04 유리함수와 무리함수

수학 II 교과서 Review

문제 1

$x \neq 1$인 임의의 실수 x에 대하여 등식

$$\frac{a}{x-1}+\frac{bx+a}{x^2+x+1}=\frac{3x}{x^3-1}$$

가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

문제 2

매년 장마철만 되면 하천은 쓰레기로 몸살을 앓는다. 어떤 하천에서 쓰레기를 x % 치우는 데 드는 비용을 y만 원이라고 하면 $y=\frac{ax}{100-x}$ $(0 \leq x < 100)$ 가 성립한다고 한다. 이 하천에 버려진 쓰레기를 10 % 치우는 데 드는 비용이 800만 원이라고 할 때, 90 %를 치우는 데 드는 비용은 얼마인가?

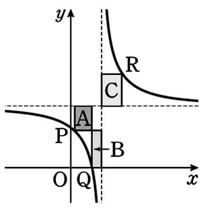
① 7200만 원　② 21600만 원　③ 36000만 원
④ 50400만 원　⑤ 64800만 원

문제 3

유리함수 $f(x)=\frac{(2a-1)x+1}{x-a}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 함수를 g라고 하자. $g=g^{-1}$가 성립하는 상수 a, m에 대하여 $a-m$의 값을 구하여라. (단, g^{-1}는 g의 역함수)

문제 4

오른쪽 그림은 함수 $y=\frac{2}{x-2}+4$의 그래프를 나타낸 것이다. 이 곡선 위의 세 점 P, Q, R를 각각 한 꼭짓점으로 하고, 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 점근선과 평행하거나 점근선 위에 있는 세 직사각형 A, B, C의 넓이를 각각 S_A, S_B, S_C라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?



① $S_A = S_B = S_C$
② $S_A = S_B < S_C$
③ $S_C < S_A = S_B$
④ $S_B < S_A < S_C$
⑤ $S_A < S_B < S_C$

04 유리함수와 무리함수

수학II 교과서 Review

문제 5

유리함수 $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$의 그래프가 두 직선 $y=x-2$와 $y=-x+3$에 대하여 모두 대칭일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

문제 6

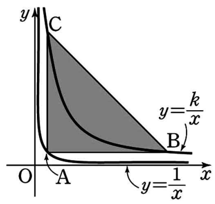
두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{4x+3}{2x}\right\}$,
$B=\{(x,\ y)|y=kx+2\}$에 대하여 $A\cap B=\varnothing$일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

문제 7

오른쪽 그림과 같이 유리함수
$y=\dfrac{4}{x-1}\ (x>1)$의 그래프 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값을 구하여라.

문제 8

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프의 제1사분면 위의 점 A에서 x축, y축에 각각 평행한 직선을 그어 함수 $y=\dfrac{k}{x}(k>1)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 72일 때, 실수 k의 값을 구하여라.



04 유리함수와 무리함수

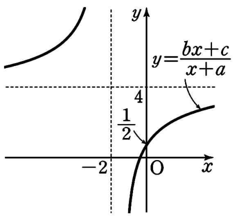
수학 II 교과서 Review

문제 9

$2 \le x \le 3$인 모든 x에 대하여 부등식
$ax+\frac{1}{2} \le \frac{x+1}{x-1} \le bx+\frac{1}{2}$이 항상 성립할 때, 상수 a의 최댓값과 상수 b의 최솟값을 구하여라.

문제 10

유리함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그려라.



문제 11

두 함수 $y=\sqrt{2x+4}$, $y=x+k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 값의 범위를 구하여라.

문제 12

두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에 대하여 무리함수
$y=\sqrt{m(x+1)}$ $(m>0)$의 그래프가 선분 AB와 만날 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

04 유리함수와 무리함수

수학II 교과서 Review

문제 13

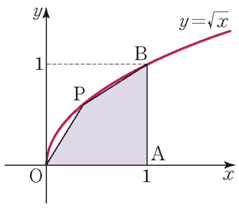
함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & (x \geq 1)\\ \sqrt{1-x} & (x<1)\end{cases}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

문제 14

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 선분 PQ의 중점의 y좌표가 3일 때, 직선 PQ의 기울기를 구하는 풀이 과정과 답을 써라. (단, $0<a<c$)

문제 15

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 원점 O와 점 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ 사이의 곡선 위를 움직일 때, 사각형 OABP의 넓이의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 그 답을 써라. (서술형)



문제 16

16) 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

| 조 건 |

(가) $-1 \leq x \leq 1$에서 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
(나) $f(x+2)=f(x)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=ax+1$과 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

04 유리함수와 무리함수

수학Ⅱ 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 수학Ⅱ - 4단원. 유리함수와 무리함수

1) 2

2) ⑤

하천에 버려진 쓰레기를 10 % 치우는 데 드는 비용이 800만 원이므로

$800=\dfrac{10a}{100-10}$, $800=\dfrac{a}{9}$ $\quad a=7200$

따라서 $y=\dfrac{7200x}{100-x}$이므로 쓰레기를 90 %를 치우는 데 드는 비용은

$\dfrac{7200\times 90}{100-90}=64800$(만 원)

3) $f(x)=\dfrac{(2a-1)x+1}{x-a}=\dfrac{a(2a-1)+1}{x-a}+2a-1$

유리함수 $f(x)=\dfrac{(2a-1)x+1}{x-a}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 함수 g는

$$g(x)=\frac{a(2a-1)+1}{x-(m+a)}+2a-6$$

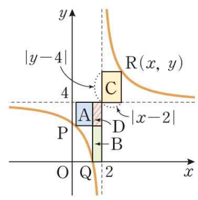
이때 함수 g의 점근선은

$$x=m+a,\ y=2a-6$$

$g=g^{-1}$이므로 $m+a=2a-6$

따라서 $\quad a-m=6$

4) ②



$y=\dfrac{2}{x-2}+4$에서 $y-4=\dfrac{2}{x-2}$이므로

$(x-2)(y-4)=2$ 점 R의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 점 R를 꼭짓점으로 하고 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 점근선과 겹치는 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $|x-2|$, $|y-4|$ 이다. 이 직사각형의 넓이는 $|(x-2)(y-4)|=2$로 점의 위치에 관계없이 일정함을 알 수 있다. 위의 그림에서 빗금친 부분의 직사각형을 D라고 하면 $S_C=S_A+S_D=S_B+S_D$

따라서 $S_A=S_B<S_C$

5) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{5}{2}$

6) $k\le 0$

7) 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{4}{a-1}\right)$라고 하면 $Q(a,\ 0)$, $R\left(0,\ \dfrac{4}{a-1}\right)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}+\overline{PR}&=\frac{4}{a-1}+a\\&=\frac{4}{a-1}+a-1+1\\&\ge 2\sqrt{\frac{4}{a-1}\times(a-1)}+1\\&=4+1=5\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{4}{a-1}=a-1,\ \text{즉 }a=3\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값은 5이다.

8) $\mathrm{A}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$로 놓으면 $\mathrm{B}\left(kp,\ \dfrac{1}{p}\right)$, $\mathrm{C}\left(p,\ \dfrac{k}{p}\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=kp-p=(k-1)p$

$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{k}{p}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p}(k-1)$

삼각형 ABC 의 넓이가 72 이므로

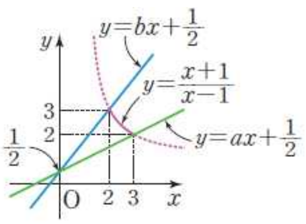
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=72$

$\frac{1}{2}\times(k-1)p\times\frac{1}{p}(k-1)=72$

$(k-1)^2=144$에서 $k=13$ 또는 $k=-11$

이때 $k>1$이므로 $k=13$

9)



유리함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 그림과 같다. $2\le x\le 3$에서 a의 최댓값은 직선 $y=ax+\frac{1}{2}$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때이므로

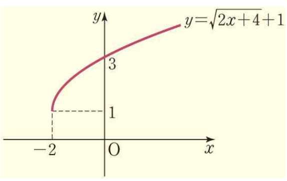
$$2=3a+\frac{1}{2}\ a=\frac{1}{2}$$

또 b의 최솟값은 직선 $y=bx+\frac{1}{2}$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때이므로

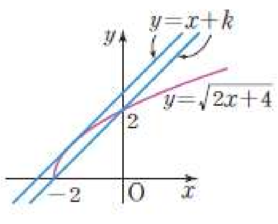
$$3=2b+\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{4}$$

따라서 상수 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 상수 b의 최솟값은 $\frac{5}{4}$이다.

10)



11)



두 함수 $y=\sqrt{2x+4}$, $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 그림과 같이 직선 $y=x+k$의 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때보다 위쪽에 있거나 $y=\sqrt{2x+4}$에 접할 때보다 아래쪽에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=x+k$의 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때

$$0=-2+k,\ k=2$$

(ii) 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=\sqrt{2x+4}$에 접할 때 $x+k=\sqrt{2x+4}$에서 양변을 제곱하면

$$(x+k)^2=2x+4$$

$$x^2+2x(k-1)+k^2-4=0$$

이 방정식의 판별식을 D라고 하면

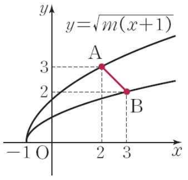
$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0$$

$$k=\frac{5}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는

$2 \le k \le \frac{5}{2}$

12)
(ⅰ) $y=\sqrt{m(x+1)}$ 의 그래프가 점 $A(2,\ 3)$을 지날 때
$3=\sqrt{m(2+1)}$ 에서 $m=3$
(ⅱ) $y=\sqrt{m(x+1)}$ 의 그래프가 점 $B(3,\ 2)$를 지날 때
$2=\sqrt{m(3+1)}$ 에서 $m=1$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $y=\sqrt{m(x+1)}$ 의 그래프가 선분 AB와 만나는 실수 m값의 범위는 $1 \le m \le 3$

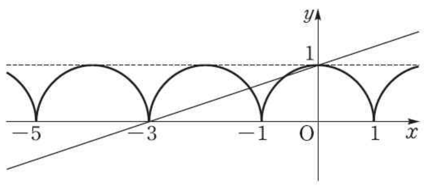
13) $0 < m < \frac{1}{2}$

14) $\frac{b+d}{2}=3$에서 $b+d=6$
$P(a,\ b)$, $Q(c,\ d)$는 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로
$\sqrt{a}=b$, $\sqrt{c}=d$
$a=b^2$, $c=d^2$
직선 PQ의 기울기는
$$\frac{d-b}{c-a}=\frac{d-b}{d^2-b^2}=\frac{1}{d+b}=\frac{1}{6}$$

15) 점 P 의 y좌표는 $\sqrt{x}$ 이므로
$\square OABP$
$=\triangle OAP+\triangle ABP$
$=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{x}+\frac{1}{2}\times 1\times(1-x)$
$=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x}+1)$
$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1\right\}$
$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}$
따라서 사각형 OABP 의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{8}$ 이다.

16) $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 양변을 제곱하면
$y^2=1-x^2$, $x^2+y^2=1$
이때 $1-x^2 \ge 0$이므로 $-1 \le x \le 1$

또 $f(x+2)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=ax+1\ \ (a>0)$과 서로 다른 네 점에서 만나려면 직선이 점 $(-3,\ 0)$을 지나야 하므로

$$0=-3a+1,\ \ a=\frac{1}{3}$$