미적분 × 확률과 통계

2027학년도 수능대비 ALL DAY 모의고사

2027

수능 수학 전문가들이 제작한 최강의 CONTENTS

올데이 모의고사

3월호

2027학년도 수능 대비 ALL DAY 모의고사

수학 영역 정답 및 해설

ALL DAY 모의고사

수학 영역 정답표

공통 과목

1	③	2	②	3	③	4	②	5	⑤
6	③	7	②	8	②	9	④	10	①
11	⑤	12	①	13	④	14	④	15	①
16	23	17	24	18	7	19	2	20	15
21	16	22	4						

확률과 통계

23	⑤	24	③	25	④	26	②	27	⑤
28	③	29	14	30	120				

미적분

23	④	24	④	25	③	26	②	27	②
28	⑤	29	45	30	3				

Connect All

CONTENTS 관련 모든 문의 사항

아래 카카오톡 채널로 연락주시면 됩니다.

http://pf.kakao.com/_xlxgxnwn

올티컴퍼니

제작 문항에 대한 저작권은 "**AllT Edu Team**"에 있습니다.
연구소 제작 문항에 대한 무단 판매와 수정, 배포 등을
절대 금합니다.

제작 : Team All Day

김윤재 수원 코스매쓰수학학원
김재하 대구 공감수학학원
박종원 구로 상아탑학원
신지현 서울 대치명인학원
이성희 동탄 엠엔에스학원
이종민 인천 DnS수학학원
정석영 문항 제작진
황성국 부천 헤세드입시학원
황성필 부산 라임라잇수학학원

All Day 검토진

강은택 서강대학교 물리학과
권지우 수학앤마루학원
김관형 원광대학교 약학과
김병주 부산대학교 화공생명공학과
김진영 대치 세정학원
김태린 대치 미래탐구
김효정 안국 뉴파인학원
남경훈 서울대학교 경영학과
박래혁 대치에스학원, 인재의 창
부종민 부산 부종민수학학원
서미란 파이데이아학원
오형석 대구 더프라임수학학원
우교영 서초 수아체학원
이민재 대구과학고등학교 (학생 검토진)
이현중 아주대 약학과
임병국 울산 임티엠수학학원
임서진 서울대학교 자유전공학부
임재희 고려대학교
정세현 OO대학교 약학대학
정재경 JM 영재교육 (대구가톨릭대학교 약학부)
최세훈 성균관대학교 수학과
최종필 목동 필연수학학원

*검토진 명단은 작성해주신 내용을 바탕으로 수록했습니다.

[ALL DAY 모의고사 해설]

1. 정답 ③

$$3^{\sqrt{3}-2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2\sqrt{3}-2}=3^{\sqrt{3}-2}\times\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{2\sqrt{3}-2}$$
$$=3^{\sqrt{3}-2}\times3^{1-\sqrt{3}}$$
$$=3^{\sqrt{3}-2+1-\sqrt{3}}$$
$$=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

2. 정답 ②

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)$$
$$=-f'(2)$$

$f'(x)=3x^2+3$이므로 $-f'(2)=-15$

3. 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{5}(5-3a_k)=\sum_{k=1}^{5}5-3\sum_{k=1}^{5}a_k$$
$$=5\times5-3\sum_{k=1}^{5}a_k$$
$$=25-3\sum_{k=1}^{5}a_k=-2$$

따라서 $3\sum_{k=1}^{5}a_k=27$이므로 $\sum_{k=1}^{5}a_k=9$

4. 정답 ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\therefore\ \lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(2x^2-3x+6)$$
$$=2\times2^2-3\times2+6=8$$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(ax+4)=2a+4$

$f(2)=2a+4$

이므로 $8=2a+4$, 즉 $a=2$

5. 정답 ⑤

$f(x)=(x^2-3)(x+4)$에서

$$f'(x)=2x\times(x+4)+(x^2-3)\times1$$
$$=2x^2+8x+x^2-3$$
$$=3x^2+8x-3$$

$\therefore\ f'(3)=3\times3^2+8\times3-3=48$

6. 정답 ③

두 점 $\left(2,\ 2^{\log_4 9}\right)$, $\left(6,\ \dfrac{4}{\log_8 4}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\dfrac{4}{\log_8 4}-2^{\log_4 9}}{6-2}=\frac{4\log_4 8-9^{\log_4 2}}{4}$$
$$=\frac{4\times\dfrac{3}{2}-9^{\frac{1}{2}}}{4}$$
$$=\frac{6-3}{4}=\frac{3}{4}$$

7. 정답 ②

두 곡선 $y=x^4-2x^2$, $y=x^2+1$은 $-1\le x\le1$에서 $x^4-2x^2<x^2+1$이고 두 곡선 모두 y축에 대칭이다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^1\{(x^2+1)-(x^4-2x^2)\}dx$$
$$=2\int_0^1(-x^4+3x^2+1)dx$$
$$=2\times\left[-\frac{1}{5}x^5+x^3+x\right]_0^1=\frac{18}{5}$$

8. 정답 ②

$$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta+1}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta+1}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta(\cos\theta+1)}=-\frac{9}{2}$$

이므로 $\cos^2\theta+\cos\theta=-\dfrac{2}{9}$, $\cos^2\theta+\cos\theta+\dfrac{2}{9}=0$,

$$\left(\cos\theta+\frac{1}{3}\right)\left(\cos\theta+\frac{2}{3}\right)=0$$

$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$

이때 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $1-\cos^2\theta>\dfrac{2}{3}$, $\cos^2\theta<\dfrac{1}{3}$

이므로 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\cos\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{1}{3}\ \left(\because\ -\dfrac{2}{3}<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<-\dfrac{1}{3}\right)$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}=-2\sqrt{2}$$

9. 정답 ④

함수 $f(x)=x^3-ax+6$의 도함수를 구하면

$f'(x)=3x^2-a$

이므로 $f'(3)=27-a=3$, 즉 $a=24$

또한, 함수 $g(x)=bx^2+2x$의 도함수를 구하면

$g'(x)=2bx+2$

이므로 $g'(1)=2b+2$

이때 점 P를 지나는 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이므로

$2b+2=-\dfrac{1}{3}$, 즉 $b=-\dfrac{7}{6}$

$\therefore\ a\times b=24\times\left(-\dfrac{7}{6}\right)=-28$

10. 정답 ①

두 함수 $y=2^{2x}$, $y=2^{-2x}+k$ (k는 자연수)의 그래프가 자연수 n에 대하여 직선 $y=n\ (n>k+2)$과 만나는 두 점을 각각 A, B에 대하여

$2^{2x}=n$, $x=\log_4 n$

$2^{-2x}+k=n$, $x=-\log_4(n-k)$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(\log_4 n,\ n)$, $\mathrm{B}(-\log_4(n-k),\ n)$

이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 n-(-\log_4(n-k))$
$=\log_4 n+\log_4(n-k)$
$=\log_4 n(n-k)$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5}{2}$이므로 $\log_4 n(n-k)=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ n(n-k)=2^5$

이때 두 자연수 n과 k는 2의 거듭제곱이고,

$n>k+2\ (n-k>2)$이므로 $n=2^3$, $n-k=2^2$

$\therefore\ n=8$, $k=4$

한편, 점 C는 두 함수 $y=2^{2x}$, $y=2^{-2x}+4$의 그래프의 교점이므로

$2^{2x}=2^{-2x}+4$, $(4^x)^2-4\times 4^x-1=0$

이때 점 C의 y좌표인 $4^x=t\ (t>0)$라 하면 근의 공식에 의해 $t=2+\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times$(두 점 A와 C의 y좌표의 차)

$=\dfrac{5}{4}\{8-(2+\sqrt{5})\}$

$=\dfrac{30-5\sqrt{5}}{4}$

11. 정답 ⑤

ㄱ. 우선, 점 P의 속도 $v(t)$가

$v(t)=(t+1)(t-1)(t-2)$

t	$t<1$	$t=1$	$1<t<2$	$t=2$	$t>2$
$v(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

따라서 $t=1$에서 점 P는 처음으로 운동방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(2)=0+\displaystyle\int_0^2(t^3-2t^2-t+2)dt$ ($\because\ x(0)=0$)

$=\left[\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2=\dfrac{2}{3}$ (참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=3t^2-4t-1$

이때 가속도가 3이므로

$3t^2-4t-1=3$, $3t^2-4t-4=0$, $(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2$ ($\because\ t>0$)

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2|t^3-2t^2-t+2|dt$

$=\displaystyle\int_0^1(t^3-2t^2-t+2)dt-\int_1^2(t^3-2t^2-t+2)dt$

$=\left[\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t\right]_0^1-\left[\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t\right]_1^2$

$=\dfrac{3}{2}$ (참)

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. 정답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$(a_7-a_5)(a_1+a_2+a_3)=(a_4-a_1)(2a_8+2a_7)$에서

$(a_1r^6-a_1r^4)(a_1+a_1r+a_1r^2)=2(a_1r^3-a_1)(a_1r^7+a_1r^6)$,

$a_1r^4(r^2-1)\times a_1(1+r+r^2)=2a_1(r^3-1)\times a_1r^6(r+1)$,

${a_1}^2r^4(r^2-1)(1+r+r^2)=2{a_1}^2r^6(r^3-1)(r+1)$,

$(r+1)(r-1)(1+r+r^2)=2r^2(r-1)(r^2+r+1)(r+1)$

이때 $|r|\neq 1$, 즉 $r\neq 1$, $r\neq -1$이므로 $2r^2=1$

$\therefore\ r^2=\dfrac{1}{2}$

또한, $a_5+a_7+a_9=7$에서

$a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8=7$, $a_1(r^2)^2+a_1(r^2)^3+a_1(r^2)^4=7$,

$\dfrac{a_1}{4}+\dfrac{a_1}{8}+\dfrac{a_1}{16}=7$, $\dfrac{4a_1+2a_1+a_1}{16}=7$, $\dfrac{7a_1}{16}=7$

$\therefore\ a_1=16$

$\therefore\ a_7=a_1r^6$
$=16\times(r^2)^3$
$=16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
$=16\times\dfrac{1}{8}=2$

13. 정답 ④

우선, $f'(x)=3x^2+2$이므로

$g'(x)=f'(x-2)$
$=3(x-2)^2+2\geq 2$

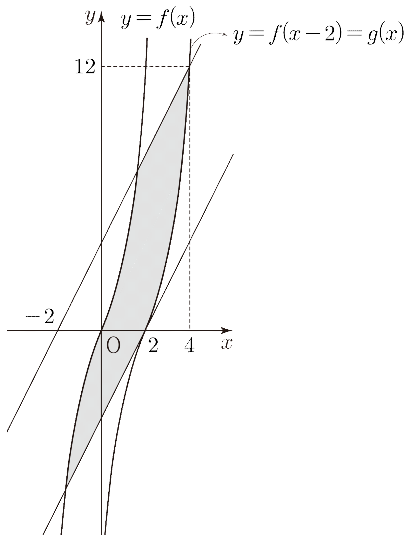
$\therefore\ a=2$

또한, 직선 $y=ax+2a=2x+4$와 함수 $y=f(x-2)$의 그래프의 교점을 구하면

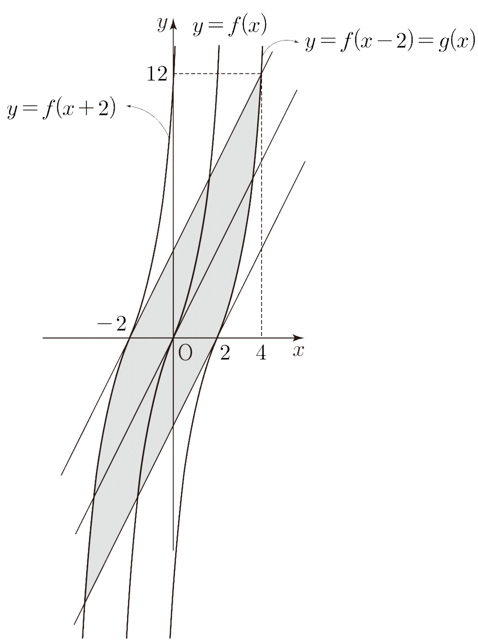
$f(x-2)=2x+4$, $(x-2)^3+2(x-2)=2x+4$,

$x^3-6x^2+12x-16=0$,

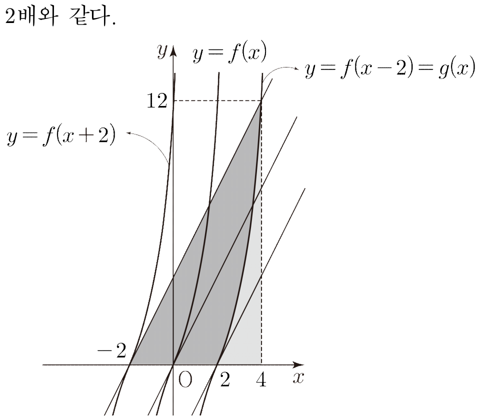
$(x-4)(x^2-2x+4)=0$, 즉 $(4,\ 12)$



두 직선 $y=2x+4$, $y=2x-4$와 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$로 둘러싸인 부분은 위 그림과 같다.



이때 두 직선 $y=2x+4$, $y=2x-4$와 두 함수 $y=f(x+2)$, $y=f(x-2)$의 그래프로 둘러싸인 부분 구하고자 하는 부분의 넓이의 2배와 같다.



(구하고자 하는 부분의 넓이)

$=\int_{-2}^{4}(2x+4)dx-\int_{2}^{4}f(x-2)dx$

$=\int_{-2}^{4}(2x+4)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{4}(2x+4)dx-\int_{0}^{2}(x^3+2x)dx$

$=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{4}-\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{2}$

$=36-8=28$

14. 정답 ④

$\angle \mathrm{ACB}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$에 의해 $\cos\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$이므로 삼각형 ABC에 대하여 코사인 법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=4$

한편, $\angle \mathrm{CAB}=\theta'$이라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}$이므로 원주각의 성질에 의해 $\angle \mathrm{CAB}=\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{BDC}=\angle \mathrm{BCD}=\theta'$이고,

삼각형 ABC에 대하여 코사인 법칙에 의해

$\cos\theta'=\frac{7}{8}$ …… ㉠

이때 세 삼각형 ABC, CEB, ADE가 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{EB}}=2:1$, 즉 $\overline{\mathrm{EB}}=1$

삼각형 BED의 외접원의 반지름을 R라 하면 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\sin(\angle \mathrm{EDB})}=2R$

이므로 $R=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{\sin\theta'}=\frac{1}{2\sin\theta'}$

이때 ㉠에 의해 $\sin\theta'=\sqrt{1-\cos^2\theta'}=\frac{\sqrt{15}}{8}$이므로

$R=\frac{4\sqrt{15}}{15}$

따라서 삼각형 BED의 외접원의 넓이는

$\left(\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)^2\pi=\frac{16}{15}\pi$

15. 정답 ①

우선, 정적분으로 정의된 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$g(x)=x^2\int_{a}^{x}f(t)dt-\int_{a}^{x}t^2f(t)dt$

이고, 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2x\int_{a}^{x}f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

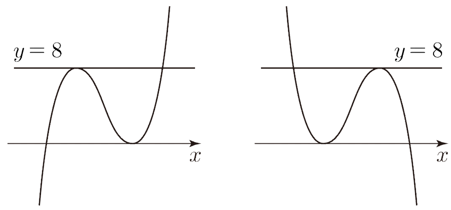
$\quad=2x\int_{a}^{x}f(t)dt$

한편, 일차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $m\ (m\neq0)$이라 하면 $f(0)=-6$이므로 $f(x)=mx-6$

함수 $g(x)-kx$가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는 방정식 $g'(x)-k=0$을 만족시키는 실근에 대하여 함수 $g'(x)-k$의 부호가 바뀌는 지점이 오직 하나만 존재하므로 함수 $g'(x)$는 삼차함수이다.

이때 주어진 조건에 의해 삼차함수 $g'(x)$의 극댓값은 8이고

극솟값은 0이다.



$m>0$ $\qquad$ $m<0$

도함수 $g'(x)$의 식을 정리하면

$$g'(x)=2x\int_a^x f(t)dt$$
$$=2x\int_a^x (mt-6)dt$$
$$=mx(x-a)\left(x+a-\frac{12}{m}\right)$$

이므로 x에 대한 방정식 $g'(x)=0$의 실근은

$x=0$, $x=a$, $x=\frac{12}{m}-a$

이때 함수 $g'(x)$가 극솟값 0을 갖기 위해서는 방정식 $g'(x)=0$이 중근을 가져야 한다.

또한, 함수 $g'(x)$는 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $x=0$이 중근인 경우

$\frac{12}{m}-a=0$이므로 $ma=12$

$\therefore\ g'(x)=mx^2(x-a)$

① $m>0$이면 $x=0$에서 극댓값 0을 가지므로 조건과 모순이다.

② $m<0$이면 $x=\frac{2}{3}a$에서 극댓값을 가지므로

$$g'\left(\frac{2}{3}a\right)=m\left(\frac{4}{9}a^2\right)\times\left(-\frac{1}{3}a\right)$$
$$=-\frac{4}{27}ma^3$$
$$=-\frac{16}{9}a^2\ (\because\ ma=12)$$

이때 $-\frac{16}{9}a^2=8$을 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 불가능

(ⅱ) $x=a$가 중근인 경우

$\frac{12}{m}-a=a$이므로 $ma=6$

$\therefore\ g'(x)=mx(x-a)^2$

이때 함수 $g'(x)$기 극댓값 8과 극솟값 0을 갖기 위해서는 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 가져야 하므로

$$g'\left(\frac{a}{3}\right)=m\left(\frac{a}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}a\right)^2$$
$$=\frac{4}{27}ma^3$$
$$=\frac{8}{9}a^2\ (\because\ ma=6)$$

$\frac{8}{9}a^2=8$에서 $a^2=9$이므로 $a=3$ 또는 $a=-3$이다.

한편, 주어진 조건에서 $g(0)>0$이고

$$g(0)=-\int_a^0 t^2f(t)dt$$
$$=\int_0^a t^2(mt-6)dt$$
$$=\left[\frac{m}{4}t^4-2t^3\right]_0^a=\frac{m}{4}a^4-2a^3$$

이때 $ma=6$이므로 $g(0)=\frac{6}{4}a^3-2a^3=-\frac{1}{2}a^3$이다.

조건에 의해 $-\frac{1}{2}a^3>0$이 되어야 하므로 $a<0$이다.

따라서 $a=-3$이고,

$\therefore m=-2$

따라서 $f(x)=-2x-6$이므로

$f(5)=-2\times5-6=-16$

16. 정답 23

$n=1$일 때, $a_2=a_1+3$이므로 $a_2=5$

$n=2$일 때, $a_3=4a_2+3$이므로 $a_3=23$

$\therefore\ a_3=23$

17. 정답 24

$F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int(5x^4-3x^2-1)dx$$
$$=x^5-x^3-x+C\text{(단, }C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(1)=F(1)$에서

$f(1)=5-3-1=1$, $F(1)=1-1-1+C=C-1$

$1=C-1$

$\therefore\ C=2$

따라서 $F(x)=x^5-x^3-x+2$이므로

$F(2)=2^5-2^3-2+2=24$

18. 정답 7

주어진 부등식을 정리하면

$\sin x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0\le x\le2\pi$에서 방정식 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 실근이 $x=\frac{5\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7\pi}{4}$이므로 $\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{7\pi}{4}$

$\therefore\ \alpha=\frac{5\pi}{4}$, $\beta=\frac{7\pi}{4}$

$\therefore\ \dfrac{5\beta}{\alpha}=5\times\dfrac{\frac{7\pi}{4}}{\frac{5\pi}{4}}=7$

19. 정답 2

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 7, $x=\pm2$에서 극솟값 -9를 갖는다.

따라서 $M-m=16$이 되도록 하는 k의 최솟값은 2이다.

20. 정답 15

공차의 합이 0이므로 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 수열 $\{b_n\}$의 공차를 $-d$라 하자.

$$\begin{aligned}a_n+b_{2n+1}&=a_1+(n-1)d+b_1-2nd\\&=a_1+nd-d+b_1-2nd\\&=a_1+b_1-(n+1)d\end{aligned}$$

이므로 $-nd+a_1+b_1-d=-2n$

따라서 $d=2$이고 $a_1+b_1-d=0$

$\therefore\ a_1+b_1=2$ …… ㉠

이때

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{8}\{a_1+(k-1)d-b_1+(k-1)d\}\\&=\sum_{k=1}^{8}\{a_1-b_1+4(k-1)\}\\&=\sum_{k=1}^{8}\{a_1-b_1-4+4k\}\\&=8(a_1-b_1-4)+4\times\frac{8\times9}{2}\\&=8a_1-8b_1+112\end{aligned}$$

이므로 $8a_1-8b_1+112=16$

$\therefore\ a_1-b_1=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a_1=-5$, $b_1=7$

$\therefore\ a_5\times b_2=(a_1+8)(b_1-8)=(-5+8)(7-2)=15$

21. 정답 16

우선, $f(t)\neq0$일 때,

$$\begin{aligned}g(t)&=\lim_{x\to t+}\frac{f(x)+|x-t|}{f(x)-|x-t|}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to t+}f(t)+\lim\limits_{x\to t+}|x-t|}{\lim\limits_{x\to t+}f(t)-\lim\limits_{x\to t+}|x-t|}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to t+}f(t)}{\lim\limits_{x\to t+}f(t)}=1\end{aligned}$$

이때 $g(t)\neq1$인 실수 t가 오직 α, β 뿐이므로 방정식 $f(t)=0$의 실근이 오직 α, β 뿐이다.

$\therefore\ f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ 또는 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ …… ㉠

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)+|x-\alpha|}{f(x)-|x-\alpha|}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to\alpha+}\frac{f(x)}{x-\alpha}+\lim\limits_{x\to\alpha+}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}}{\lim\limits_{x\to\alpha+}\frac{f(x)}{x-\alpha}-\lim\limits_{x\to\alpha+}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}}\\&=\frac{f'(\alpha)+1}{f'(\alpha)-1}\end{aligned}$$

㉠에 의해 $f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\alpha)=(\alpha-\beta)^2$

이때 조건 (나)에서 $g(\alpha)<0$이므로

$f'(\alpha)=0$이고 $g(\alpha)=-1$

즉, 함수 $g(t)$의 치역은 $\{-1,1,g(\beta)\}$이고,

치역의 모든 원소의 합이 $\frac{5}{4}$이므로 $g(\beta)=\frac{5}{4}$

$\therefore\ g(\beta)=\dfrac{f'(\beta)+1}{f'(\beta)-1}=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ f'(\beta)=9$

이때 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2$이므로

$(\beta-\alpha)^2=9$이고, $f'(2)=2(2-\alpha)(2-\beta)+(2-\alpha)^2=0$

$\therefore\ \alpha=0$, $\beta=3$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)$이므로 $f(4)=16$

22. 정답 4

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$, 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,b)$라 하면,

$\alpha<a$이고 밑이 $\frac{1}{4}$인 로그함수 $f(x)$는 감소함수이므로

$\beta>b$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=a-\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}=\beta-b$

한편, $\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{AH}}=\frac{3}{2}$이므로 직각삼각형 PAH에서 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2=\frac{5}{4}$

이므로

$(a-\alpha)+(\beta-b)=\frac{3}{2}$, $(a-\alpha)^2+(\beta-b)^2=\frac{5}{4}$

이를 연립하여 풀면

$a-\alpha=1$, $\beta-b=\frac{1}{2}$ 또는 $a-\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta-b=1$

(i) $a-\alpha=1$, $\beta-b=\frac{1}{2}$인 경우

$f(\alpha)-f(\alpha+1)=\frac{1}{2}$

이므로

$$\left(\log_{\frac{1}{4}}\alpha+k\right)-\left(\log_{\frac{1}{4}}(\alpha+1)+k\right)$$

$$=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$$

$=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{\alpha}{\alpha+1}=\frac{1}{2}$, 즉 $\alpha=1$

이때 $a=\alpha+1=2$이므로 A의 x좌표가 1보다 크다는 조건을 만족시킨다.

따라서 $\beta=f(1)=k$이므로 $\mathrm{P}(1, k)$이고, $g(1)=k$도 성립한다.

(ii) $a-\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta-b=1$인 경우

$f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=1$

이므로

$\left(\log_{\frac{1}{4}}\alpha+k\right)-\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+k\right)$

$=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\frac{1}{2}}\right)$

$=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)=1$

$\therefore\ \frac{\alpha}{\alpha+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$, 즉 $\alpha=\frac{1}{6}$

이때 $a=\alpha+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$이므로 A의 x좌표가 1보다 크다는 조건에 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $\mathrm{P}(1, k)$이므로 점 A의 좌표는

$\mathrm{A}\left(2, k-\frac{1}{2}\right)$

한편, 점 P를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x-1+k$ …… ㉠

점 $\mathrm{P}(1, k)$가 선분 AB'을 $2:1$로 내분하므로 점 $\mathrm{B}'(x', y')$이라 하면

$\frac{2x'+2}{3}=1$, 즉 $x'=\frac{1}{2}$

$\frac{2y'+k-\frac{1}{2}}{3}=k$, 즉 $y'=k+\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{B}'\left(\frac{1}{2}, k+\frac{1}{4}\right)$

점 B'은 점 B를 직선 ㉠에 대하여 대칭이동시킨 점이므로

$\mathrm{B}\left(k+\frac{1}{4}-(k-1), \frac{1}{2}+(k-1)\right)=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4}, k-\frac{1}{2}\right)$

이때 점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위에 있으므로

$k-\frac{1}{2}=\frac{k}{2}\times4^{1-\frac{5}{4}}+\frac{k}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}k+\frac{1}{2}k$

$\therefore\ k=\frac{2}{2-\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$

따라서 $p=2$, $q=2$이므로

$p+q=2+2=4$

[ALL DAY 확률과 통계 해설]

23. 정답 ⑤

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5$

$={}_7\mathrm{C}_5=21$

24. 정답 ③

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A지점에서 P지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

P지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!\times1!}=3$

따라서 A지점에서 P지점을 거쳐 B지점으로 가는 경우의 수는

$6\times3=18$

25. 정답 ④

우선, 주사위 1개를 3번 던졌을 때 나오는 전체 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

이때 홀수가 한 번도 나오지 않는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이므로 홀수가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는

$216-27=189$

26. 정답 ②

이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수가 되기 위해서는 홀수끼리 서로 이웃하지 않아야 한다.

홀수가 적혀 있는 3장의 카드가 이웃하지 않게 배열하려면 짝수가 적혀 있는 3장의 카드를 먼저 나열하고, 이 3장의 카드의 사이와 양 끝에 홀수가 적혀 있는 카드를 1장씩 배열하면 된다.

짝수 2, 2, 4가 적혀 있는 세 장의 카드를 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

홀수 3, 3, 5가 적혀 있는 세 장의 카드를 짝수가 적혀 있는 카드의 사이와 양 끝인 총 4개의 자리에 배치하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3\times\frac{3!}{2!}=12$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$3\times12=36$

27. 정답 ⑤

선택된 1학년, 2학년, 3학년 학생의 수를 각각 a, b, c라 하면

6명을 뽑아야 하므로
$a+b+c=6$ $(a \geq 1,\ b \geq 1,\ c \geq 1)$
이때 조건 (가)에 의해 $a=b$이므로 a의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) $a=1$인 경우
$b=1$이고 $c=4$
3학년 학생은 2명이므로 모순이다.
(ⅱ) $a=2$인 경우
$b=2$이고 $c=2$
$\therefore\ a=2,\ b=2,\ c=2$
이때 각 학년에서 2명씩 학생을 뽑는 경우의 수는
${}_3C_2 \times {}_3C_2 \times {}_2C_2 = 3 \times 3 \times 1 = 9$ …… ㉠
한편, 뽑힌 6명의 학생을 원형 탁자에 일정한 간격으로 앉히는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.
조건 (나)에서 1학년 학생끼리 이웃하지 않고 마주보지도 않으므로, 1학년 학생들 사이에는 반드시 1명의 학생만 앉아야 한다.
원형 탁자의 6개의 자리에 시계 방향으로 1부터 6까지 번호로 나타내면 1학년 학생 2명 중 1명의 자리를 1번으로 고정한다.
이때 다른 1학년 학생이 앉을 수 있는 자리는 3번 또는 5번이므로 가능한 경우의 수는 2이다.
1학년 학생이 1번과 3번 자리에 앉았다고 하면,
남은 빈자리는 2번, 4번, 5번, 6번이다.
2학년 학생 2명 또한 서로 이웃하지 않고 마주보지 않아야 하므로 남은 자리 중 2학년 학생이 앉을 수 있는 두 자리의 조합은
$\{2,4\},\ \{4,6\},\ \{6,2\}$
으로 3가지이다.
이 각각의 경우에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이고,
남은 2개의 자리에 3학년 학생 2명을 앉히는 경우의 수는 $2!$이므로 조건 (나)를 만족시키도록 원형 탁자에 앉히는 경우의 수는
$2 \times 3 \times 2! \times 2! = 24$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의해 구하는 경우의 수는
$9 \times 24 = 216$

28. 정답 ③

우선, 조건 (가)에 의해 $f(f(1))=2,\ f(f(2))=4$이므로
$f(1) \neq 1,\ f(1) \neq 2,\ f(2) \neq 2$
(ⅰ) $f(f(1))=f(3)=2$인 경우
① $f(2)=1$일 때, $f(1)=3$을 만족하지 않는다.
② $f(2)=3$일 때, $f(3)=2$을 만족하지 않는다.
③ $f(2)=4$일 때, 조건 (나)를 만족하지 않는다.
④ $f(2)=5$일 때, 조건 (나)를 만족하지 않는다.
①~④에 의해 조건을 만족하는 경우는 없다.
(ⅱ) $f(f(1))=f(4)=2$인 경우
① $f(2)=1$일 때, $f(5)$와 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 8가지다.
② $f(2)=3$일 때, $f(3)=4$이고 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2가지다.
③ $f(2)=4$일 때, $f(4)=2$를 만족하지 않는다.
④ $f(2)=5$일 때, 조건 (나)를 만족하지 않는다.
(ⅲ) $f(f(1))=f(5)=2$인 경우
① $f(2)=1$일 때, $f(1)=5$를 만족하지 않는다.
② $f(2)=3$일 때, $f(3)=4$이고 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 3가지다.
③ $f(2)=4$일 때, $f(4)=4$이고 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 2가지다.
④ $f(2)=5$일 때, $f(5)=2$를 만족하지 않는다.
따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 구하고자 하는 함수의 개수는
$8+2+3+2=15$

29. 정답 14

우선, 주어진 조건에 의해 $c,\ d$는 a의 배수이므로
$c=am,\ d=an$ ($m,\ n$은 자연수이다.)
라 하자.
이를 주어진 방정식에 대입하면
$b+a(1+m+n)=12$
이때 $3 \leq 1+m+n$이므로 a의 값은 3 이하의 자연수이다.
a의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) $a=1$인 경우
$a \times b$는 3의 배수를 만족하는 b의 값은 3 또는 6 또는 9이다.
① $b=3$일 때, $m+n=8$이므로 가능한 순서쌍 (m,n)의 개수는 ${}_2H_6=7$
② $b=6$일 때, $m+n=5$이므로 가능한 순서쌍 (m,n)의 개수는 ${}_2H_3=4$이다.
③ $b=9$일 때, $m+n=2$이므로 가능한 순서쌍 (m,n)의 개수는 1이다.
(ⅱ) $a=2$인 경우
$a \times b$는 3의 배수를 만족하는 b의 값은 6이므로 $m+n=2$ 가능한 순서쌍 (m,n)의 개수는 1이다.
(ⅲ) $a=3$인 경우
$a \times b$는 3의 배수를 만족하는 b의 값은 3이므로 $m+n=2$ 가능한 순서쌍 (m,n)의 개수는 1이다.
따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 가능한 모든 순서쌍의 개수는
$(7+4+1)+1+1=12+1+1=14$

30. 정답 120

우선, 집합 $Y=\{-4,\ -2,0,2,4\}$
조건 (가)에서
$\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\} \leq 0,\ \{f(a)\}^2-\{f(b)\}^2 \leq 0$
$\{f(a)\}^2 \leq \{f(b)\}^2,\ |f(a)| \leq |f(b)|$
이므로 $|f(1)| \leq |f(2)| \leq |f(3)| \leq |f(4)|$
0을 기준으로 경우를 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) $0<|f(1)| \leq |f(2)| \leq |f(3)| \leq |f(4)|$인 경우
2 또는 4를 중복을 허락하여 4개에 나누는 경우는 ${}_2H_4$
이때 절댓값에 의해 f는 ± 2 또는 ± 4를 가지므로 2^4

$\therefore\ {}_2H_4 \times 2^4 = {}_5C_4 \times 16 = 80$

(ii) $0 = |f(1)| < |f(2)| \le |f(3)| \le |f(4)|$인 경우

2 또는 4를 중복을 허락하여 3개에 나누는 경우는 ${}_2H_3$

이때 절댓값에 의해 f는 ± 2 또는 ± 4를 가지므로 2^3

$\therefore\ {}_2H_3 \times 2^3 = {}_4C_3 \times 8 = 32$

(iii) $0 = |f(1)| = |f(2)| < |f(3)| \le |f(4)|$인 경우

2 또는 4를 중복을 허락하여 2개에 나누는 경우는 ${}_2H_2$

이때 절댓값에 의해 f는 ± 2 또는 ± 4를 가지므로 2^2

$\therefore\ {}_2H_2 \times 2^2 = {}_3C_2 \times 4 = 12$

(iv) $0 = |f(1)| = |f(2)| = |f(3)| < |f(4)|$인 경우

$|f(4)|$의 값은 2 또는 4이므로 경우의 수는 ${}_2H_1 \times 2^1$

$\therefore\ {}_2H_1 \times 2^1 = {}_2C_1 \times 2 = 4$

(v) $0 = |f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(4)|$인 경우는 모두 0인 경우뿐이므로 1가지

(i)~(v)에 의해 $80 + 32 + 12 + 4 + 1 = 129$

한편, 조건 (나)를 부정하면 집합 X의 $c + 2 = d$인 모든 두 원소 c, d에 대하여 $f(c) + f(d) = 0$이므로 조건 (가)를 만족하면서 조건 (나)의 부정을 만족하는 함수 f를 구하자.

조건 (나)의 부정을 만족하므로

$f(1) + f(3) = 0$, $f(2) + f(4) = 0$

을 모두 만족해야한다.

(ㄱ) $f(1) = 0$인 경우

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$이므로 1가지

(ㄴ) $f(1) = \pm 2$ 또는 ± 4인 경우

$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(4)|$, $f(1) = -f(3)$, $f(2) = -f(4)$이므로

$|f(1)| = |f(2)| = 2$일 때, $2 \times 2 = 4$가지이고,

$|f(1)| = |f(2)| = 4$일 때, $2 \times 2 = 4$가지

가능한 경우의 수는 8가지

따라서 (ㄱ), (ㄴ)에 의해 9가지이다.

따라서 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 $129 - 9 = 120$

[ALL DAY 미적분 해설]

23. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-2n^2}{(2-n)(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-2n^2}{-2n^2+5n-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

24. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3}{5+a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{a_n}}{\frac{5}{3}\times\frac{3}{a_n}+1} = 4$$

25. 정답 ③

우선, 주어진 수열이 수렴하기 위해서는 $n = 1$일 때,

$(x-3)\left(\frac{3x-2}{4}\right) = 0$, 즉 $x = 3$ ($\because$ x는 정수)

또한, $-1 < \frac{3x-2}{4} \le 1$이어야 하므로

$-4 < 3x - 2 \le 4$, 즉 $-\frac{2}{3} < x \le 2$

$\therefore$ $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서 가능한 모든 정수 x는 0, 1, 2, 3으로 정수 x의 값의 개수는 4이다.

26. 정답 ②

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-5) < S_n < \sum_{k=1}^{n}(3k^2+1)$,

즉 $\sum_{k=1}^{2n}(3k^2-5) < S_{2n} < \sum_{k=1}^{2n}(3k^2+1)$

$$\therefore\ 3\times\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 10n < S_{2n} < 3\times\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + 2n$$

$\therefore$ $n(2n+1)(4n+1) - 10n < S_{2n} < n(2n+1)(4n+1) + 2n$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)(4n+1)-10n}{n^3} = 8,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)(4n+1)+2n}{n^3} = 8$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{n^3+2} = 8$

27. 정답 ②

각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{BD} : \overline{AD} = n : 4$

이때 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AB} = \sqrt{n^2-16}$이므로

$\overline{AD} = \frac{4\sqrt{n^2-16}}{n+4}$

삼각형 ACD에서 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4\sqrt{n^2-16}}{n+4}\right)^2}$$

이므로

$$a_n = \sqrt{16 + \left(\frac{4\sqrt{n^2-16}}{n+4}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{16n^2-256}{n^2+8n+16}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{16+\frac{16n^2-256}{n^2+8n+16}} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

28. 정답 ⑤

양수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+9x}{x^n+1}$

라 하자.

$x>1$일 때 $f(x)=x^2$, $x=1$일 때 $f(1)=5$, $0<x<1$일 때 $f(x)=9x$

이므로 주어진 조건에 의해 모든 자연수 k에 대하여

$b_k=f(a_k)$

수열 $\{a_n\}$의 항 중 자연수인 항이 존재할 때, 그 항을 a_k라 하자.

$a_k\geq 2$이면 $f(a_k)=(a_k)^2\geq 4$이므로 $b_k\geq 4$

이때 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$이므로 $b_{k-1}=4b_k\geq 16>9$

이를 만족시키는 a_{k-1}은 $x>1$에서만 존재하므로

$$\begin{aligned}f(a_{k-1})&=(a_{k-1})^2\\&=b_{k-1}\\&=4(a_k)^2\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{k-1}=2a_k$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 자연수인 항의 개수를 m이라 하고, 가장 작은 자연수 항을 a_m 이라 하면

자연수인 모든 항의 합은

$$a_m(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+1)=a_m(2^m-1)=14$$

이다.

이때 a_m과 2^m-1은 모두 자연수이므로 2^m-1은 14의 약수이다.

또한, 2^m-1은 항상 홀수이므로 14의 약수 중 홀수인 것은 1 또는 7 뿐이다.

(i) $2^m-1=1$인 경우

$m=1$이고 $a_1=14$

이때 $b_1=f(14)=196$이므로 $b_2=49$

$b_2>1$이므로 $f(a_2)=(a_2)^2=49$에서 $a_2=7$

a_2는 자연수이므로 자연수인 모든 항의 합이 14인 것에 모순이다.

(ii) $2^m-1=7$인 경우

$m=3$이고 $a_3=2$

수열 $\{a_n\}$의 자연수인 항은 $a_1=8$, $a_2=4$, $a_3=2$이고, 그 합은 14로 조건을 만족시킨다.

또한, $b_3=f(2)=4$이므로 $b_4=1$

$f(a_4)=1$이고 $f(1)=5$이므로 $a_4<1$

$9a_4=1$, 즉 $a_4=\frac{1}{9}$이므로 자연수가 아니다.

$\therefore\ a_1=8$, $b_1=f(8)=64$

따라서 수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{1}{4}$ 이므로

$b_5=64\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{4}$

이고, $b_5<1$이므로 $f(a_5)=9a_5=\frac{1}{4}$에서 $a_5=\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a_1}{a_5}&=\frac{8}{\frac{1}{36}}\\&=8\times 36=288\end{aligned}$$

29. 정답 45

함수 $f(x)=\frac{1}{n}x^2$에 대하여 도함수는 $f'(x)=\frac{2}{n}x$이므로 점 P_n에서 접선의 기울기가 1, 즉 $\frac{2}{n}x=1$이고 점 P_n의 좌표는 $\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{4}\right)$

직선 l_n은 P_n에서의 접선에 수직이므로 기울기는 -1이고 점 P_n을 지나므로

$y=-\left(x-\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{4}=-x+\frac{3n}{4}$

이때 직선 l_n의 x절편과 y절편은 모두 $\frac{3n}{4}$이므로 직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_n은

$\frac{1}{2}\times\frac{3n}{4}\times\frac{3n}{4}=\frac{9n^2}{32}$

한편, 원 C_n의 중심이 직선 l_n 위에 있으므로 중심의 좌표를 $\left(a,\ -a+\frac{3n}{4}\right)(a>0)$라 하자.

원 C_n이 x축에 접하고 원의 중심의 y좌표가 양수이므로, 원의 반지름 r는 원의 중심의 y좌표와 같다.

$\therefore\ r=-a+\frac{3n}{4}$

또한, 원 C_n이 점 P_n을 지나므로 원의 중심과 점 P_n 사이의 거리는 반지름 r와 같다.

$\left(a-\frac{n}{2}\right)^2+\left(-a+\frac{3n}{4}-\frac{n}{4}\right)^2=\left(-a+\frac{3n}{4}\right)^2$,

$2\left(a-\frac{n}{2}\right)^2=\left(a-\frac{3n}{4}\right)^2$

이때 원 C_n의 중심의 x좌표가 점 P_n의 x좌표보다 크고, 원 C_n의 반지름의 길이가 $\frac{3}{4}n$보다 작으므로

$\frac{n}{2}<a<\frac{3}{4}n$

$\therefore\ \sqrt{2}\left(a-\frac{n}{2}\right)=-a+\frac{3n}{4}$, 즉 $a=\frac{\sqrt{2}+1}{4}n$

따라서 $r=-\frac{\sqrt{2}+1}{4}n+\frac{3n}{4}=\frac{(2-\sqrt{2})n}{4}$이므로 원 C_n의 넓이 T_n은 $\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\pi n^2$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n\times T_n}{n^4}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9n^2}{32}\times\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\pi n^2\right)}{n^4}\\&=\frac{9}{32}\times\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\pi\\&=\frac{27-18\sqrt{2}}{256}\pi\end{aligned}$$

따라서 $p=27$, $q=18$이므로 $p+q=45$

30. 정답 3

방정식 $\tan x = x$의 양수인 실근을 작은 것부터 크기순으로 나열한 수열이 $\{a_n\}$이다.

함수 $y=\tan x$의 주기가 π이고 $x \to \infty$일 때, 함수 $y=x$의 함숫값도 무한히 커지므로,
n 이 한없이 커질 때 교점의 x좌표인 a_n은 함수 $y=\tan x$의 점근선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$에 한없이 가까워진다.

따라서 $c_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - a_n$이라 하면 $n \to \infty$ 일 때 $c_n \to 0+$

주어진 방정식에 $x=a_n$을 대입하면 $\tan a_n = a_n$이므로

$$\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-c_n\right)=\frac{1}{\tan c_n}=a_n$$

$$\therefore\ \tan c_n = \frac{1}{a_n} \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

또한, $a_{n+1}-a_n$을 c_n에 대하여 나타내면

$$a_{n+1}-a_n = \left((n+1)\pi+\frac{\pi}{2}-c_{n+1}\right)-\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-c_n\right)$$
$$=\pi-(c_{n+1}-c_n)$$

이므로

$$\sin(a_{n+1}-a_n)=\sin(\pi-(c_{n+1}-c_n))$$
$$=\sin(c_{n+1}-c_n) \quad \cdots\cdots\ ㉡$$

함수 $f(x)=\tan x$에 대하여 $0<c_{n+1}<c_n$이므로 닫힌구간 $[c_{n+1},\, c_n]$에서 평균값 정리에 의해

$$\frac{\tan c_n - \tan c_{n+1}}{c_n - c_{n+1}} = \frac{1}{\cos^2\theta_n}$$

을 만족시키는 θ_n 이 c_{n+1}과 c_n 사이에 존재한다.
이때 $n \to \infty$ 일 때 $c_n \to 0$, $c_{n+1} \to 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\theta_n \to 0$ 이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos^2\theta_n}=1$

위 식을 $c_{n+1}-c_n$에 대하여 정리하고 ㉠을 대입하면

$$c_{n+1}-c_n = -\frac{\tan c_n - \tan c_{n+1}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta_n}}$$
$$=\cos^2\theta_n\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=\cos^2\theta_n \times \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \quad \cdots\cdots\ ㉢$$

이때 구하고자 하는 극한식에 ㉡을 대입하고 식을 변형하면

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}(a_n)^p \sin(a_{n+1}-a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n)^p \sin(c_{n+1}-c_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n)^p \times \frac{\sin(c_{n+1}-c_n)}{c_{n+1}-c_n} \times (c_{n+1}-c_n)$$

여기에 ㉠을 대입하고 a_n을 기준으로 식을 분리하여 정리하면

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(c_{n+1}-c_n)}{c_{n+1}-c_n}\times\cos^2\theta_n\times(a_n-a_{n+1})\times\frac{a_n}{a_{n+1}}\times(a_n)^{p-2}\right]$$

이때 $n \to \infty$ 일 때 다음 극한값들이 성립한다.
$c_n \to 0$, $c_{n+1} \to 0$이므로

$\dfrac{\sin(c_{n+1}-c_n)}{c_{n+1}-c_n} \to 1$이고, $\cos^2\theta_n \to 1$

$a_{n+1}-a_n = \pi-(c_{n+1}-c_n)$이므로 $a_n - a_{n+1} \to -\pi$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$이므로 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$

이를 모두 대입하면

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left\{1\times1\times(-\pi)\times1\times(a_n)^{p-2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\pi(a_n)^{p-2}\right\}$$

0이 아닌 실수 α로 수렴하려면 a_n의 지수가 0이어야 하므로
$p-2=0$
따라서 $p=2$, $\alpha=-\pi$이므로

$$p-\frac{\alpha}{\pi}=2-\frac{-\pi}{\pi}=3$$