제 2 교시

수학 영역

해원수학 김성민T

5지선다형

1. 두 다항식 $A=x^2-x+1$, $B=-x^2+2x$에 대하여 $A+B$는? [2점]

① $-x-1$ ② $-x+1$ ③ $x-1$
④ $x+1$ ⑤ $2x+1$

2. 등식 $x^2+(a-1)x-1=x^2+2x+b$가 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a=3$
$b=-1$

3. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$, $\mathrm{Q}(-2,\ 1)$ 사이의 거리는? [2점]

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

$\sqrt{9+1}$

4. 등식 $(2+3i)(1-i)=a+bi$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$5+i$

5. 좌표평면 위의 세 점 A$(a,\ 3)$, B$(-2,\ 5)$, C$(3,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\dfrac{a-2+3}{3}=1$, $a=2$

$\dfrac{3+5+b}{3}=2$, $b=-2$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x+3<3x \\ 3x+4<2x+8 \end{cases}$의 해가 $a<x<b$일 때, ab의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x<4 \end{cases}$ $\dfrac{3}{2}\times 4=6$

7. 다항식 $(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2$가 $(x^2+a)(x^2+b)$로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^2+1=t$

$t^2+3t+2=(t+1)(t+2)$

$=(x^2+2)(x^2+3)$

8. 부등식 $|2x-1| \leq 5$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$-5 \leq 2x-1 \leq 5$

$-2 \leq x \leq 3$

9. 좌표평면 위의 점 $(1,\ a)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A 라 하자. 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2,\ b)$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$A(a, 1)$

$B(a, -1)$

$=(2, b)$

$a=2$

$b=-1$

10. 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$ 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$3x+y=10$

$(0, 10)$

11. 연립방정식 $\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$(2x-y)^2=0$

$y=2x$

$x+4x-10=0$

$x=2$

$y=4$

12. 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-3i$이고 다른 한 근을 α라 하자. 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{1}{\alpha}=a+bi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① $-\dfrac{1}{13}$ ② $-\dfrac{2}{13}$ ③ $-\dfrac{3}{13}$ ④ $-\dfrac{4}{13}$ ⑤ $-\dfrac{5}{13}$

$\alpha=2+3i$

$\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$

$a=\dfrac{2}{13}$

$b=\dfrac{-3}{13}$

13. 직선 $y=x+k$ 가 이차함수 $y=x^2-2x+4$ 의 그래프와 만나고, 이차함수 $y=x^2-5x+15$ 의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 정수 k 의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$x^2-3x+4-k=0$

$D=9-16+4k\geq 0,\ k\geq \frac{7}{4}$

$x^2-6x+15-k=0$

$D/4=9-15+k<0,\ k<6$

$\frac{7}{4}\leq k<6$

$k=2,3,4,5$

14. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha^2+3\alpha+3}+\frac{1}{\beta^2+3\beta+3}$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ -1

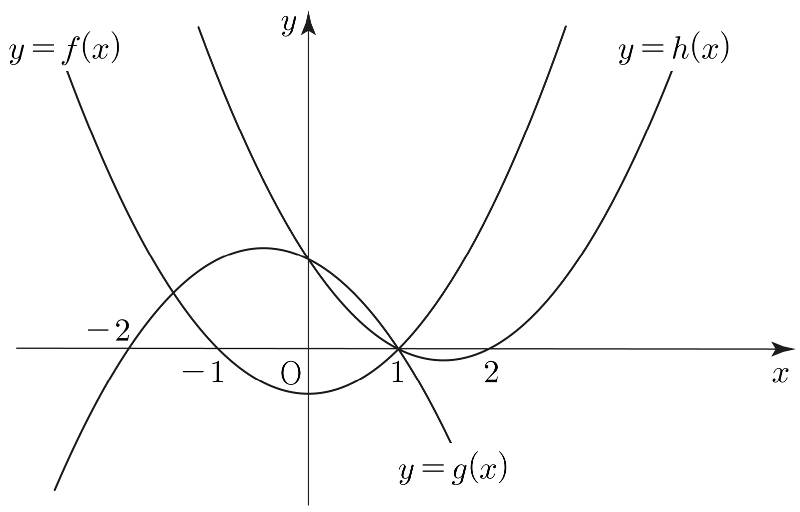
$\alpha^2+2\alpha+3=0,\ \alpha^2+2\alpha=-3$

$\beta^2+2\beta+3=0,\ \beta^2+2\beta=-3$

$\frac{1}{-3+\alpha+3}+\frac{1}{-3+\beta+3}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{3}$

15. 그림과 같이 최고차항의 계수의 절댓값이 같은 세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 있다. 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a>0$

$f(x)=a(x+1)(x-1)=a(x^2-1)$

$g(x)=-a(x+2)(x-1)=a(-x^2-x+2)$

$h(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)$

$f(x)+g(x)+h(x)=a(x^2-4x+3)$

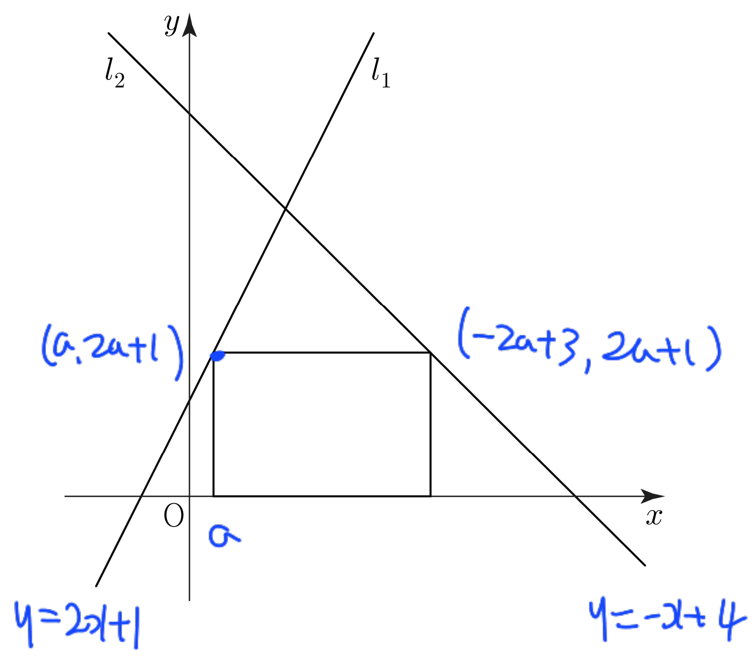
$=a(x-1)(x-3)=0$

$x=1,3$

16. 그림과 같이 두 직선

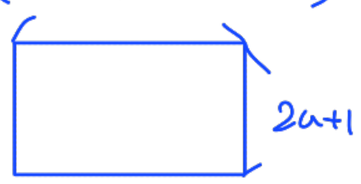
l_1 : $2x-y+1=0$
l_2 : $x+y-4=0$

과 x축으로 둘러싸인 부분에 직사각형이 있다. 이 직사각형의 한 변은 x축 위에 있고 두 꼭짓점은 각각 직선 l_1, l_2 위에 있을 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{23}{8}$ ② 3 ③ $\frac{25}{8}$ ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{27}{8}$

$(-2a+3)-a=-3a+3$

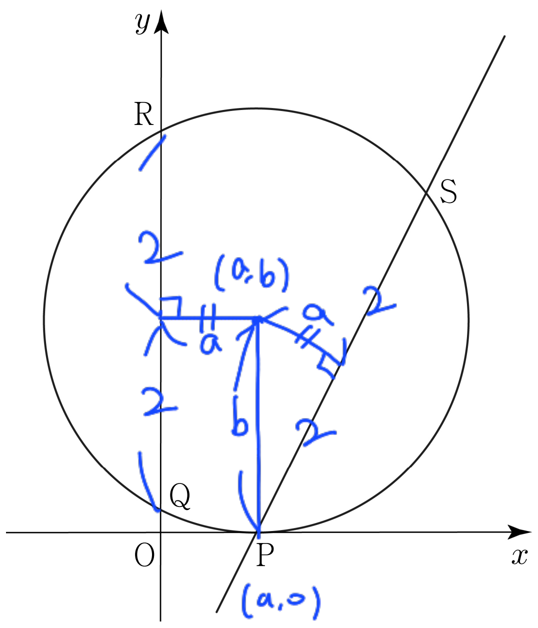


$S=(-3a+3)(2a+1)$

$=-6a^2+3a+3$

$=-6(a-\frac{1}{4})^2+\frac{27}{8}$

17. 그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 점 P에서 접하며 y축과 두 점 Q, R에서 만나는 원이 있다. 점 P를 지나고 기울기가 2인 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 S라 할 때, $\overline{QR}=\overline{PS}=4$를 만족시킨다. 원점 O와 원의 중심 사이의 거리는? [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

$b^2=a^2+4$

$PS \Rightarrow y=2(x-a),\ 2x-y-2a=0$

$(a,b) \sim 2x-y-2a=0$

$\dfrac{|2a-b-2a|}{\sqrt{5}}=a$

$b^2=5a^2$

$a^2+4=5a^2,\ a^2=1$

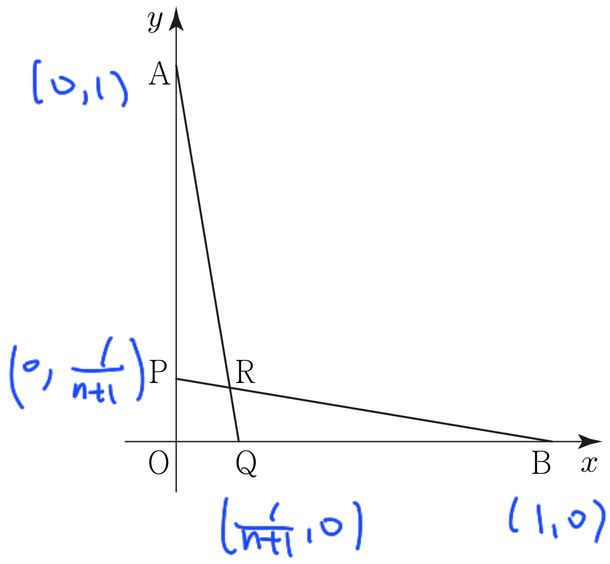
$a=1$

$b^2=5,\ b=\sqrt{5}$

$(0,0)\sim(1,\sqrt{5})$

$\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$

18. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 A$(0,\ 1)$, B$(1,\ 0)$이 있다. 양수 n과 원점 O에 대하여 선분 OA를 $1:n$으로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 $1:n$으로 내분하는 점을 Q, 선분 AQ와 선분 BP가 만나는 점을 R라 하자. 다음은 사각형 POQR의 넓이가 $\dfrac{1}{42}$일 때, n의 값을 구하는 과정이다.



점 P의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{1}{n+1}\right)$,

점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{n+1},\ 0\right)$이다.

직선 AQ의 방정식은 $y=-(n+1)x+1$,

직선 BP의 방정식은 $y=\boxed{(가)}\times x+\dfrac{1}{n+1}$이다.

두 직선 AQ, BP가 만나는 점 R의 x좌표는 $\boxed{(나)}$이고

삼각형 POR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n+1}\times\boxed{(나)}$이다.

두 삼각형 POR와 삼각형 QOR에서

선분 OR가 공통이고 $\overline{OP}=\overline{OQ}$, $\angle POR=\angle QOR$이므로

삼각형 POR와 삼각형 QOR는 합동이다.

따라서 사각형 POQR의 넓이는 삼각형 POR의 넓이의

2배이므로 $n=\boxed{(다)}$이다.

기울기 $\dfrac{0-\frac{1}{n+1}}{1-0}$

$-\dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{1}{n+2}$

$-(n+1)x+1=-\dfrac{1}{n+1}x+\dfrac{1}{n+1}$

$-(n+1)^2x+(n+1)=-x+1$

$x=\dfrac{n}{n^2+2n}=\dfrac{1}{n+2}$

$2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{42}$

$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{42}$

5

$n=5$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $\dfrac{g(k)}{f(k)}$의 값은? [4점]

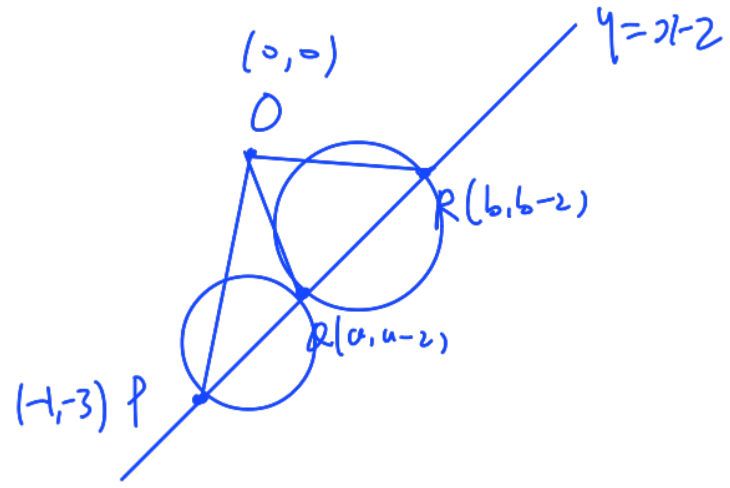
① $-\dfrac{5}{7}$ ② $-\dfrac{6}{7}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{8}{7}$ ⑤ $-\dfrac{9}{7}$

$\dfrac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{6}}=-\dfrac{6}{n}$

19. $-1 < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y = x - 2$ 위에 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -3)$, $\mathrm{Q}(a,\ a-2)$, $\mathrm{R}(b,\ b-2)$가 있다. 선분 PQ를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 QR를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 삼각형 OPR와 두 원 C_1, C_2가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) 삼각형 OPR의 넓이는 $3\sqrt{2}$이다.
(나) 원 C_1과 원 C_2의 넓이의 비는 $1:4$이다.

① $4\sqrt{2}+2$ ② $4\sqrt{2}+1$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}-1$ ⑤ $4\sqrt{2}-2$



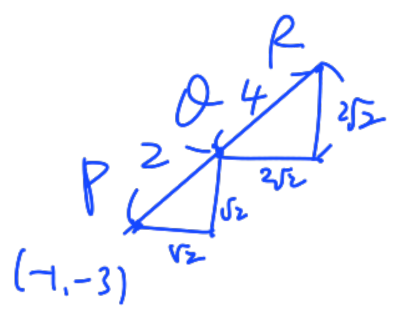
(0,0)~ $x-y-2=0$ $\dfrac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\frac{1}{2} \times PR \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $PR = 6$

C_1 넓이 : C_2 넓이 $= 1:4$

$\Rightarrow C_1$ 지름 : C_2 지름 $= 1:2$

$PQ:QR = 1:2$ $PQ=2, QR=4$



$Q(-1+\sqrt{2}, -3+\sqrt{2})$ $a = \sqrt{2}-1$

$R(-1+3\sqrt{2}, -3+3\sqrt{2})$ $b = 3\sqrt{2}-1$

$a+b = 4\sqrt{2}-2$

20. 복소수 $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $z^3 = 1$
ㄴ. $z^4 + z^5 = -1$
ㄷ. $z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} = -1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n의 개수는 66이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$2z+1 = \sqrt{3}i$

$4z^2+4z+1 = -3$

$z^2+z+1 = 0$

$(z-1)(z^2+z+1) = 0$

$z^3-1 = 0$,

ㄱ. $z^3 = 1$

ㄴ. $z^4+z^5 = z+z^2 = -1$

ㄷ. $n = 3k-2 \to -1$

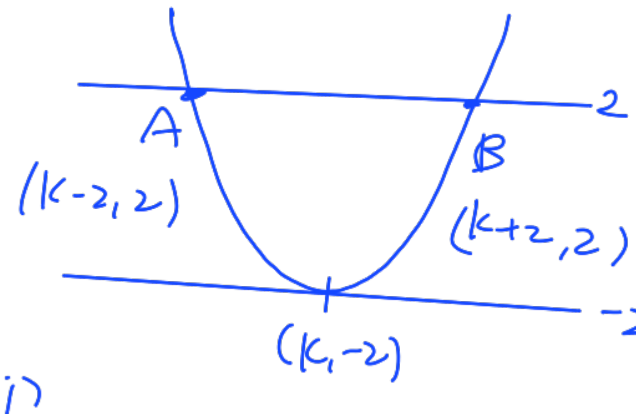
$n = 3k-1 \to -1$

$n = 3k \to 5$

$33 \times 2 + 1 = 67$

21. 실수 k에 대하여 이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되도록 하는 서로 다른 k의 개수를 n, k의 최댓값을 M이라 하자. $n+M$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $7+\sqrt{3}$ ② $7+2\sqrt{3}$ ③ $7+3\sqrt{3}$
④ $9+2\sqrt{3}$ ⑤ $9+3\sqrt{3}$

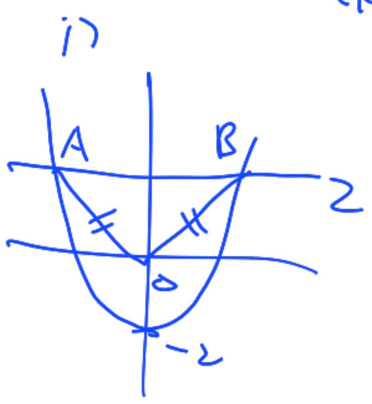


$(x-k)^2-2=2$

$x=k\pm 2$

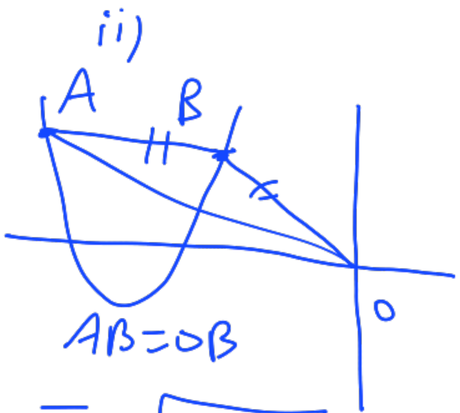
$\overline{AB}=4$

i)



$\boxed{k=0}$

ii)



$AB=OB$

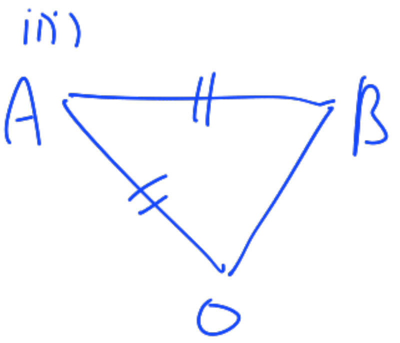
$\overline{OB}=\sqrt{k^2+4k+8}=4$

$k^2+4k-8=0$

$k=-2\pm\sqrt{12}=-2\pm2\sqrt{3}$

$\boxed{k=-2-2\sqrt{3}}$

iii)



$4=\sqrt{k^2-4k+8}$

$k^2-4k-8=0$

$k=2\pm\sqrt{12}$

$\boxed{k=2\pm2\sqrt{3}}$

$n=5,\ M=2+2\sqrt{3}$

$n+M=7+2\sqrt{3}$

단 답 형

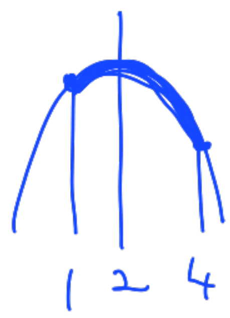
22. 다항식 x^3+2x^2-x+2를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

$\boxed{16}$

$2\rightarrow 8+8-2+2=16$

23. $1\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+15$의 최솟값을 구하시오. [3점]

$\boxed{11}$



$x=4\Rightarrow -4+15=11$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-24=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$D/4 = k^2-4k+4-k^2+24>0$

$k<7$

$1\sim6$ 6개

25. 점 $(2,\ 5)$를 지나고 직선 $3x+2y-4=0$에 수직인 직선의 방정식이 $2x+ay+b=0$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

$\boxed{8}$

$y=-\frac{3}{2}x+2$ 기울기 : $-\frac{3}{2}$

$\Downarrow$

수직 $\Rightarrow$ 기울기 $\frac{2}{3}$

$y=\frac{2}{3}(x-2)+5$

$3y=2x-4+15$

$2x-3y+11=0$

$a=-3$

$b=11$

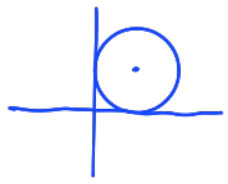
$a+b=8$

26. 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C가 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.) [4점]

$\boxed{9}$

(가) 원 C의 중심은 제1사분면 위에 있다. (나) 원 C는 x축과 y축에 동시에 접한다.

$(-1,-2) \rightarrow (-1+m, -2+n)$



반지름 : 3 $\rightarrow$ 3

$-1+m=-2+n=3$

$m=4$

$n=5$

27. x에 대한 연립이차부등식

$$\begin{cases} x^2-10x+21 \le 0 \\ x^2-2(n-1)x+n^2-2n \ge 0 \end{cases}$$

$-n$

$-(n-2)$

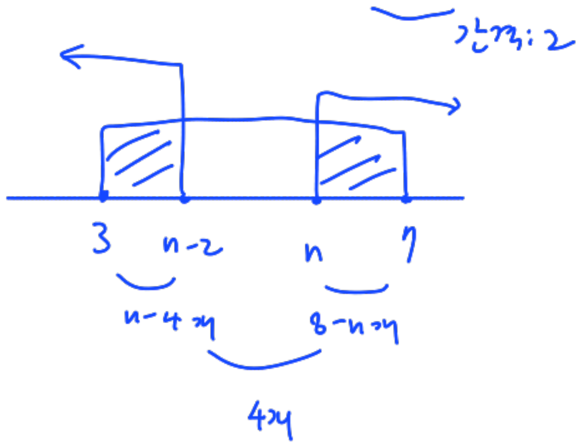
을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{30}$

$(x-3)(x-7) \le 0 \rightarrow 3 \le x \le 7$

$(x-n)(x-n+2) \ge 0 \rightarrow x \le n-2,\ x \ge n$

간격: 2

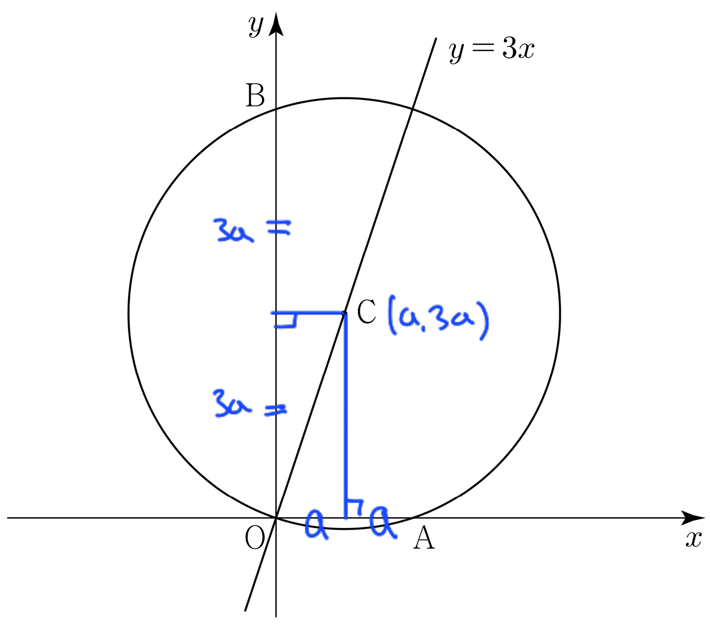


$n = 4, 5, 6, 7, 8$

28. 그림과 같이 원의 중심 $\mathrm{C}(a,\ b)$가 제1사분면 위에 있고, 반지름의 길이가 r이며 원점 O를 지나는 원이 있다. 원과 x축, y축이 만나는 점 중 O가 아닌 점을 각각 A, B라 하자. 네 점 O, A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+r^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{14}$

(가) $\overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{OA}} = 4$ (나) 두 점 O, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=3x$이다.



$6a-2a=4a=4,\ a=1$

$C(1,3) \quad r=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$a+b+r^2 = 1+3+10$

29. 다항식 $P(x)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 삼차다항식 $Q(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=(x^2-x)P(x)$$

를 만족시킨다. $P(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(3)$ 의 값을 구하시오. (단, 다항식 $Q(x)$ 의 계수는 실수이다.) [4점] $\boxed{54}$

$x=0 \to (Q(1))^2+(Q(0))^2=0,\quad Q(1)=0,\ Q(0)=0$

$x=1 \to (Q(2))^2+(Q(1))^2=0,\quad Q(1)=0,\ Q(2)=0$

$\therefore\ Q(x)=x(x-1)(x-2)$

$Q(x+1)=x(x-1)(x+1)$

$\{x(x-1)(x+1)\}^2+\{x(x-1)(x-2)\}^2=x(x-1)P(x)$

$x^2(x-1)^2\{(x+1)^2+(x-2)^2\}=x(x-1)P(x)$

$P(x)=x(x-1)(2x^2-2x+5)$

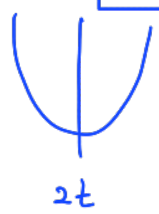
$x(x-1)(2x^2-2x+5)=x(x-1)\{(x-2)(2x+2)+9\}$

$=\underbrace{x(x-1)(x-2)}_{Q(x)}(2x+2)+\underbrace{9x(x-1)}_{R(x)}$

$R(3)=9\cdot3\cdot2=54$

30. $t\geq0$ 인 실수 t 에 대하여 $t\leq x\leq t+3$ 에서 이차함수 $f(x)=x^2-4tx+10t$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 $g(t)$ 라 하자. t 에 대한 방정식 $g(t)=-4t+a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 범위는 $p<a<q$ 이다. $4p+7q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 상수이다.) [4점] $\boxed{225}$

$f(x)=(x-2t)^2+10t-4t^2$



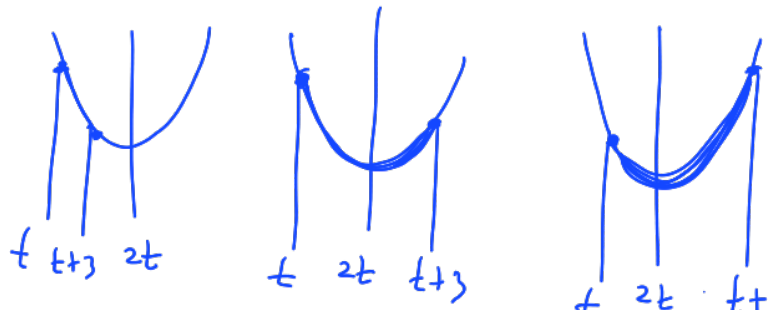
$t\geq0$

$f(t)=10t-3t^2$

$f(2t)=10t-4t^2$

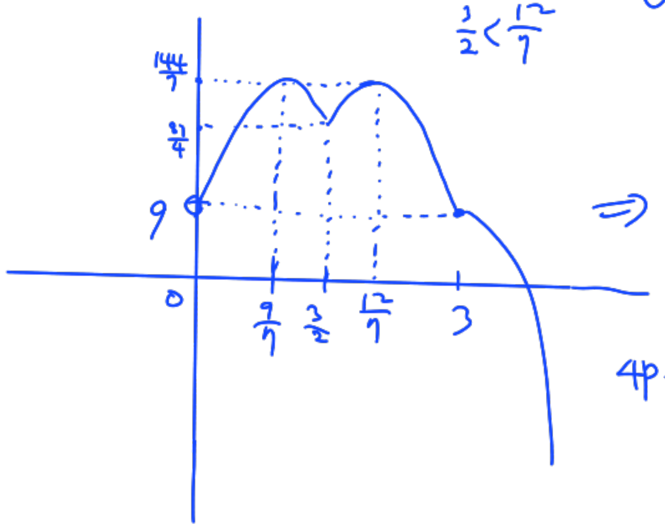
$f(t+3)=t^2+6t+9-4t^2-12t+10t$
$=-3t^2+4t+9$

$\boxed{g(t)+4t=a}$



	$t>3$	$\frac{3}{2}<t<3$	$0<t<\frac{3}{2}$
大	$f(t)$	$f(t)$	$f(t+3)$
小	$f(t+3)$	$f(2t)$	$f(2t)$

$g(t)=-6t^2+14t+9$	$g(t)=-7t^2+20t$	$g(t)=-7t^2+14t+9$
$g(t)+4t=-6t^2+18t+9$	$g(t)+4t=-7t^2+24t$	$g(t)+4t=-7t^2+18t+9$
$=-6(t-\frac{3}{2})^2+\frac{45}{2}$	$=-7(t-\frac{12}{7})^2+\frac{144}{7}$	$=-7(t-\frac{9}{7})^2+\frac{144}{7}$
$g(3)=9$	$g(\frac{3}{2})=\frac{81}{2}$, $\frac{3}{2}<\frac{12}{7}$	$g(0)=9$, $\frac{9}{7}<\frac{3}{2}$



$\Rightarrow \underset{p}{\frac{81}{4}}<a<\underset{q}{\frac{144}{7}}$

$4p+7q=81+144$
$=\boxed{225}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.