제 2 교시

서사 모의고사 1회 답안

수학 영역

1번 - 8번

1. [정답] ④

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}-1}\right)^{-2} \times \left(3^{\frac{1}{3}-1}\right)^{-\frac{3}{2}} = 6$

2. [정답] ③

$f'(x) = 6x^2 + 12x \rightarrow f'(2) = 48$

3. [정답] ①

$2\sum_{k=1}^{4} a_k = \frac{4\times5\times9}{6} + \frac{4\times5}{2} = 40 \rightarrow \sum_{k=1}^{4} a_k = 20$

4. [정답] ②

$\lim_{x\to2+} f(x) = \lim_{x\to2-} f(x) \rightarrow a = 2$

5. [정답] ②

$f'(x) = 4x(x^2+4x+2) + (2x^2+2)(2x+4)$

$\rightarrow f'(2) = 8\times14 + 10\times8 = 192$

6. [정답] ②

$\log_a a + \log_a b = 3 \rightarrow \log_a b = 2$

$\rightarrow b = a^2$

$\rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a^2}{a} = a$

$\rightarrow a = \sqrt{3}$

$\rightarrow b = 3$

$\rightarrow \log_9 3a^2b^2 = \log_9 3b^3 = \log_{3^2} 3^4 = 2$

7. [정답] ③

$\int_0^2 \left\{(x^2+4) - \left(-\frac{1}{3}x^2+4\right)\right\} dx = \frac{4}{3}\times\frac{8}{3} = \frac{32}{9}$

8. [정답] ①

16번 - 19번

16. [정답] 49

$a_2 = a_1 + 1 = 2$

$\rightarrow\ a_3 = (a_1 + 1) + (2a_2 + 4) = 10$

$\rightarrow\ a_4 = 10 + (3a_3 + 9) = 49$

17. [정답] 10

$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = F(0)$

$\rightarrow\ F(1) = 2F(0)$

$\rightarrow\ F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + F(0)$

$\rightarrow\ F(1) = F(0)$이므로 $F(0) = 0$

$\rightarrow\ F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ 이므로 $F(2) = 10$

18. [정답] 16

$\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 하자.

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{5}$

$\sin\theta = -\cos\theta + \dfrac{1}{5}$

$1 - \cos^2\theta = \left(-\cos\theta + \dfrac{1}{5}\right)^2$

$1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta - \dfrac{2}{5}\cos\theta + \dfrac{1}{25}$

$2\cos^2\theta - \dfrac{2}{5}\cos\theta - \dfrac{24}{25} = 0$

$25\cos^2\theta - 5\cos\theta - 12 = 0$

$(5\cos\theta + 3)(5\cos\theta - 4) = 0$

$\angle \mathrm{BAC} > \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$

삼각형 ABC의 넓이$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 10 \times \sin\theta = 16$

19. [정답] 6

$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$

$\rightarrow\ f'(x) = 6(x-1)(x-3)$

$\rightarrow$ 양수 k의 최솟값은 6이다.

11번

11. [정답] ⑤

ㄱ. (참)

$\rightarrow\ x(t)=t^3-\frac{1}{2}kt^2+6t$

$\rightarrow\ v(t)=3t^2-kt+6$

$\rightarrow\ 6-\frac{k^2}{12}\geq 0$

$\rightarrow\ 1\leq k\leq 8$

ㄴ. (참)

$\rightarrow\ v(t)=3t^2-kt+6$

$\rightarrow\ a(t)=6t-k=0$

$\rightarrow\ t=\frac{k}{6}$

$\rightarrow\ v\left(\frac{k}{6}\right)=3\times\frac{k^2}{36}-\frac{k^2}{6}+6$

$\rightarrow\ v\left(\frac{k}{6}\right)=-\frac{k^2}{12}+6=3$

$\rightarrow\ k=6$

ㄷ. (참)

$k=6$

$\rightarrow\ v(t)=3t^2-9t+6=3(t-1)(t-2)$

$\rightarrow\ 0<t<1$일 때, $v(t)>0$

$\rightarrow\ 1<t<2$일 때, $v(t)<0$

$\rightarrow\ \int_0^2|v(t)|dt$

$\rightarrow\ \left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^1-\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_1^2=3$

20번

20. [정답] 275

$f(m)=2m$, $g(m)=-9m$, $p=11$, $q=605$

9번

9. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x+a^3$$

라 할 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 α, β라 하자. $\alpha-\beta=\frac{1}{2}$일 때, $f(-a)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[정답] ①

$f'(x)=3x^2-3ax-6a^2=3(x-2a)(x+a)$

→ $x=-a$ 또는 $x=2a$

→ $f(-a)=-a^3-\frac{3}{2}a^3+6a^3+a^3=\frac{9}{2}a^3$

→ $f(2a)=8a^3-6a^3-12a^3+a^3=-9a^3$

→ $\alpha=\frac{9}{2}a^3$, $\beta=-9a^3$

→ $\alpha-\beta=\frac{27}{2}a^3=\frac{1}{2}$

→ $a=\frac{1}{3}$

→ $f(-a)=\frac{9}{2}\times\frac{1}{27}=\frac{1}{6}$

유사 문항 확인

9-(1). [정답] ⑤

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수)

(2014학년도 6월 평가원 A형 21번)

① 5 ② 7 ③ 9

④ 11 ⑤ 13

9-(2). [정답] 16

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

(2015학년도 수능 A형 29번)

.

9-(3). [정답] ②

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)$의 극댓값은 4이고 $f(-2)$는 양수 일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수)

(2020학년도 9월 평가원 나형 17번)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

10번

10. 2보다 큰 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=\log_4 x$를 x축으로 $-k$만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭한 함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=|f(x)|$와 곡선 $y=|g(x)|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 x_1, x_2, x_3 $(0<x_1<x_2<x_3)$이라 하자. 세 수 $2x_1$, x_2, $2x_3$가 등비수열을 이룰 때, k의 값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[정답] ②

$g(x)=\log_4(-x+k)$

$\rightarrow |f(x)|=|g(x)|$

$\rightarrow \log_4 x=\log_4(-x+k)$

$\rightarrow x=\dfrac{k}{2}$

$\rightarrow \log_4 x=-\log_4(-x+k)$

$\rightarrow \dfrac{1}{x}=-x+k$

$\rightarrow x^2-kx+1=0$

$\rightarrow x=\dfrac{2k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

$\rightarrow x_1=k-\dfrac{\sqrt{k^2-4}}{2}$, $x_2=\dfrac{k}{2}$, $x_3=k+\dfrac{\sqrt{k^2-4}}{2}$

$\rightarrow x_2^2=4x_1x_3$

$\rightarrow \left(\dfrac{k}{2}\right)^2=4$

$\rightarrow k=4$

12번

12. 모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다.

(가) $a_5+a_9+a_{13}=78$

(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$3S_3=S_7-S_4$$

을 만족시킨다.

a_9의 값은? [4점]

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

[정답] ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 a_1, r이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 서로 다르므로 $a_1\neq 0$, $r\neq 1$이다.

$S_3=\dfrac{a_1(r^3-1)}{r-1}=\dfrac{a_1(r-1)(r^2+r+1)}{r-1}=a_1(r^2+r+1)$

$\rightarrow S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=a_5(r^2+r+1)$

$\rightarrow 3a_1(r^2+r+1)=a_5(r^2+r+1)$

$\rightarrow 3a_1=a_5=a_1r^4$

$\rightarrow r^4=3$

$\rightarrow a_5+a_9+a_{13}=39a_1=78$

$\rightarrow a_1=2$

$\rightarrow a_9=a_1(r^4)^2=18$

13번

13. 함수 $f(x)=3x^2-2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x\int_0^x f(t)dt+(k-2)x$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값을 가진다. 함수 $y=f(x)$위의 점 $\left(\frac{k}{2}, f\left(\frac{k}{2}\right)\right)$에서의 접선과

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\frac{k}{2}, g\left(\frac{k}{2}\right)\right)$에서의 접선 및

x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(단, k는 상수) [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

[정답] ①

$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)+(k-2)$

$\rightarrow$ $g'(1)=\int_0^1 f(t)d+k-1$

$\rightarrow$ $\int_0^1 f(t)dt=-k+1$

$\rightarrow$ $\int_0^1 (3x^2-2)dt=\left[x^3-2x\right]_0^1=-1$

$\rightarrow$ $k=2$

$\rightarrow$ $f(1)=1,\ f'(x)=6x,\ f'(1)=6$

$\rightarrow$ $y=6x-5$

$\rightarrow$ $g'(1)=\int_0^1 f(t)dt=-1,\ y=-1$

$\rightarrow$ $\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

유사 문항 확인

13-(1). [정답] ③

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1(k>0)$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, 상수 k의 값은?

(2018학년도 6월 평가원 나형 20번)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{5}{2}$

13-(2). [정답] 39

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.

(2024학년도 6월 평가원 20번)

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert\geq\lvert g(3)\rvert$이다.

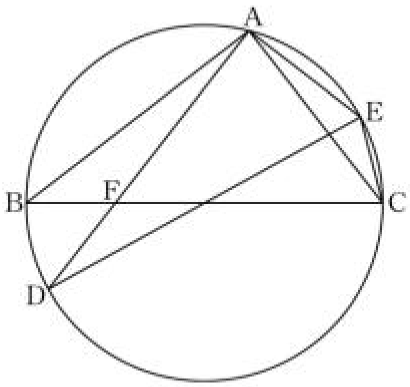
14번

14. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$\overline{BC}=\overline{DE}=6$, $\overline{BD}=\overline{BF}$, $\sin(\angle DBF)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이다. 삼각형 ABF의 넓이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $4\sqrt{2}$



[정답] ①

$\angle DBF=\angle DAE=\theta$, $\angle BAD=\angle EAC=\frac{\pi}{2}-\theta$

→ 삼각형 ACE에서 $\overline{CE}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times 6=2$

→ 삼각형 BDF에서 $\overline{BD}=\overline{BF}=\overline{CE}=2$

→ $\cos(\angle DBF)=\frac{8-\overline{DF}^2}{8}$

→ $\overline{DF}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

→ $\overline{BF}\times\overline{CF}=\overline{AF}\times\overline{DF}$

→ $\overline{AF}=2\sqrt{3}$

→ $\overline{DF}:\overline{AF}=2:3$

→ $\triangle BDF=2\times 2\times\sin\theta\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

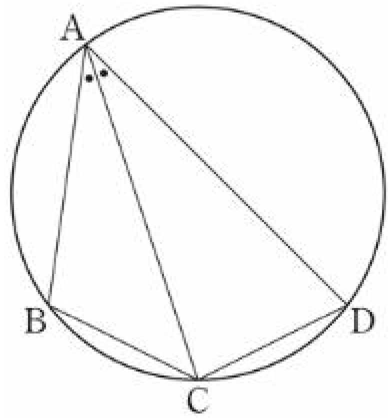
→ $\triangle ABF=2\sqrt{2}$

유사 문항 확인

14-(1). [정답] ①

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

(2023학년도 수능 11번)



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

15번

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 $t(t \neq 0, 4)$에 대하여 함수

$$g(x) = |x-t|f(x)$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 k에 대하여

$$\lim_{x \to k} \frac{g(x)}{x(x-4)}$$

의 값은 항상 존재하고, 그 값이 음수가 되도록 하는 서로 다른 자연수 k의 개수는 2이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 세 실근은 정수이다.

$g(2t)$의 값은?

① 100 ② 108 ③ 116 ④ 124 ⑤ 132

[정답] ②

$g(0)=0$, $g(4)=0$

→ $f(0)=0$, $f(4)=0$

→ $f(x)=x(x-4)(x-a)$

→ $\lim_{x \to k} \frac{|x-t|x(x-4)(x-a)}{x(x-4)} = |k-t|(k-a)$

→ $k<a$이면 $\lim_{x \to k} \frac{g(x)}{x(x-4)}$의 값이 음수

→ k의 개수는 2이므로 $2<a \leq 3$

→ $a=3$, $t=3$

→ $f(x)=x(x-4)(x-3)$

→ $g(x)=|x-4|f(x)$

→ $g(6)=108$

유사 문항 확인

15-(1). [정답] 65

최고차항 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. $\left(단,\ g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)\right)$

(2026학년도 수능 21번)

21. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$$

라 하자. 함수 $h(x)$와 함수 $g(x)=\sin x$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립한다.
> $$h(x)=x^2+\frac{1}{2}x+f(0)+1$$
>
> (나) 방정식
> $$h(g(x))=1$$이
> 구간 $0 \le x \le 2\pi$에서 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 모든 근의 곱은 $\alpha\pi^3$이다.

$12\alpha+f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

[정답] 7

$f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자.

$$h(x)=\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}=f(x)+a$$

따라서 조건 (가)에서 $a=1$이고, $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+f(0)$ 이라 할 수 있다.

조건 (나)에서 $f(g(x))+1=1$이므로 $f(g(x))=0$

$\sin^2x+\frac{1}{2}\sin x+f(0)=0$이다.

$\sin x=t$라 하자.

이때 실근이 3개이므로 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi$이다.

또한 서로 다른 두 근을 t_1, t_2라 하면 $-1<t_1, t_2<1$이다.

$t_2=1$이라 하자.

$k=-\frac{3}{2}$이고 $2t^2+t-3=(2t+3)(t-1)=0$

$t=-\frac{3}{2}$이므로 모순이다.

$t=-1$이면 $2t^2+t-1=(2t-1)(t+1)=0$

이므로 $f(0)=-\frac{1}{2}$이고 $\sin x=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$이므로 $\frac{5}{24}\pi^3$이고 $\alpha=\frac{5}{24}$이다.

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{9}{2}$

$12\alpha+f(2)=7$

수학 영역

22번

22. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le 2|x|) \\ 2|x| & (f(x)>2|x|) \end{cases}$$

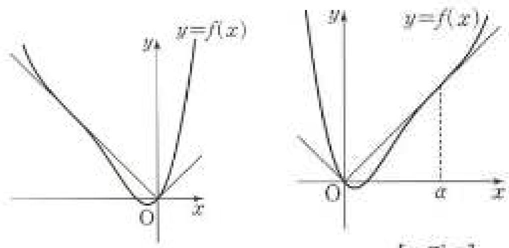
라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 극댓값과 극솟값 중 오직 하나만 가지고 $x>0$에서 그 값을 가진다.

$f'(2)$의 값을 구하시오. [4점]

[정답] 30

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=2|x|$의 그래프의 교점을 P라 할 때, 점 P에서의 접선은 $y=2x$ 또는 $y=-2x$이다.
$y=f(x)$와 $y=2|x|$와 점 $(0,0)$에서 만날 때, 점 $(0,0)$에서의 접선은 $y=2x$ 또는 $y=-2x$이다.
(ⅰ) 점 $(0,0)$에서의 접선이 $y=2x$인 경우
$f'(1)=2$이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.
곡선 $y=f(x)$와 $y=2|x|$의 그래프가 $x<0$에서 반드시 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림1]과 같다.
이는 조건을 만족하지 못한다.



[그림 1] [그림 2]

(ⅱ) 점 $(0,0)$에서의 접선이 $y=-2x$인 경우
$f'(0)=-2$이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 4인 사차함수이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$는 $x>0$에서 $y=2|x|$의 그래프가 반드시 만난다.
이때 $y=f(x)$의 그래프는 [그림2]와 같으므로 조건을 만족하는 경우는 (ⅱ)인 경우다.
$f(x)-2x=4x(x-\alpha)^3$,
$f'(x)-2=4(x-\alpha)^3+12x(x-\alpha)^2$
$\alpha^3=1$이므로 $\alpha=1$이다.
$f'(x)=4(x-1)^3+12x(x-1)^2+2$
$f'(2)=30$