21번 미분 활용 자작문제 해설

(가) 조건은 모든 실수 x에 대하여 함수 $y=h(x)$가 미분가능하다고 해석할 수 있다.

따라서 $h'(x)=(|f(x)|)'-(|g(x)|)'$로 볼 때,

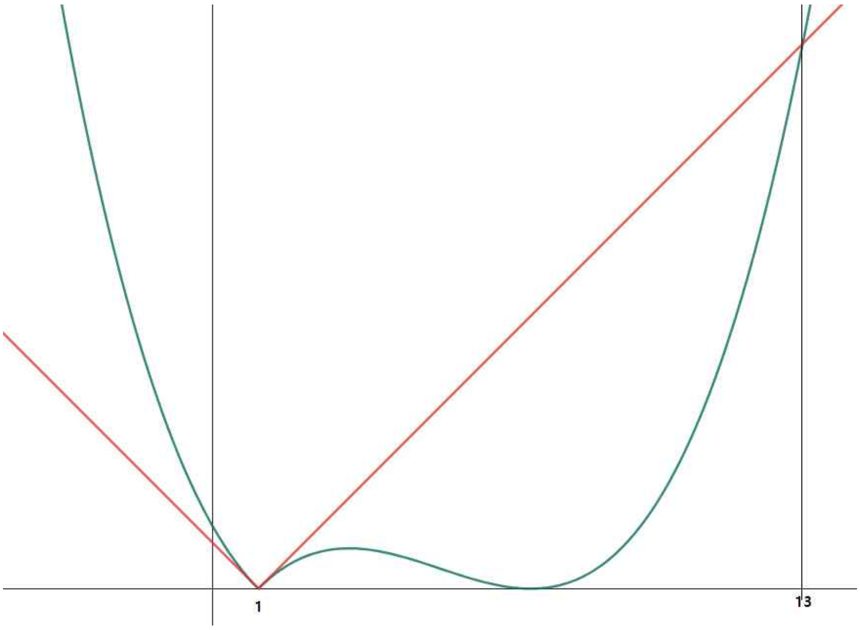
$|f(x)|$와 $|g(x)|$가 첨점을 가지면 미분이 불가능하다. 그러나 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 삼차함수와 일차함수이므로 적어도 하나의 실근을 반드시 갖고 $|f(x)|$와 $|g(x)|$는 적어도 하나의 첨점을 반드시 갖는다.

만약, 이 첨점의 위치가 다르다면 $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 좌미분계수와 우미분계수가 같을 수 없다. 첨점의 위치가 같았다고 할 지라도, $f(x)$와 $g(x)$의 x절편에서의 기울기가 다르다면 좌미분계수와 우미분계수가 같을 수 없다.

그러므로 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 접점이 두 함수의 x절편이 되어야 한다.

또한 (나) 조건을 만족하기 위해서는 $|f(x)|$와 $|g(x)|$의 교점이 $x=13$이 되어야 하고, $x=13$의 좌, 우에서 $|f(x)|-|g(x)|$의 부호가 바뀌어야 한다.

따라서 $|f(x)|$와 $|g(x)|$는 다음과 같은 그림이 되어야 한다.



이때, 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(3)=0$이므로 $x=3$에서 극대 또는 극소를 가져야한다.

$x=3$에서 극대를 갖는 경우, 비율관계에 의해 $x=7$에서 극솟값을 갖는다.

만약, $x=7$에서 그래프가 x축에 접한다면 삼차함수와 직선과의 관계에서 세 실근의 합은 항상 같으므로 위의 조건을 모두 만족시킨다.

따라서 $f(x)=k(x-1)(x-7)^2$ 또는 $f(x)=-k(x-1)(x-7)^2$이다. (단, $k>0$)

ⅰ) $f(x)=k(x-1)(x-7)^2$인 경우

$g(x)$의 그래프가 $f(x)$의 그래프보다 위쪽에 그려지므로 $f(3)-g(3)<0$이다.

그러므로 모순이다.

ⅱ) $f(x) = -k(x-1)(x-7)^2$인 경우

$g(x)$의 그래프가 $f(x)$의 그래프보다 아래쪽에 그려지므로 $f(3)-g(3)>0$이므로

$f(3)-g(3)=10$을 만족시킬 수 있다.

이때, $g(x) = -36k(x-1)$이므로

$f(3) = -32k$, $g(3) = -72k$이다.

따라서 $f(3)-g(3) = -32k-(-72k) = 40k = 10$이므로 $k = \frac{1}{4}$이다.

$f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)(x-7)^2$이므로

$f(-5) = -\frac{1}{4} \times (-6) \times (-12)^2 = 216$