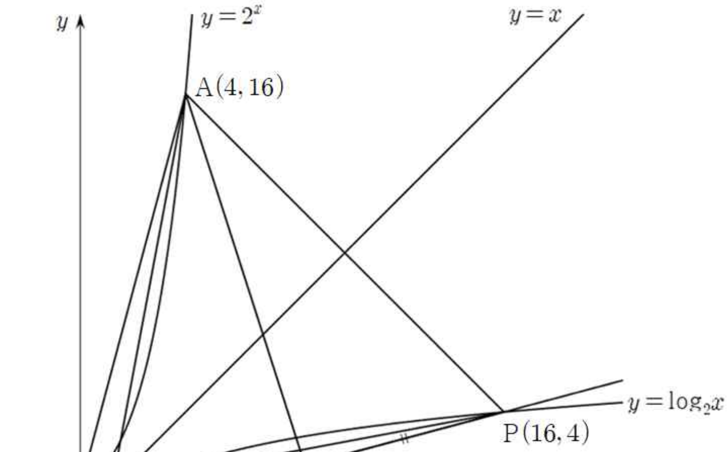
22. 곡선 $y=2^x$ 위에 점 $\mathrm{A}(4,16)$과 $\mathrm{B}(0,1)$이 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하자. 곡선 $y=2\log(x-a)+b$가 서로 다른 두 점 P, Q를 지날 때, 네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 AQP의 넓이의 2배이다.
(나) 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{4}{15}$이다.

삼각형 AQP의 넓이를 S라 할 때, $a\times S$의 값을 구하시오. (단, 점 Q의 x좌표는 16보다 작다.) [4점]

<풀이>

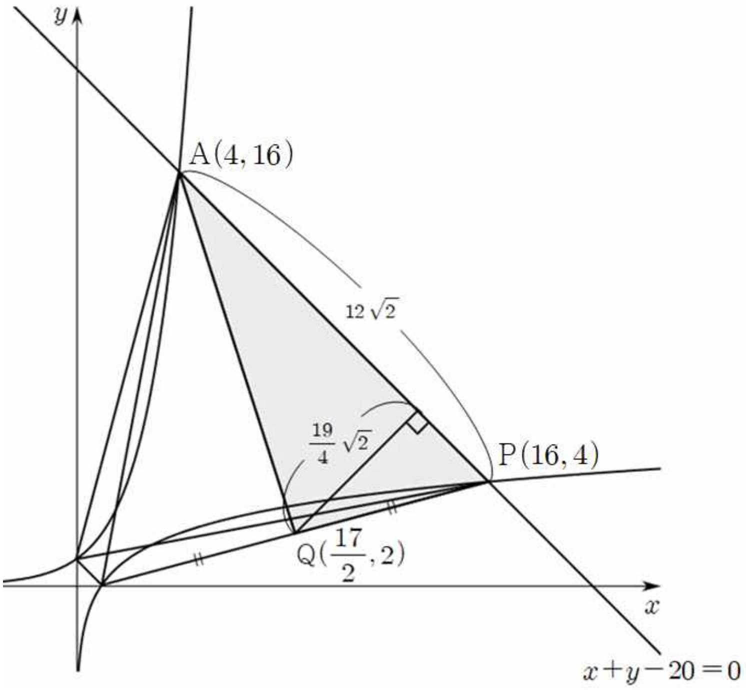
점 A$(4, 16)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(16, 4)$이다.
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 R이라 할 때, 점 R의 좌표는 $(1, 0)$이다. 점 P, R을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{15}$이므로 점 R은 직선 PQ 위에 존재하며, 직선 PQ는 직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선과 일치한다.
삼각형 ABP를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 삼각형 ARP와 일치하므로, 삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 ARP의 넓이와 같다.
따라서 (삼각형 ABP의 넓이)=(삼각형 ARP의 넓이)=2×(삼각형 AQP의 넓이)이므로, 점 Q는 선분 RP의 중점 또는 선분 RP를 3:1로 외분하는 점이다.
그런데 점 Q의 x좌표는 16보다 작으므로, 점 Q의 좌표는 선분 PR의 중점인 $\left(\frac{17}{2}, 2\right)$이다.



점 A와 점 P를 지나는 직선의 방정식은 $x+y-20=0$이고, 선분 AP를 밑변으로 하는 삼각형 AQP의 높이는 점 Q와 직선 $x+y-20=0$ 사이의 거리와 같다.
선분 AP를 밑변으로 하는 삼각형 AQP의 높이를 h라 할 때,

$$h=\frac{\left|\frac{17}{2}+2-20\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{19}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{19}{4}\sqrt{2}$$

$\overline{\mathrm{AP}}=12\sqrt{2}$이므로, 삼각형 AQP의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times\frac{19}{4}\sqrt{2}\times12\sqrt{2}=57$이다.



곡선 $y=2\log(x-a)+b$는 $(16,4)$, $(\frac{17}{2},2)$를 지나므로,

$4=2\log(16-a)+b$ ········· ㉠,

$2=2\log(\frac{17}{2}-a)+b$ ········· ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면,

$2=2\log\left(\frac{16-a}{\frac{17}{2}-a}\right)$, $\frac{16-a}{\frac{17}{2}-a}=10$

$16-a=85-10a$, $9a=69$, $\therefore\ a=\frac{23}{3}$

따라서 $a\times S=\frac{23}{3}\times 57=23\times 19=437$이다.

<u>답: 437</u>

inspired by 260922