제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=8 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3.5점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $(x^2-5x+2)(x^2+4x-7)$의 전개식에서 x의 계수는? [3.6점]

① 43 ② 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47

3. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 복소수 c에 대하여 $\overline{c}$는 c의 켤레복소수이며, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3.7점]

<보 기>

ㄱ. $4-5i$의 허수부분은 -5이다.

ㄴ. $\overline{z+\overline{w}}=\overline{z}+w$

ㄷ. 임의의 복소수 z_1에 대하여 $z_1\overline{z_1}+z_1+\overline{z_1}>0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. $xy=2026$, $x-y=0$일 때, x^3-y^3의 값은? [3.8점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. $-\frac{1}{2}\le x\le -1$에서 이차방정식 $x^2+ax+1=0$이 실근을 가질 때, $\alpha\le a\le\beta$이다. $2\alpha+4\beta$의 값은? [3.9점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

6. $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4.1점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 나머지가 $-x$이고, x^2+x-2로 나눈 나머지가 $4x-k$이다. 다항식 $f(x)$를 x^2-x-6으로 나눈 나머지를 $g(x)$라 할 때, $g(k)$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4.2점]

① $-\frac{1}{2}$　② 0　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{3}{2}$

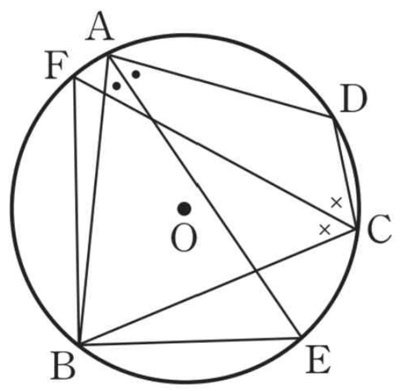
8. $x^2+2y^2-2xy-4=0$을 만족하는 두 실수 x, y에 대하여 $xy(x-y)(x-2y)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4.3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

9. 이차 이상의 다항식 $P(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1)-P(x^2-1)=kxP(x)+12x^2$을 만족시킬 때, $P(k)$의 값은? (단, k는 0이 아닌 상수이다.) [4.4점]

① 400　② 420　③ 440　④ 460　⑤ 480

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. $\angle$BAD를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, $\angle$BCD를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 F라 하자. $\overline{BE}+\overline{BF}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값은? [4.5점]



① 16　② 20　③ 24　④ 28　⑤ 32

단답형

11. 방정식 $x^4-2x^2-3=0$의 서로 다른 모든 실근의 곱을 구하시오. [3점]

12. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-x^2+3x-3 \le ax+b \le 2x^2-kx+2k-9$$

을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수가 1일 때, 실수 k의 값을 구하시오. [4점]

13. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}\right)\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2ab}{c^2}$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 답하시오. [5점]

14. $f(x)=x^3-7x+9$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

1) $f(1)-f(0)$, $f(2)-f(1)$, $f(3)-f(2)$의 값을 각각 구하시오. [3점]

2) $|f(x)|$의 값이 소수가 되도록 하는 정수 x를 모두 구하시오. [3점]

3) x가 자연수일 때, $f(x)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

15. 좌표평면 위에 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=-4x+5$이 있다. 직선 $y=k\,(k \le 1)$가 이 포물선과 두 점 A, B에서 만나며 직선 $y=-4x+5$과 점 C에서 만난다. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 D, 직선 $y=-4x+5$와 만나는 점을 E라 하자. 두 사각형 BCFD와 ABEG가 모두 직사각형이 되도록 두 점 F, G를 잡을 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

1) 두 직사각형 BCFD와 ABEG의 둘레의 길이의 합을 $f(k)$라 하자. $f(k)$의 범위를 구하시오. [4점]

2) 사각형 BCFD이 정사각형일 때, k의 값을 구하시오. [3점]

16. 두 실수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax-b & (x\le 0)\\ x^2+2ax+b & (x>0)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [6점]

(가) x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 개수는 1이다.
(나) 모든 정수 k에 대하여 $f(k)f(k+1)\ge 0$이다.

서술형

17. 실수 x에 대하여 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=52$일 때, $x^4+\dfrac{1}{x^4}$의 값을 구하시오. [4점]

18. 두 그래프 $y=x^2+3x-1$, $y=-x^2$의 두 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오. [4점]

19. $a+b+c=\sqrt{2}$, $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$, $abc=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $(a^n+b^n+c^n)^2$의 값이 정수가 되도록 하는 200 이하의 자연수 n의 개수를 곱셈공식을 이용하여 구하시오. [7점]

20. $\frac{3\sqrt{3}+i}{7}\times\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{3}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}\,i}{2}=a+bi$라 할 때, 다음 자료를 이용하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [10점]

> 두 실수 p, q에 대하여 $z=p+qi$일 때, 복소수 z의 크기 $|z|$를 $|z|=\sqrt{p^2+q^2}$로 정의한다.

1. ⑤
2. ①
3. ③
4. ③
5. ④

6. ④
7. ④
8. ③
9. ②
10. ⑤

11. -3

12. $k=9$

13. 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

14. 1) -6, 0, 12
   2) -3, 1, 2
   3) 3

15. 1) $6<f(k)\leq \frac{25}{2}$
   2) $k=\frac{33-4\sqrt{29}}{25}$

16. $-4\sqrt{2}$

17. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=52$이므로 $t=x+\frac{1}{x}$라 하면 t는 $t^3-3t-52=0$을 만족하는 실수이다.
$t^3-3t-52=0$에서 $(t-4)(t^2+4t+13)=0$이므로 $t=4$ 또는 $t^2+4t+13=0$이다.
한편, 방정식 $t^2+4t+13=0$은 실근을 갖지 않음을 판별식이 음수임을 통해 알 수 있다. 따라서, $t=4$이다.
$x+\frac{1}{x}=4$일 때, $x^2-4x+1=0$이므로 판별식을 이용하면 실수 x가 실제로 존재함을 알 수 있다.
$x+\frac{1}{x}=4$이므로, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14$이고,
$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=194$이다.
$\therefore\ x^4+\frac{1}{x^4}=194$

18. 두 그래프 $y=x^2+3x-1$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면, 이차방정식 $2x^2+3x-1=0$의 두 근이 α, β이다.
두 상수 a, b에 대하여 구하고자 하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하자. 두 이차함수의 그래프와 이 직선의 교점의 x좌표가 α, β이므로, 두 이차방정식 $x^2+(3-a)x-(b+1)=0$, $x^2+ax+b=0$이 두 근 α, β를 갖는다. 따라서, 두 이차식 $x^2+(3-a)x-(b+1)$, x^2+ax+b이 $2x^2+3x-1$을 인수로 가진다.
다항식 $Q(x)$에 대하여 $x^2+ax+b=(2x^2+3x-1)Q(x)$라 하자. 좌변이 이차식이므로 $Q(x)$는 상수이고, 이차항의 계수를 비교하면 $Q(x)=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다. 일차항의 계수와 상수항을 비교하면, $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이다. $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$일 때, 이차식 $x^2+(3-a)x-(b+1)$이 $2x^2+3x-1$을 인수로 가지므로, 문제의 조건에 어긋나지 않는다.
$\therefore$ 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

19. $(a+b)(b+c)(c+a)=(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}-b)$
$=2\sqrt{2}-2(a+b+c)+\sqrt{2}(ab+bc+ca)-abc=0$이므로,
$a+b=0$이거나 $b+c=0$이거나 $c+a=0$이다.
일반성을 잃지 않고, $a\geq b$이고, $a+b=0$이라 하자.
$a+b+c=\sqrt{2}$이므로 $c=\sqrt{2}$이고, $ab=-\frac{1}{2}$이므로
$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
$(a^n+b^n+c^n)^2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+(\sqrt{2})^n\right\}^2$에서
i) n이 홀수일 때, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$이므로
$(a^n+b^n+c^n)^2=\{(\sqrt{2})^n\}^2=2^n$으로 항상 정수이다. 1부터 200까지의 자연수 중 홀수는 100개이므로, n이 홀수일 때 n의 개수는 100이다.
ii) n이 짝수일 때, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$이다. 자연수 k에 대하여 $n=2k$라 하면, $(a^n+b^n+c^n)^2=\left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^k+2^k\right\}^2$이다.
$k=1$일 때 식의 값이 9로 정수이고, $k>1$인 경우 식의 값이 분모가 2^{2k-2}인 정수가 아닌 유리수가 되므로, 식의 값이 정수이기 위해서는 $k=1$이어만 한다.
따라서, n이 짝수일 때, n의 개수는 1이다.
$\therefore$ 자연수 n의 개수는 101

20. $z_1 = c+di$, $z_2 = e+fi$ (단, c, d, e, f는 실수)라 하자.

$$\begin{aligned}|z_1z_2| &= |(ce-df)+(cf+de)i| \\ &= \sqrt{(ce-df)^2+(cf+de)^2} \\ &= \sqrt{c^2e^2+d^2f^2+c^2f^2+d^2e^2} \\ &= \sqrt{(c^2+d^2)(e^2+f^2)} \\ &= \sqrt{c^2+d^2}\times\sqrt{e^2+f^2} \\ &= |z_1|\times|z_2| \text{ 이다.}\end{aligned}$$

$z' = a+bi$라 할 때,

$$\begin{aligned}|z'| &= \left|\frac{3\sqrt{3}+i}{7}\right|\times\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{3}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}i}{2}\right| \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7}\times\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{3}\right|\times\left|\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}i}{2}\right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{14}}{3}\times\sqrt{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

$a^2+b^2 = |z'|^2$이므로, $a^2+b^2 = \dfrac{8}{3}$이다.

$\therefore\ a^2+b^2 = \dfrac{8}{3}$

시험지 comment. 주는 문제는 진짜 확실히 주지만, 그 수는 매우 적다. 단답형 문항 수도 많고, 서술형 문항에서 서술할 양이 생각보다 많으므로, 시간이 상당히 부족할 것이라고 예상된다. 안 그래도 서술형에서 발상이 꽤 필요한데, 14번마저 문항을 분할해 놓지 않았으면 시험시간 50분일 시 90점 이상이 없을 듯.

문항 comment 겸 해설

3(ㄷ). 놀랍게도 $z_1 = 0$을 대입하면 부등호가 성립하지 않는다.

4. $x-y=0$이므로 $y=x$를 x^3-y^3에 대입하기만 하면 끝. 제발 4번은 꼭 틀리지 말자. 제발.

8(kmo 1차). $x^2-3xy+2y^2 = 4-xy$가 안 보였으면 못 풀었을 문제. 알았어도 $(x-\sqrt{2}y)^2 \geq 0$, $(x+\sqrt{2}y)^2 \geq 0$을 순간적으로 까먹었으면 오래 걸렸을 듯.

10(2015년 수능특강). 내접하는 사각형의 각 사이의 관계를 이용하여, $\angle\mathrm{EBF} = 90^\circ$를 알아냈어야 한다. 그 후 $(x-y)^2 \geq 0$을 이용하여도 좋고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여도 좋다. 중학도형 기억하고 있니?

12(자작). $y=ax+b$는 직선의 방정식이니 두 이차함수 그래프 사이에 직선이 있는 조건을 구하면 됨. 그냥 x에 대한 방정식 $-x^2+3x-3 = 2x^2-kx+2k-9$가 중근 가질 조건을 구하면 되는데, 조건을 일부로 숨겨뒀다.

13(2026년 수능특강 변형). $\dfrac{2ab}{c^2}$를 좌변으로 넘기고, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$를 우변으로 넘겨 인수분해 열심히 하면 답이 잘 나온다.

14(자작). 미적1 문제가 아니다. 공통수학1 문제다. 그래서 원래는 서술형에 내려고 했는데 그럼 서술형이 너무 많아질 것 같아서 단답으로 물어본 문제이다. 1)을 통하여 함숫값이 3의 배수임을 알게 되고, 2)에서는 함숫값이 구체적으로 어떤 값이 가능한지, 3)에서는 $f(x+1)-f(x)$의 부호 관찰을 통하여 최솟값을 구하면 된다. 그래서 1)에서 일부로 $f(12)-f(2)$같이 주지 않고 $f(1)-f(0)$과 같이 f 안의 값이 1만큼 차이가 나도록 한 것이다.

15(일본 대학 입시문제). 그냥 좌표 설정 열심히 하면 답은 나온다. 단지 숫자가 조금 더러울 뿐.

16(2025년 3월 고2학평 변형). 정의역 무시하면, 두 그래프는 원점에 대하여 대칭이라는 사실을 이용하면 재밌게 풀린다.