 함수 $g(t)$의 정의가 "곡선 $y=f(x)$ 위의 x좌표가 u인 점에서의 접선의 x절편이 t가 되는 u의 값"이므로 기본적으로 (부분) 역함수 관계이다.

함수 $f(x)=(x^2+2x+2)e^x+ax+2a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(u, f(u))$에서의 접선의 x절편을 $h(u)$라 하면

$$h(u)=u-\frac{f(u)}{f'(u)}$$

이다. 함수 $h(u)$를 u에 대해 미분하면

$$\frac{d}{du}\left(u-\frac{f(u)}{f'(u)}\right)=1-\frac{f'(u)\times f'(u)-f(u)f''(u)}{\{f'(u)\}^2}$$
$$=\frac{f(u)f''(u)}{\{f'(u)\}^2}$$

이다. 따라서 $f'(u)\neq 0$이라면

- $f(u)f''(u)\geq 0$일 때 $h(u)$는 증가하고,
- $f(u)f''(u)\leq 0$일 때 $h(u)$는 감소한다.

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는

$$f'(x)=(x^2+4x+4)e^x+a=(x+2)^2e^x+a,$$
$$f''(x)=(x^2+6x+8)e^x=(x+2)(x+4)e^x$$

이다. 그런데 $a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 따라서

- $u\leq -4$ 또는 $u\geq -2$일 때는 $f(u)$의 부호와 $h(u)$의 증감의 방향이 같고,
- $-4\leq u\leq -2$일 때는 $f(u)$의 부호와 $h(u)$의 증감의 방향이 반대이다.

$g(b)=-2$이므로 함수 $g(t)$의 정의에 의해 $h(-2)=b$이다.

그리고

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{f'(u)}=\lim_{u\to\infty}\frac{(u^2+2u+2)e^u+au+2a}{(u+2)^2e^u+a}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{u\to\infty}h(u)=\infty$$

이고,

$$\lim_{u\to-\infty}h(u)=\lim_{u\to-\infty}\left(u-\frac{(u^2+2u+2)e^u+au+2a}{(u+2)^2e^u+a}\right)$$
$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{\{u(u+2)^2-(u^2+2u+2)\}e^u+au-au-2a}{(u+2)^2e^u+a}$$
$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{-2a}{a} \qquad (\because \lim_{x\to-\infty}x^3e^x=0)$$
$$=-2$$

이다.

STEP 2 함수 $h(u)$의 구체적인 개형 파악하기

⇒ $f(u)$의 부호과 $h(u)$의 증감의 방향이 $u\leq -4$ 또는 $u\geq -2$일 때는 같고, $-4\leq u\leq -2$일 때는 다르므로 $f(x_0)=0$인 실수 x_0를 구하자.

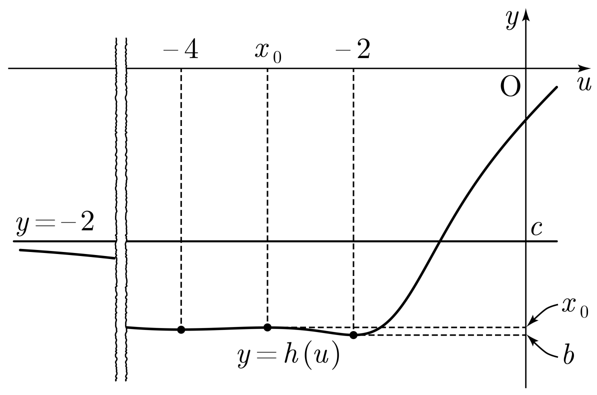
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 $f(x_0)=0$인 실수 x_0가 오직 하나 존재한다.

그 실수 x_0와 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점의 x좌표인 -2, -4와의 대소 관계가 중요한데 $f(-2)=2e^{-2}>0$이므로 x_0는 -2보다 작다. 따라서 x_0와 -4의 대소 관계에 따라 경우를 나누어 생각하자.

(i) $-4<x_0<-2$인 경우

함수 $h(u)$는 $u=-4$에서 극솟값을, $u=x_0$에서 극댓값 x_0를, $u=-2$에서 극솟값 b를 갖는다.

그리고 $\lim_{t\to c-}g(t)=-\infty$이므로 $c=\lim_{u\to-\infty}h(u)=-2$이다.

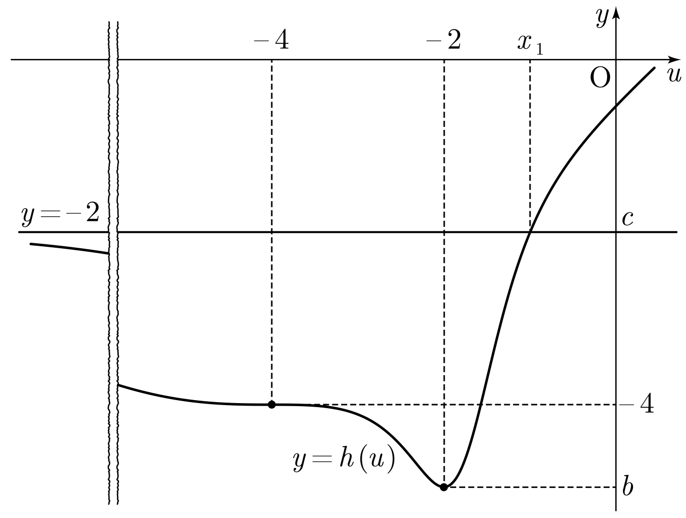


$h(-4)$와 b의 대소 관계를 알 수 없으므로 아래와 같이 경우를 나누어 살펴보면, $g(t)$가 $[b, \infty)$에서 $t=-2$에서만 불연속이 되게 할 수 없음을 알 수 있던,

- $h(-4)<b$이면 $h(u)=b$의 $u<-4$인 실근 u_0이 존재하고 $\lim_{t\to-2-}g(t)=-\infty$, $g(t)$는 $t=-2$에서만 불연속이므로 $t<-2$에서 함수 $y=g(t)$는 $u\leq u_0$에서의 함수 $y=h(u)$의 역함수이어야 하는데, 이 경우 $g(b)=-2$와 모순이다.
- $h(-4)=b$이면 위에서와 같은 이유로 $t<-2$에서 함수 $y=g(t)$는 $u\leq -4$에서의 함수 $y=h(u)$의 역함수이어야 하는데, 이 경우 $g(b)=-2$와 모순이다.
- $h(-4)>b$이면 함수 $g(t)$는 $t=h(-4)$에서 불연속이 된다.

(ii) $x_0=-4$인 경우

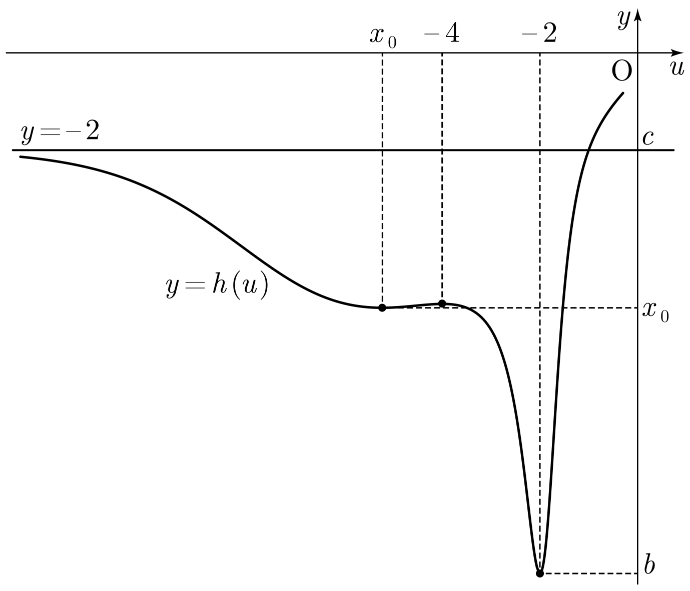
함수 $h(u)$는 $u=-4$에서 미분계수가 0이지만 극값을 가지지는 않으며, $u=-2$에서 극솟값 b를 갖는다.
그리고 (i)에서와 같은 이유로 $c=-2$이다.



함수 $g(t)$가 $t=-2$을 제외하면 항상 연속이므로 $h(x_1)=-2$인 실수 x_1에 대하여
$b\leq t<-2$에서는 $u<-2$에서 함수 $h(u)$의 역함수이고
$t\geq -2$에서는 $u\geq x_1$에서 함수 $h(u)$의 역함수이다.
이 경우 문제의 조건을 만족시킨다.

(iii) $x_0 < -4$ 인 경우

함수 $h(u)$는 $u=x_0$에서 극솟값 x_0를, $u=-4$에서 극댓값을, $u=-2$에서 극솟값 b를 갖는다.
그리고 (i)에서와 같은 이유로 $c=-2$이다.



그런데 이 경우 (i)에서와 비슷한 이유로 함수 $g(t)$가 구간 $[b, \infty)$에서 $t=-2$에서만 불연속이 되게 할 수 없다.

STEP 3 정답 구하기

(i), (ii), (iii)에 의해 $x_0=-4$, 곧 $f(-4)=0$이다. 따라서

$$f(-4)=10e^{-4}-2a=0$$

에서 $a=5e^{-4}$이다. 그리고

$$b=h(-2)=-2-\frac{f(-2)}{f'(-2)}=-2-\frac{2e^{-2}}{5e^{-4}}=-2-\frac{2}{5}e^2$$

이다.

$$\therefore\ a\times b\times c=5e^{-4}\times(-2)\times\left(-2-\frac{2}{5}e^2\right)=20e^{-4}+4e^{-2},$$

$p=20$, $q=4$, $p+q=24$

수학 영역

[기하]

				23	⑤	**24**	①	**25**	⑤
26	④	**27**	③	**28**	④	**29**	119	**30**	30

[기하 난이도 분포]

변별 등급대 \ 단원	이차곡선	평면벡터	공간도형과 공간좌표
5등급 이하	24	25	23
4등급 / 5등급	26		
3등급 / 4등급			27
2등급 / 3등급	28		
1등급 / 2등급		29	
1등급 / 만점			30

23

정답 | ⑤ 행동 영역 | 계산
내용 영역 | 공간좌표

점 M의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{2-4}{2},\ \frac{-5+1}{2}\right) \Rightarrow (2,\ -1,\ -2)$$

이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$

24

정답 | ① 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 포물선의 방정식

점 P에서 준선에 내린 수선의 발은 $\mathrm{H}(k,\ 18)$이고,
포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=a-k=a+1\ (\because\ k<7)$$

에서 $k=-1$이다.

따라서 포물선의 꼭짓점의 x좌표는 초점의 x좌표와 준선의 x좌표의 평균인 3이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 2)$이다. 그리고 초점에서 준선까지의 거리는 $2p=7-(-1)=8$이므로 포물선의 방정식은

$$(y-2)^2=16(x-3)$$

이다. 점 $\mathrm{P}(a,\ 18)$이 이 포물선 위의 점이므로

$$(18-2)^2=16(a-3)$$
$$\Rightarrow 256=16(a-3)$$
$$\Rightarrow a-3=16$$

에서 $a=19$이다.

25

정답 | ⑤ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 위치벡터

$\vec{p}=(x,\ y)$라 하면 $\vec{a}=(5,\ 10)$이므로

$$|\vec{p}-\vec{a}|=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow (x-5)^2+(y-10)^2=5$$

이다. 곧, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$인 점 P가 나타내는 도형은 점 $(5,\ 10)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\vec{p}|$의 최댓값은 원 위의 점 중에서 원점으로부터의 최대 거리이고, 원의 중심에서 원점까지의 거리가

$$\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$$

이므로 구하는 최댓값은 $5\sqrt{5}+\sqrt{5}=6\sqrt{5}$이다.

26

정답 | ④ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 쌍곡선의 접선

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면

$$a^2+b^2=16 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고, 이 쌍곡선에 접하는 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{a^2-b^2}$$

이므로

$$\sqrt{a^2-b^2}=2\ \Rightarrow\ a^2-b^2=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다. 따라서 ㉠과 ㉡을 연립하여 $a^2=10,\ b^2=6$을 얻는다.

점 P의 좌표는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$과 직선 $y=x-2$의 교점이므로

$$\frac{x^2}{10}-\frac{(x-2)^2}{6}=1$$
$$\Rightarrow 3x^2-5(x-2)^2=30$$
$$\Rightarrow 3x^2-5x^2+20x-20=30$$
$$\Rightarrow 2x^2-20x+50=0$$
$$\Rightarrow x=5,\ y=3$$

이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

27 정답 | ③ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 공간도형 - 두 평면이 이루는 각

삼각형 BMN의 세 변의 길이는

$$\overline{BM}=\sqrt{\overline{BA}^2+\overline{AM}^2}=2\sqrt{5},$$
$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{ME}^2+\overline{EH}^2+\overline{HN}^2}=2\sqrt{3},$$
$$\overline{BN}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CG}^2+\overline{GN}^2}=2\sqrt{6}$$

을 만족시킨다. 따라서

$$\cos(\angle BMN)=\frac{\overline{BM}^2+\overline{MN}^2-\overline{BN}^2}{2\times\overline{BM}\times\overline{MN}}=\frac{1}{\sqrt{15}},$$
$$\sin(\angle BMN)=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$$

이므로

$$\triangle BMN=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}=2\sqrt{14}$$

이다.

삼각형 BMN의 평면 EMN 위로의 정사영의 넓이를 구하자.
우선, 두 점 M, N의 평면 EMN 위로의 정사영은 M, N이다.
점 B의 평면 EMN 위로의 정사영을 K라 하자.

평면 EMN에 수직인 직선은 평면 ABCD에 평행하거나 평면 ABCD에 포함됨

$\Rightarrow$ 직선 BK도 평면 ABCD에 포함됨

이때, 선분 CD의 중점을 O라 하면,

- 평면 EMN과 평면 ABCD의 교선이 직선 AO
- K는 점 B에서 직선 AO에 내린 수선의 발
- $\overline{AO}\perp\overline{BO}$

$\Rightarrow$ 점 K는 점 O

이다. 따라서 삼각형 BMN의 평면 EMN 위로의 정사영은 삼각형 MNO이다.

$$\overline{MN}=\overline{MO}=2\sqrt{3},\quad \overline{ON}=4$$

이므로 삼각형 MNO의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{ON}\times\sqrt{\overline{MN}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{ON}\right)^2}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

이다. 따라서

$$\cos\theta=\frac{\triangle MNO}{\triangle BMN}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

이다.

다른 풀이 점 B에서 직선 MN에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$$\cos(\angle BMN)=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

이므로 $\overline{MI}=\overline{BM}\times\cos(\angle BMN)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$\overline{MN}=2\sqrt{3}$ 이므로 I는 선분 MN을 $1:2$로 내분하는 점이다.

점 I를 지나고 직선 MN에 수직이고 평면 EMN에 포함되는 직선이 직선 AE와 만나는 점을 K라 하자.

삼각형 EMN의 세 변의 길이는

$$\overline{MN}=2\sqrt{3},\quad \overline{EN}=2\sqrt{2},\quad \overline{ME}=2$$

이므로 $\cos(\angle EMN)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 따라서

$$\overline{MK}=\overline{MI}\times\frac{1}{\cos(\angle EMN)}=2$$

이다. 그런데 $\overline{ME}=2$ 이므로 점 K는 점 E이다.

두 평면 BMN과 EMN이 이루는 각의 크기는
$\angle BIK=\angle BIE$ 또는 $\pi-\angle BIE$ 이다.

삼각형 BIE의 세 변의 길이는

$$\overline{BI}=\overline{BM}\times\sin(\angle BMN)=\frac{2\sqrt{42}}{3},$$
$$\overline{IE}=\overline{ME}\times\sin(\angle EMN)=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$
$$\overline{BE}=4\sqrt{2}$$

이므로

$$\cos(\angle BIE)=\frac{\overline{BI}^2+\overline{EI}^2-\overline{BE}^2}{2\times\overline{BI}\times\overline{EI}}=\frac{\frac{56}{3}+\frac{8}{3}-32}{2\times\frac{2\sqrt{42}}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{7}}$$

이다. 따라서 두 평면 BMN과 EMN이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 이다.

28

정답 | ④ 행동 영역 | 이해
내용 영역 | 타원의 방정식

START 문제 상황 파악하고 풀이 방향 설정하기

⇒ 조건에서 다섯 개의 선분 $\mathrm{F'R}$, GR, FQ, $\mathrm{GF'}$, PQ가 제시되어 있어서 매우 복잡해 보인다. 특히 점 R의 좌표는 구하기가 매우 어려워 보이는데, 이런 경우에는 선분의 길이를 직접 구하는 것을 의도하지는 않았을 것이다.

STEP 1 $\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{GR}}+\overline{\mathrm{FQ}}=3$, $4\overline{\mathrm{GF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=16$ 조건 해석하기

타원 C_2의 장축의 길이를 $2a'$이라 하자. 점 R은 타원 C_1 위의 점이면서도 타원 C_2 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{F'R}}+\overline{\mathrm{FR}}=2a,\quad \overline{\mathrm{GR}}+\overline{\mathrm{FR}}=2a'$$

이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{GR}}=2a-2a'$$

이다. 한편, 점 Q는 타원 C_2 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{GQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=2a'$$

이다. 그런데 타원 C_2는 두 초점의 x좌표가 같으므로 장축이 x축에 수직인데, 두 점 P, Q의 x좌표가 같으므로 $\overline{\mathrm{GQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$이다.
그런데 점 P는 타원 C_1의 꼭짓점 중에서 단축 위에 있는 점이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=a$이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{FQ}}=2a'-\overline{\mathrm{GQ}}=2a'-\overline{\mathrm{FP}}=2a'-a$$

이다. 곧,

$$\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{GR}}+\overline{\mathrm{FQ}}=(2a-2a')+(2a'-a)=a$$

이므로 $a=3$이다.

점 G는 타원 C_1 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{GF}}+\overline{\mathrm{GF'}}=2a=6$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{GF'}}=6-\overline{\mathrm{GF}}$$

이다.

두 점 P와 Q의 y좌표의 합은 두 점 G와 F의 y좌표의 합과 같고, 점 P의 y좌표는 b이므로 점 Q의 y좌표는 $\overline{\mathrm{GF}}-b$이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=b-(\overline{\mathrm{GF}}-b)=2b-\overline{\mathrm{GF}}$$

이다. 따라서

$$4\overline{\mathrm{GF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=24-2b-3\overline{\mathrm{GF}}$$

에서 $b=2$이다.

STEP 2 선분 GF의 길이 구하기

선분 GF의 길이는 점 G의 y좌표와 같다.

타원 C_1의 방정식이 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이고 점 G의 x좌표가 $\sqrt{9-b^2}$이므로 점 G의 y좌표는

$$\frac{9-b^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{9-b^2}{9}$$
$$\Rightarrow y^2=\frac{b^4}{9}$$

에서 $\dfrac{b^2}{3}$이다.

STEP 3 상수 b의 값 구하기

$$4\overline{\mathrm{GF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=24-2b-3\overline{\mathrm{GF}}=16$$

이므로

$$2b+3\overline{\mathrm{GF}}=8$$
$$\Rightarrow b^2+2b=8$$
$$\Rightarrow (b+4)(b-2)=0$$

에서 $b=2$이다. 따라서 $\mathrm{F}(\sqrt{5}, 0)$이다.

STEP 4 정답 구하기

점 P의 좌표가 $(0, 2)$이고 점 G의 좌표가 $\left(\sqrt{5}, \dfrac{4}{3}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{5+\frac{4}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$$

이다. 따라서 타원 C_2의 장축의 길이는

$$2a'=\overline{\mathrm{PG}}+\overline{\mathrm{PF}}=\frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}$$

이다. 그리고 타원 C_2의 두 초점 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{GF}}=\dfrac{4}{3}$이다.
따라서 타원 C_2의 단축의 길이는

$$2b'=\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{240}{9}}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$$

이다.

$$\therefore\ a\times b'=3\times\frac{2\sqrt{15}}{3}=2\sqrt{15}$$

다른 풀이 점 F의 좌표를 $(c, 0)$으로 두고 $4\overline{\mathrm{GF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=16$에서 c에 대한 방정식을 얻고자 했다면

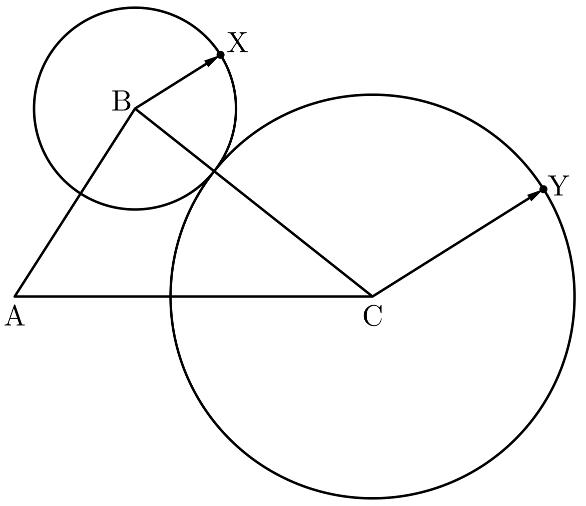
$$\overline{\mathrm{GF}}=3-\frac{c^2}{3},\quad \overline{\mathrm{GF'}}=3+\frac{c^2}{3},\quad \overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{9-c^2}-3+\frac{c^2}{3}$$
$$\Rightarrow 15+c^2-2\sqrt{9-c^2}=16$$
$$\Rightarrow c^2-1=2\sqrt{9-c^2}$$
$$\Rightarrow c^4-2c^2+1=36-4c^2$$
$$\Rightarrow c^4+2c^2-35=0$$
$$\Rightarrow (c^2+7)(c^2-5)=0$$

에서 $c^2=5$를 얻는다.

29 정답 | 119 행동 영역 | 문제 해결
내용 영역 | 평면벡터의 내적

STEP 1 문제 상황의 그림을 그리고 문제 상황 파악하기

$|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{CY}}|=6$, $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CY}}=18$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{CY}}$는 평행하고 같은 방향이다. 곧, $\overrightarrow{\mathrm{CY}}=2\overrightarrow{\mathrm{BX}}$이다.



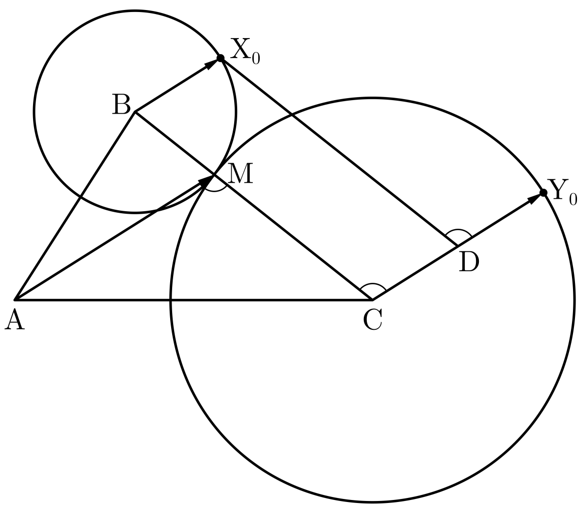
$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AY}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CY}}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AY}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CY}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}}+\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CY}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}}+18\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AY}}$는 $(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}}$가 최대일 때 최댓값을 갖는다. $(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}}$가 최대가 되려면 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}$와 $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 평행할 때이다.

STEP 2 두 점 X_0와 Y_0의 위치를 파악하기

선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 M이라 하자.
그러면 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$은 벡터 $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 평행하므로
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$이 평행하다.



점 X_0를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 CY_0와 만나는 점을 D라 하자. 그러면 $\overrightarrow{\mathrm{BX}_0}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{DY}_0}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{DX}_0}=\overrightarrow{\mathrm{CB}},\quad \angle\mathrm{X}_0\mathrm{DY}_0=\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{AMC}$$

이다.

$$\overline{\mathrm{DX}_0}=9,\quad \overline{\mathrm{DY}_0}=3,\quad \overline{\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0}=6\sqrt{3}$$

이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle\mathrm{X}_0\mathrm{DY}_0)&=\cos(\angle\mathrm{BCD})=\cos(\angle\mathrm{AMC})\\&=\frac{\overline{\mathrm{DX}_0}^2+\overline{\mathrm{DY}_0}^2-\overline{\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0}^2}{2\times\overline{\mathrm{DX}_0}\times\overline{\mathrm{DY}_0}}\\&=\frac{81+9-108}{2\times9\times3}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이다. 선분 AM의 길이를 구하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{11}$, $\overline{\mathrm{BM}}=3$, $\cos(\angle\mathrm{AMB})=\frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2-2\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{BM}}\times\cos(\angle\mathrm{AMB})\\&=\overline{\mathrm{AM}}^2+9-2\overline{\mathrm{AM}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AM}}^2+9-2\overline{\mathrm{AM}}=44$$

에서 $\overline{\mathrm{AM}}=7$이다. 선분 AC의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2&=\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{MC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MC}}\times\cos(\angle\mathrm{AMC})\\&=49+36+2\times7\times6\times\frac{1}{3}=113\end{aligned}$$

에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{113}$ 이다.

STEP 3 정답 구하기

$$\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2\right)\\&=\frac{1}{2}(44+113-81)=38\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}_0}&=3\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}_0}\\&=3\times7\times3=63\end{aligned}$$

이므로 ㉠에 의해

$$\begin{aligned}M&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}_0}+18\\&=38+63+18=119\end{aligned}$$

이다.

30

정답 | 30　　　행동 영역 | 문제 해결

내용 영역 | 삼수선의 정리, 직선과 평면이 이루는 각, 구의 방정식

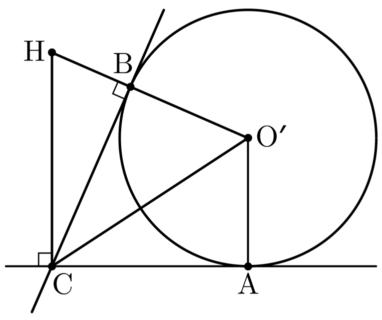
STEP 1 점 P의 평면 ABC 위로의 수선의 발의 위치 파악하기

⇒ 점 P에 대하여 (가)에서 직선 CP와 직선 AC가 수직이라는 정보와 (나)에서 직선 BP와 직선 BC가 수직이라는 정보가 제시되었으므로 삼수선의 정리를 적용할 수 있고, 이를 위해 점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발의 위치를 찾는 것이 필요하다.

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{CP}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PH}} \perp \triangle\mathrm{ABC}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{CH}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$이다.

마찬가지로 $\overline{\mathrm{BP}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{PH}} \perp \triangle\mathrm{ABC}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{BH}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이다.



평면 ABC와 구 S가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r이라 하고, 원의 중심을 O′이라 하자.

$\angle\mathrm{ACB} = \theta$라 하면 $\angle\mathrm{CHB} = \theta$이고 $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{CH}} = 5a$라 하면 $\overline{\mathrm{BH}} = 2a$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{21}\,a$이다.

$\overline{\mathrm{O'H}} = \overline{\mathrm{BH}} + \overline{\mathrm{BO'}} = 2a + r$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CH}} &= \overline{\mathrm{O'A}} + \overline{\mathrm{O'H}} \times \cos(\angle\mathrm{O'HC}) \\ &= r + (2a+r) \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{7}{5}r + \frac{4}{5}a\end{aligned}$$

에서

$$\overline{\mathrm{CH}} = 5a = \frac{7}{5}r + \frac{4}{5}a \Rightarrow r = 3a$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{O'H}} = 2a + r = 5a$이다.

STEP 2 점 $\mathrm{P_1}$의 위치 파악하기

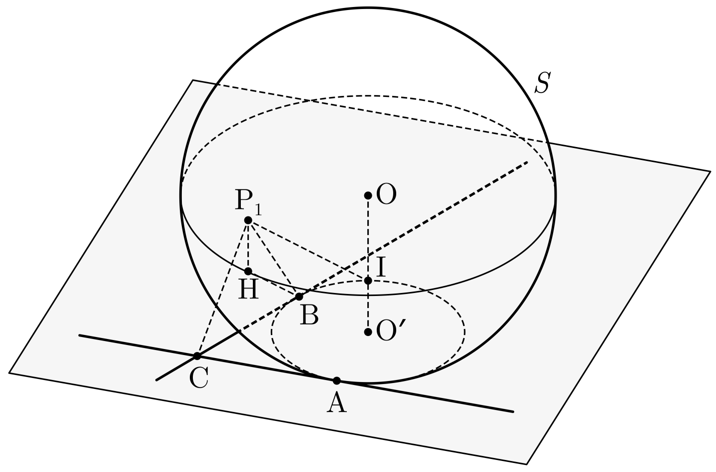
직선 $\mathrm{BP_1}$이 평면 ABC와 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$인데,

평면 ABC와 직선 $\mathrm{BP_1}$의 교점이 점 B이고,

점 $\mathrm{P_1}$의 평면 α 위로의 정사영이 점 H이므로

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{\mathrm{P_1H}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = 1 \Rightarrow \overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{P_1H}}$$

이다. $\overline{\mathrm{BH}} = 2a$이므로 $\overline{\mathrm{P_1H}} = 2a$이다.



점 $\mathrm{P_1}$에서 직선 OO′에 내린 수선의 발을 I라 하자. 그러면

$$\overline{\mathrm{P_1H}} = \overline{\mathrm{IO'}} = 2a,\ \overline{\mathrm{O'H}} = \overline{\mathrm{IP_1}} = 5a$$

이고, $\overline{\mathrm{OO'}} = h$라 하면

$$\overline{\mathrm{OI}} = \overline{\mathrm{OO'}} - \overline{\mathrm{IO'}} = h - 2a$$

이다. 구 S의 반지름의 길이가 $2\sqrt{17}$이므로

$$\overline{\mathrm{OP_1}}^2 = \overline{\mathrm{OI}}^2 + \overline{\mathrm{P_1I}}^2 = (h-2a)^2 + (5a)^2 = 68,$$

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OO'}}^2 + \overline{\mathrm{BO'}}^2 = h^2 + (3a)^2 = 68$$

이다. 곧,

$$h^2 - 4ah + 29a^2 = 68 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$h^2 + 9a^2 = 68 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이고, ㉠에서 ㉡을 빼면 $20a^2 - 4ah = 0$, 곧 $h = 5a$를 얻고 $h = 5a$를 ㉡에 대입하면 $34a^2 = 68$에서 $a = \sqrt{2}$를 얻는다.

따라서 $a = \sqrt{2}$, $h = 5\sqrt{2}$이다.

STEP 3 점 $\mathrm{P_2}$의 위치 파악하고 정답 구하기

직선 $\mathrm{P_1P_2}$는 평면 ABC에 수직이고 직선 OO′도 평면 ABC에 수직이므로 $\overline{\mathrm{P_1P_2}} /\!/ \overline{\mathrm{OO'}}$이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{P_1P_2}} = 2\overline{\mathrm{OI}} = 2(h-2a) = 6\sqrt{2}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP_1P_2}$는 세 변의 길이가

$$\overline{\mathrm{P_1P_2}} = 6\sqrt{2},\quad \overline{\mathrm{OP_1}} = \overline{\mathrm{OP_2}} = 2\sqrt{17}$$

인 이등변삼각형이므로 선분 $\mathrm{P_1P_2}$를 밑변으로 할 때 삼각형 $\mathrm{OP_1P_2}$의 높이는 $\sqrt{(2\sqrt{17})^2 - \left(\dfrac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}$이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{OP_1P_2}$의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{P_1P_2}} \times 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 30$$

이다.