03 26학년도 6월 22번

Topic : 2026학년도 6월 22번

더 알아보기

22

$k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

칼럼에 앞서 제가 여러 해설과 풀이를 살펴본 결과, 가장 동의하기 어려운 부분은 다음과 같은 주장입니다.

> "점 A가 곡선 $y=2^{x+1}$ 위에 있는 걸 못 떠올린 사람은 결국 못 푸는 거 아닌가?"

더 나아가, 이런 주장도 있습니다.

> "머리가 나쁘면 그냥 틀리라는 것이다."

본격적인 문제 풀이에 앞서, 고난도 문항을 대하는 일반적인 사고의 흐름을 짚고 넘어가겠습니다. 고난도 문항은 대개 다음과 같은 전개 방식을 따릅니다.

1. 조건을 해석하며 풀다가 막히는 지점이 생긴다.
2. 구체적인 예시(그래프 개형이나 숫자 등)를 대입해 본다.
3. 예시를 통해 숨겨진 규칙이나 결정적인 단서를 찾아낸다.
4. 찾아낸 단서를 바탕으로 정답을 도출한다.

칼럼

더 알아보기

이해를 돕기 위해 예시를 하나 들어보겠습니다. 다음은 24학년도 수능 22번 문항입니다.

유사 기출

24학년도 수능 22번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여 $f(k-1)f(k+1)<0$을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

이 문항 역시 처음 조건을 읽고 바로 계획을 세울 수 없으므로, $f(x)$의 그래프 개형을 임의로 여러 가지 가정해 보는 것부터 시작합니다.

- → 가정 "최고차항이 1이면 이런 모양인가? 대입해 보니 모순이네."
- → 수정 "그럼 축에 접하는 형태인가? 음, 이것도 아닌 것 같은데."
- → 발견 "아, 실근 간격이 1이라 조건이 성립하는구나!"
- → 결론 "찾았다! 딱 이 그래프 개형이네."

이처럼 개형을 예시로 들어가며 귀납적으로 추론하여 풀었던 것을 기억하실 겁니다.

유사 기출

24학년도 수능 14번

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.(중략)

또한 이런 식의 $g(t)$ 를 구하는 문제에서도 t 에다 적당한 예시를 들어가면서 $g(t)$의 그래프를 파악했던 것을 기억하실 겁니다.

즉, 고난도 문항에서 막혔을 때 구체적인 '가정'과 '예시'를 통해 돌파구를 찾는 것은 매우 자연스러운 과정입니다.

더 알아보기

22

$k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

자, 이제 원본 문항으로 돌아오겠습니다.
풀이 시작 전부터 점 A의 좌표를 구할 수 있다는 확신조차 없는 상태입니다. 학생은 문제를 보자마자 그야말로 "뭘 해야할지조차 감이 잡히지 않는 상태"를 마주합니다. 우리는 여기서 어떤 행동을 취해야 할까요? 아까 어려운 문제에서의 해결 과정을 다시 볼까요?

- → 가정 "최고차항이 1이면 이런 모양인가? 대입해 보니 모순이네."
- → 수정 "그럼 축에 접하는 형태인가? 음, 이것도 아닌 것 같은데."
- → 발견 "아, 실근 간격이 1이라 조건이 성립하는구나!"
- → 결론 "찾았다! 딱 이 그래프 개형이네."

맞습니다. 바로 "가정"입니다.

그러면 무엇을 가정해볼까요? 당연히, 문제에 주어진 미지수 중 가장 핵심적인 "k"의 값을 구체적으로 가정해 봐야 합니다.

가정은 아무거나 하면 되는데... 음... $k>1$ 이니까 $k=2$ 부터 해볼까요?

Step 1 $k=2$일 때의 관찰

예를 들어 $k=2$라고 하면 어떨까요?
주어진 두 곡선은

$$y=2^x+1 \text{와 } y=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

가 됩니다.

어떤가요? 아까 k가 있을 때와 달리 이 방정식은 뭔가 구할 수 있을 것 같지 않나요? 흔히 보는 전형적인 지수방정식이니까요!

위 식에서 $2^x=t$ $(t>0)$로 치환하면,

$$t+1=\frac{2}{t}\quad\Rightarrow\quad t^2+t-2=0\quad\Rightarrow\quad (t+2)(t-1)=0$$

$t>0$이므로 $t=1$, 즉 $2^x=1$에서 $x=0$입니다. 이를 대입하면 $y=2$가 되므로 점 A의 좌표는 $(0,2)$입니다.

칼럼

더 알아보기

따라서 점 A$(0,2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선, 즉

$$y = -x + 2$$

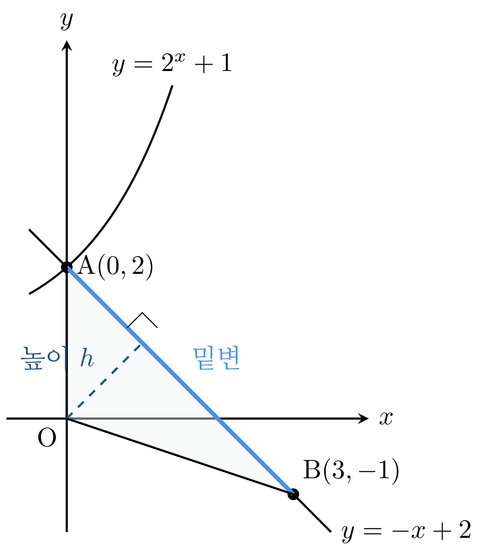
와 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$이 만나는 점 B의 좌표도

$$-x + 2 = 2^{x-2} - 3$$

그런데 우리는 이 같은 형태의 방정식을 푸는 방법을 배운 적이 없으므로, 적당한 x값을 하나씩 대입하며 해를 찾아야 합니다.

- $x = 1$ 대입: $1 \neq 2^{-1} - 3 = -\frac{5}{2}$ (거짓)
- $x = 2$ 대입: $0 \neq 2^{0} - 3 = -2$ (거짓)
- $x = 3$ 대입: $-1 = 2^{1} - 3$ (참)

따라서 만족하는 해는 $x = 3$이며, 이때 $y = -1$이므로 점 B의 좌표는 $(3, -1)$입니다.
점 A와 B를 구했으니, 문제에서 요구한 삼각형 OAB의 넓이를 계산해 봅니다.
직선 AB는 기울기가 -1인 직선입니다. 따라서 선분 AB의 길이를 밑변으로 하고, 원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발까지의 거리 h를 높이로 삼아 넓이를 구하는 것이 합리적입니다.



계획했던 대로 선분 AB의 길이를 구하면 다음과 같습니다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

직선 AB$(x + y - 2 = 0)$와 원점 $(0,0)$ 사이의 거리 h는 다음과 같습니다.

$$h = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

삼각형 OAB의 넓이를 구합니다.

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$$

칼럼

더 알아보기

이 관찰 결과를 정리하면 아래와 같습니다.

k값	A좌표	B좌표	$\overline{\text{AB}}$길이	높이 (h)	$\triangle$OAB 넓이
2	$(0,2)$	$(3,-1)$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=3$

Step 2 $k=4$**일 때의 관찰**

하나의 예시만으로는 규칙을 알기 어려우니 $k=4$를 대입하여 동일한 과정을 밟습니다.
두 곡선은

$$y=2^x+2\text{와 }y=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$$

가 됩니다. 이번에도 교점 A를 구하기 위해 연립합니다.

$$2^x+2=4\cdot2^{-x}+2 \quad\Rightarrow\quad 2^x=4\cdot2^{-x} \quad\Rightarrow\quad 2^{2x}=4 \quad\Rightarrow\quad 2^x=2$$

따라서 $x=1$이고, 동일한 과정을 밟아 계산을 실행하면(계산 과정은 생략) 아래 표와 같은 관찰 결과가 나옵니다.

k값	A좌표	B좌표	$\overline{\text{AB}}$길이	높이 (h)	$\triangle$OAB 넓이
2	$(0,2)$	$(3,-1)$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	3
4	$(1,4)$	$(4,1)$	$3\sqrt{2}$	$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{15}{2}$

어떤가요? 뭔가 공통점이 있나요? 맞아요. $\overline{\text{AB}}$ **길이가 유지**되고 있지 않나요? 확신이 안드니까, $k=6$일 때를 더 해보면 다음과 같이 나옵니다.

k값	A좌표	B좌표	$\overline{\text{AB}}$길이	높이 (h)	$\triangle$OAB 넓이
2	$(0,2)$	$(3,-1)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	3
4	$(1,4)$	$(4,1)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{15}{2}$
6	$(\log_2 3,\ 6)$	$(\log_2 3+3, 3)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{6+\log_2 3}{\sqrt{2}}$	$9+\dfrac{3}{2}\log_2 3$

어떤가요? 세 번의 예시 모두 A의 좌표가 $\left(\log_2\dfrac{k}{2}, k\right)$ 꼴을 만족하며, 이때 B의 좌표는 항상

$$\text{A}\,(a,\ b)\Rightarrow\text{B}\,(a+\boxed{3},\ b-\boxed{3})$$

이런 식이 되어 **선분 AB의 길이는 무조건 $3\sqrt{2}$로 고정**되고 있지 않나요?

칼럼

더 알아보기

그러면, 설마, 혹시, 어쩌면, 높은 확률로, 매우 그럴듯하게, 항상 이런 식인 것 아닐까요?

k값	A좌표	B좌표	$\overline{\text{AB}}$길이	높이 (h)	$\triangle$OAB 넓이
2	$(0, 2)$	$(3, -1)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	3
4	$(1, 4)$	$(4, 1)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{15}{2}$
6	$(\log_2 3, 6)$	$(\log_2 3 + 3, 3)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{6+\log_2 3}{\sqrt{2}}$	$9+\dfrac{3}{2}\log_2 3$
k	$\left(\log_2 \dfrac{k}{2}, k\right)$	$\left(\log_2 \dfrac{k}{2} + 3, k-3\right)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	?	?

표의 나머지 두 칸을 채워보겠습니다. 점 A $\left(\log_2 \frac{k}{2}, k\right)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식

$$x + y - \left(k + \log_2 \frac{k}{2}\right) = 0$$

이므로 원점에서 이 직선까지의 거리(높이 h)는

$$h = \frac{k + \log_2 \frac{k}{2}}{\sqrt{2}}$$

입니다. 따라서 표의 나머지 두 칸을 채워넣으면

k값	A좌표	B좌표	$\overline{\text{AB}}$길이	높이 (h)	$\triangle$OAB 넓이
2	$(0, 2)$	$(3, -1)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	3
4	$(1, 4)$	$(4, 1)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{15}{2}$
6	$(\log_2 3, 6)$	$(\log_2 3 + 3, 3)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{6+\log_2 3}{\sqrt{2}}$	$9+\dfrac{3}{2}\log_2 3$
k	$\left(\log_2 \dfrac{k}{2}, k\right)$	$\left(\log_2 \dfrac{k}{2} + 3, k-3\right)$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{k+\log_2 \frac{k}{2}}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{3}{2}\left(k+\log_2 \frac{k}{2}\right)$

이 됩니다.

더 알아보기

그런데 생각해보세요. 문제에서 묻고 있는 값은 k가 아니라

$$k + \log_2 k$$

입니다. 넓이는

$$\frac{3}{2}\left(k + \log_2 \frac{k}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(k + \log_2 k - 1\right)$$

인데 말이죠. 우리가 굉장히 정확하게 추측한 것 같지 않나요? 여기까지 왔다면 굉장한 확신이 있을 수밖에 없습니다. 식의 형태가 너무 그럴듯하니까요.

$$\frac{3}{2}\left(k + \log_2 k - 1\right) = 16 \quad \Rightarrow \quad k + \log_2 k = \frac{35}{3}$$

이면 될 것 같지 않나요? 즉 이 정도까지만 해도 우리는 문제를 충분히 맞출 수 있습니다!

Step LAST 증명하기

그러면 이제 진짜로 $\overline{\mathrm{AB}}$ 길이가 항상 $3\sqrt{2}$인지만 엄밀하게 확인하면 문제 풀이가 완벽하게 끝납니다.
앞선 관찰을 일반화하면 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\log_2 \frac{k}{2}, k\right)$입니다. 이때 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선 위의 점 B가, 실제로 A에서 x축 방향으로 3, y축 방향으로 -3만큼 이동한 위치에 있는지 확인하는 과정입니다.

확인 방법은 간단합니다.

점 $\mathrm{B}\left(\log_2 \frac{k}{2} + 3, k - 3\right)$가 정말로 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 위에 있는지

대입하여 등식이 성립하는지 보는 것입니다.

$$\begin{aligned} y &= 2^{\left(\log_2 \frac{k}{2} + 3\right) - 2} - 3 \\ &= 2^{\log_2 \frac{k}{2} + 1} - 3 \\ &= \left(2 \times \frac{k}{2}\right) - 3 \\ &= k - 3 \end{aligned}$$

계산 결과가 점 B의 y좌표와 정확히 일치합니다. 즉, k값에 관계없이 점 B는 항상 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 위에 있으며, 이에 따라 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 항상 $\sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$로 고정됨이 증명되었습니다.

칼럼

더 알아보기

Step 3 **사후적 분석: 구조의 필연성**

문제를 풀고 나면 비로소 보이기 시작하는 기하학적 실체가 있습니다. 우리가 계산을 통해 발견한 **점 A와 B의 일정한 간격**$(+3, -3)$은 단순한 우연이 아닙니다.

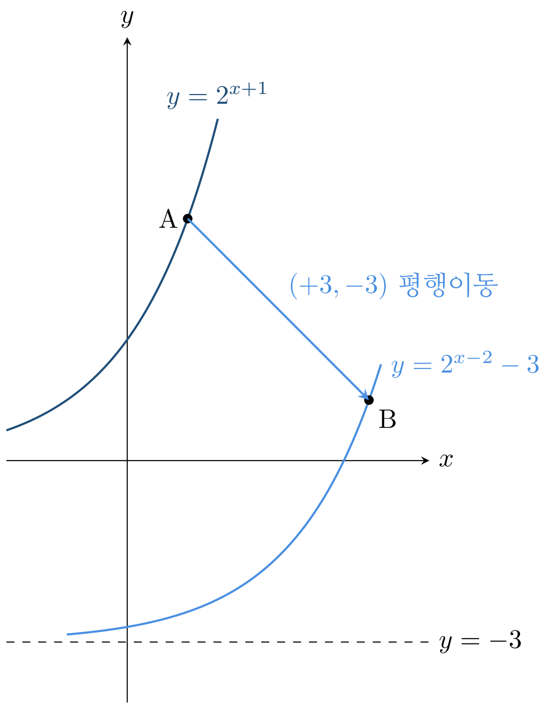
점 A의 x좌표를 $X = \log_2 \frac{k}{2}$라 하면 지수의 정의에 의해 $2^X = \frac{k}{2}$가 성립합니다. 이를 k에 대해 정리하면 다음과 같습니다.

$$k = 2 \cdot 2^X = 2^{X+1}$$

즉, 점 $A(X, k)$는 항상 곡선 $y = 2^{x+1}$ 위에 놓여 있었던 셈입니다.
곡선 $y = 2^{x+1}$을 x축 방향으로 $+3$, y축 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$y - (-3) = 2^{(x-3)+1} \quad \Rightarrow \quad y = 2^{x-2} - 3$$

입니다. 결국 점 B가 놓여 있던 곡선 B의 방정식이 정확히 튀어나오는 것이죠.



결국 곡선 B 자체가 곡선 $y = 2^{x+1}$을 평행이동한 결과물이었기에, 그 위의 점 A를 똑같이 이동시킨 점 B가 곡선 위에 존재할 수밖에 없었던 것입니다. 하지만 이건 문제를 다 풀고 난 뒤 연구 과정에서나 알 수 있는 지식이지, 실전에서 먼저 떠올려야 할 '조건'이 아닙니다.

칼럼

더 알아보기

Step 4 **관점의 전환: '지식'에서 '과정'으로**

이 문제의 핵심은 결코

"점 A가 곡선 $y = 2^{x+1}$ 위에 있다는 사실을 문제를 보고 알았는가?"

에 있지 않습니다. 그보다는

"구체적인 숫자를 대입하며 문제를 풀고 나서, 그 필연적 구조를 자연스럽게 발견했는가?"

로 해석해야 합니다.
따라서 이 문제가 주는 교훈, 즉 "우리가 가져야 할 태도"는 다음과 같습니다.

1. **모를 땐 예시를 들자:** 갈피를 잡을 수 없을 때는 미지수(k)에 구체적인 숫자를 넣어 상황을 단순화하십시오.
2. **관찰의 기준을 설정하자:** 무작정 대입하는 것이 아니라, **문제에서 묻는 값**을 기준으로 무엇을 고정하고 무엇을 관찰할지 생각하는 것이 중요합니다.