제 2 교시

2027학년도 씨에스엠17 ENS 모의고사 문제지

수 학 영 역

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

내 맘이란 추는 나를 더 깊게 더 깊게

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

씨에스엠17

ENS
EBS NEXT STEP

연계 체감을 실전 점수로 바꾸는 모의고사

씨에스엠17 ENS 모의고사

씨에스엠17 ENS 모의고사는 씨에스엠17 수능 수학 콘텐츠 전문팀이 수능특강 우수 문항을 선별하여 제작한 **100% 수능특강 변형문항**으로 구성된 모의고사입니다.

평가원 모의고사와 수능은 수능특강에서 50% 이상이 연계됩니다.
하지만 평가원은 수능특강 문항의 소재만 연결하여 변형하기 때문에 연계 체감을 느끼기 어렵습니다.
씨에스엠17 ENS 모의고사를 풀며 수능특강 문항이 어떻게 바뀌어 평가원 시험지에 등장할 지 적중 예상 문제들을 확인해 보세요!

✓ 이런 학생이 학습하면 좋습니다.

5등급 이하 학생	3-4등급 학생	1-2등급 학생
수능특강을 풀었지만 '왜 이렇게 변형되는지' 감이 오지 않는 학생	기출은 충분히 풀었지만, 연계 변형 대비가 불안한 학생	연계 문항을 푸는 수준을 넘어 평가원 수능을 예측하고 싶은 학생

「2027 ENS 수능특강」 에서는
씨에스엠17에서 선별 제작한 수능특강의 더 많은 변형문항을 확인할 수 있습니다.
※ ENS 수능특강 + 수능완성은 ENS 모의고사와 중복 문항이 없습니다.

▲ ENS 수능특강 + 수능완성 구매 하기

「ENS 수능특강」 구매 시 「ENS 수능 완성」 무료 제공

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times 4^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[2027 수능특강 수학1 1단원 예제 1]

2. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

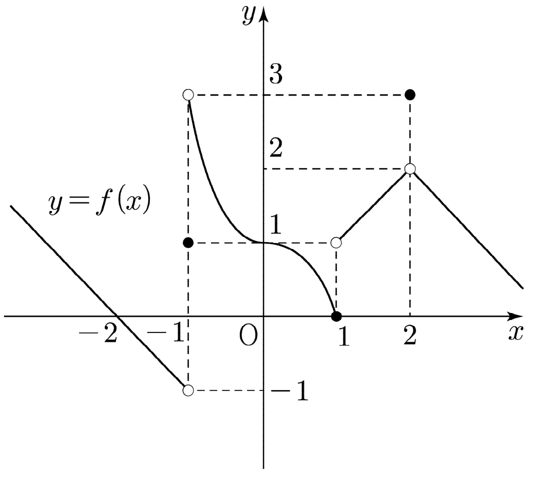
[2027 수능특강 수학2 3단원 Level2 1]

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)<0$이고 $\tan\theta=2$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[2027 수능특강 수학1 3단원 유제 7]

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 2}f(x)$의 값은? [3점]

① −1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[2027 수능특강 수학2 1단원 유제 2]

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x)f(x)-12}{x-2}=-2$일 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

[2027 수능특강 수학2 3단원 Level2 4]

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_4+2a_6=0,\quad a_7=10$$

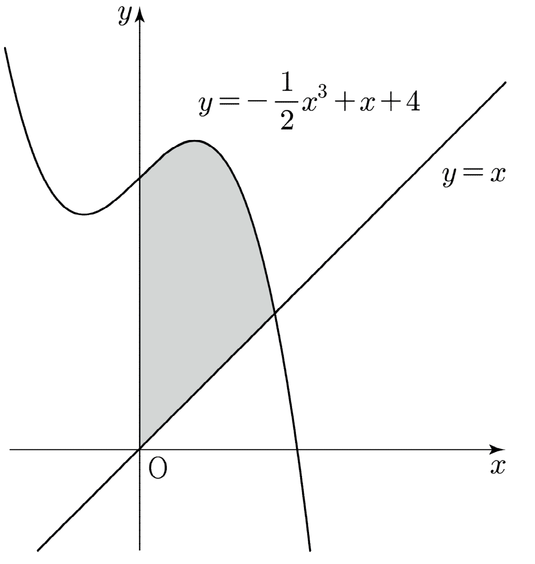
일 때, a_9의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

[2027 수능특강 수학1 5단원 유제 1]

7. 곡선 $y=-\frac{1}{2}x^3+x+4$와 y축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



[2027 수능특강 수학2 7단원 Level1 3]

8. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 두 점

$$\mathrm{A}\,(\log 2,\, \log 8),\quad \mathrm{B}\left(\log_2 a,\, \log_a \frac{1}{8}\right)$$

이 있다. 원점 O에 대하여 두 직선 OA, OB가 서로 수직일 때, a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

[2027 수능특강 수학1 1단원 Level2 8]

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x) = x^3 + x^2 + x\int_{-3}^{3} tf(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $F(1)$의 값은? [4점]

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

[2027 수능특강 수학2 6단원 Level2 3]

10. 공비가 -1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$2a_5 = a_4 + 12,\quad S_4 = 5(a_3 + a_4)$$

일 때, S_3의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

[2027 수능특강 수학1 5단원 유제 9]

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 9t^2 + 15t,\quad x_2 = at^2 - 10at + b$$

이다. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 모든 순간 두 점 P, Q가 만날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

[2027 수능특강 수학2 5단원 유제 7]

12. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(a\cos x - 1)\cos x \geq \left(2\cos x - \frac{2}{a}\right)\sin x$$

가 성립할 때, 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

[2027 수능특강 수학1 3단원 Level 2 8]

13. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)^2}{\lvert f(x+1)\rvert - \lvert f(x-1)\rvert}$ 의 값이 존재하지 않는다.

$f(0)$의 값은? [4점]

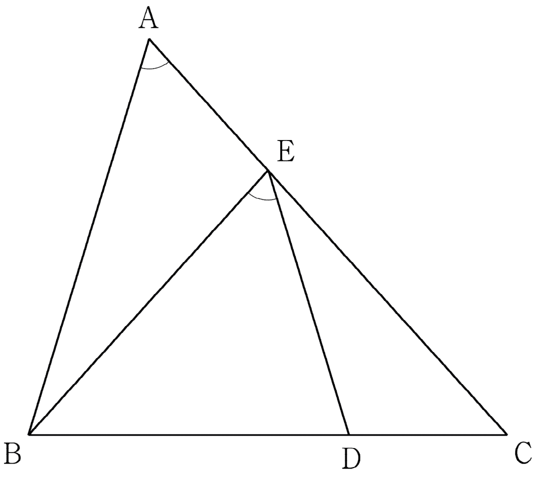
① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

[2027 수능특강 수학2 1단원 Level 3 1]

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 AC 위의 점 E를 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{CE}}$가 되도록 잡을 때, $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BED}$이다.

$$\sin(\angle\mathrm{CDE}):\sin(\angle\mathrm{CED})=\sqrt{5}:1$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{127}{11}\pi$　② $\dfrac{129}{11}\pi$　③ $\dfrac{131}{11}\pi$　④ $\dfrac{133}{11}\pi$　⑤ $\dfrac{135}{11}\pi$

[2027 수능특강 수학1 4단원 Level 2 10]

15. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 1 & (f(x)<1) \\ -f(x)+2 & (f(x)\geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt \times \int_2^x g(t)\,dt = -\frac{1}{4}$을 만족시키는 실수 x가 존재한다.

$f(1)=f(2)$일 때, $f(3)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

[2027 수능특강 수학2 6단원 Level 3 3]

단답형

16. 방정식 $\log_4 \frac{x}{6} + \log_4 (x-5) = 1$의 실근을 구하시오. [3점]

[2027 수능특강 수학1 2단원 예제 5]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$f(1)=10, \quad f'(x)=6x^2-4x$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[2027 수능특강 수학2 6단원 유제 2]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8}(a_k+k)=8, \quad \sum_{k=1}^{7}(a_k+a_8)=2$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

[2027 수능특강 수학1 6단원 Level 1 1]

19. 두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2, \quad g(x)=-x^3+12x$$

에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 부등식 $f(x)+k \ge g(x)$가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

[2027 수능특강 수학2 5단원 Level 1 6]

20. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+1}=2n \qquad \cdots \text{㉠}$$

을 만족시킨다. 다음은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{2^{k-1}}{a_{2^{k-1}}a_{2^k}}$의 값을 구하는 과정이다.

> ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2=1$
> ㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하여 정리하면
> $a_{n+1}+a_{n+2}=2n+2$
> 위 식에서 ㉠을 빼면
> $a_{n+2}-a_n=2$
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{2n}=\boxed{\text{(가)}}$
> 한편 $k\ge 2$일 때 2^{k-1}과 2^k의 값은 항상 짝수이므로
> $a_{2^k}-a_{2^{k-1}}=\boxed{\text{(나)}}$
> 따라서
> $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{2^{k-1}}{a_{2^{k-1}}a_{2^k}}=\boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times\big(f(16)+g(6)\big)$의 값을 구하시오. [4점]

[2027 수능특강 수학1 6단원 유제 8]

21. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $x_1 < x_2$인 모든 실수 x에 대하여
> $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$이다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 방정식은 $y=-2x+8$이다.

[2027 수능특강 수학1 4단원 Level 2 5]

22. 1보다 큰 세 상수 a, b, m에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(-bx),\quad g(x)=-2\log_a\left(\frac{bx}{2}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{m}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이고 두 직선 BC, AD가 점 $(-1, -1)$에서 만날 때, $a\times b$의 값을 구하시오. [4점]

[2027 수능특강 수학1 2단원 Level 2 6]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 4개의 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

[2027 수능특강 확률과 통계 1단원 유제 3]

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \mid B^C) = \frac{3}{4}, \quad \mathrm{P}(A^C \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[2027 수능특강 확률과 통계 4단원 Level 1 3]

25. 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 $99\,\%$의 신뢰구간이 $\frac{7}{50}\overline{x} \le m \le 3.72$이다. σ의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[2027 수능특강 확률과 통계 7단원 유제 7]

26. 1부터 7까지의 자연수를 임의로 일렬로 나열할 때,
6의 약수끼리는 서로 이웃하지 않고,
8의 약수끼리도 서로 이웃하지 않도록 나열할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{420}$ ② $\frac{1}{210}$ ③ $\frac{1}{140}$ ④ $\frac{1}{105}$ ⑤ $\frac{1}{84}$

[2027 수능특강 확률과 통계 3단원 Level 1 5]

27. 이산확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고

$$k(k+1)\times \mathrm{P}(X=k)=a \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[2027 수능특강 확률과 통계 5단원 Level 1 1]

28. 두 집합 $X=\{2, 4, 6\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$\frac{x_1}{f(x_1)}+\frac{x_2}{f(x_2)}$가 자연수가 되도록 하는 집합 X의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2가 존재한다.

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{16}{27}$ ③ $\frac{65}{108}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{67}{108}$

[2027 수능특강 확률과 통계 3단원 Level 2 3]

단답형

29. 주머니에 숫자 4가 적힌 흰 공 1개와 검은 공 5개가 들어 있고, 검은 공에는 숫자 6 또는 9가 적혀 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱의
> 십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합을 기록하고,
> 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.

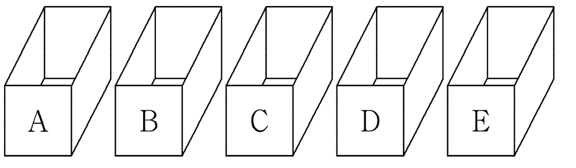
이 시행을 100번 하여 기록한 모든 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=840$일 때, $\mathrm{P}(X \le 810)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

[2027 수능특강 확률과 통계 6단원 예제 4]

30. 그림과 같이 다섯 개의 빈 상자 A, B, C, D, E가 일렬로 놓여 있다. 같은 종류의 사탕 20개를 다섯 개의 상자에 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 아무것도 넣지 않은 상자는 하나뿐이다.
> (나) 이웃한 두 상자에 들어 있는 사탕의 개수의 합은 항상 3 이상의 홀수이다.



[2027 수능특강 확률과 통계 2단원 Level 2 5]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

[2027 수능특강 미적분 3단원 유제 7]

24. $\int_1^e \frac{\left(\ln(ex)\right)^2}{x}dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

[2027 수능특강 미적분 6단원 유제 4]

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

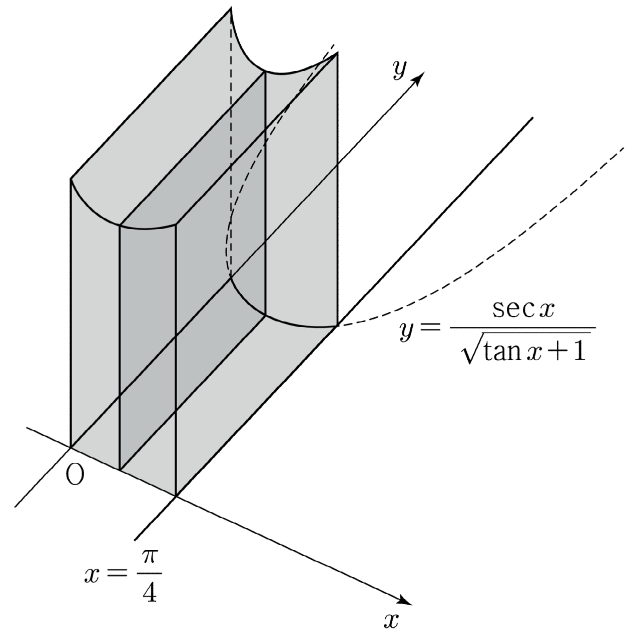
$$\frac{{a_n}^2-1}{n}<a_n-\frac{n}{4}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+a_n}-n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[2027 수능특강 미적분 1단원 Level 2 2]

26. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{\sec x}{\sqrt{\tan x+1}}$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

[2027 수능특강 미적분 7단원 예제 4]

27. 함수

$$f(x)=xe^{2-2x^2}-ax$$

가 극값을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$일 때, $\alpha\times\beta$의 값은? (단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$) [3점]

① $-4e^{\frac{5}{2}}$ ② $-3e^{\frac{5}{2}}$ ③ $-2e^{\frac{5}{2}}$ ④ $-3e^{\frac{3}{2}}$ ⑤ $-2e^{\frac{3}{2}}$

[2027 수능특강 미적분 5단원 Level 1 4]

28. 실수 t에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{x-t}{(x-t)^2+1}$$

가 있다. 임의의 두 양의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)f(x_2)\geq m$이 되도록 하는 실수 m의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $\int_{-5}^{5}g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $-\frac{\ln 3}{4}-1$ ② $-\frac{\ln 2}{4}-1$ ③ $\frac{\ln 2}{4}-1$
④ $\frac{\ln 3}{4}-1$ ⑤ $\frac{\ln 2}{2}-1$

[2027 수능특강 미적분 6단원 Level 3 3]

단답형

29. 공차가 4보다 큰 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=-\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}\right|=1$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

[2027 수능특강 미적분 2단원 Level 3 1]

30. $f'(3)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\cos\left(\pi f(x)\right)$$

가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha\geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, $\cdots$ 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(\alpha_1)>0$, $f(\alpha_2)+f(\alpha_4)=\dfrac{\alpha_2+1}{4}$

(나) $g(\alpha_2)=-1$, $g(\alpha_4)=0$

$f(6)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2027 수능특강 미적분 3단원 Level 3 2]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

제 2 교시

2027학년도 씨에스엠17 ENS 모의고사

정답 및 해설

※ 시험이 끝나기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

씨에스엠17

2027학년도 씨에스엠17 ENS 모의고사

정답 및 해설

씨에스엠17 모의고사

[공통]

1	⑤	**2**	②	**3**	①	**4**	③	**5**	④
6	④	**7**	①	**8**	③	**9**	②	**10**	⑤
11	④	**12**	②	**13**	③	**14**	⑤	**15**	①
16	8	**17**	18	**18**	5	**19**	7	**20**	125
21	12	**22**	96						

[해설]

1. 정답 ⑤

$\sqrt[3]{54}\times 4^{\frac{1}{3}}=(2\times 3^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2\times 3=6$

2. 정답 ②

$f(x)=x^3-2x^2+4x$ 에서

$f'(x)=3x^2-4x+4$

이므로 구하는 값은

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=3$

3. 정답 ①

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)<0$ 에서 $\cos\theta<0$ 이고

$\tan\theta=2>0$

이므로 $\sin\theta<0$

따라서 구하는 값은

$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 정답 ③

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1+2=1$

5. 정답 ④

$g(x)=(x^2+x)f(x)$ 라 하자.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-12}{x-2}=-2$ 에서 (분모)→0 이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0 이어야 한다.

즉,

$g(2)=6f(2)=12$

$\therefore\ f(2)=2$

이고

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=g'(2)=-2$

$g(x)=(x^2+x)f(x)$ 에서

$g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$

이므로

$g'(2)=5f(2)+6f'(2)=-2$

$\therefore\ f'(2)=-2\ (\because\ f(2)=2)$

6. 정답 ④

$a_2+a_4+2a_6=0$ 에서 등차중항의 성질에 의하여

$2a_3+2a_6=0$

$a_2+a_7=0$

$\therefore\ a_2=-10\ (\because\ a_7=10)$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$a_7-a_2=5d=20$

$\therefore\ d=4$

따라서 구하는 값은

$a_9=a_7+2d=18$

7. 정답 ①

방정식 $-\dfrac{1}{2}x^3+x+4=x$ 에서

$x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x^2+2x+4>0)$

따라서 구하는 값은

$\int_0^2\left\{\left(-\dfrac{1}{2}x^3+x+4\right)-x\right\}dx$

$=\int_0^2\left(-\dfrac{1}{2}x^3+4\right)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{8}x^4+4x\right]_0^2$

$=-2+8=6$

8. 정답 ③

직선 OA 의 기울기는

$\dfrac{\log 8}{\log 2}=\log_2 8=3$

직선 OB 의 기울기는

$\dfrac{\log_a\frac{1}{8}}{\log_2 a}=-3\left(\dfrac{1}{\log_2 a}\right)^2$

이고, 두 직선 OA, OB 가 서로 수직이므로

$3\times\left\{-3\left(\dfrac{1}{\log_2 a}\right)^2\right\}=-1$

$(\log_2 a)^2=9$

$\log_2 a=3\ (\because\ a>1)$

$\therefore\ a=8$

9. 정답 ②

$\int_{-3}^3 tf(t)\,dt=a$ 라 하자.

$F(x)=x^3+x^2+ax$ 에서

$f(x)=3x^2+2x+a$

이므로

$\int_{-3}^3 tf(t)\,dt=\int_{-3}^3(3t^3+2t^2+at)\,dt$

$=4\int_0^3 t^2\,dt$

$=4\left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^3=36=a$

따라서

$F(x)=x^3+x^2+36x$

이므로 $F(1)=38$

10. 정답 ⑤

$a_1=0$ 이면 $2a_5=a_4+12$ 에서

$0\neq 0+12$

이므로 $a_1\neq 0$ 이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r\ (r\neq -1)$ 이라 하자.

$S_4=5(a_3+a_4)$ 에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=5(a_3+a_4)$

$a_1+a_2=4(a_3+a_4)$

$\dfrac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=\dfrac{1}{4}\ (\because\ a_1+a_2\neq 0)$

$r^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ r=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=\dfrac{1}{2}$

이때 $r=\dfrac{1}{2}$ 이면 $2a_5=a_4+12$ 에서

$\dfrac{1}{8}a_1\neq\dfrac{1}{8}a_1+12$

이므로 $r=-\dfrac{1}{2}$ 이어야 한다.

$\dfrac{1}{8}a_1=-\dfrac{1}{8}a_1+12$

$\therefore\ a_1=48$

따라서 구하는 값은

$S_3=a_1+a_2+a_3$

$=48+(-24)+12=36$

11. 정답 ④

점 P 의 시각 $t\ (t\geq 0)$ 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$v(t)=3t^2-18t+15$

방정식 $v(t)=0$ 에서

$3(t-1)(t-5)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=5$

따라서 점 P 는 시각 $t=1$ 또는 $t=5$ 일 때 운동 방향을 바꾼다.

$x_1(1)=1-9+15=7$,

$x_2(1)=a-10a+b=-9a+b$

이고, 주어진 조건에 의하여 $x_1(1)=x_2(1)$ 이므로

$-9a+b=7$ $\cdots$ ㉠

또한

$x_1(5)=125-225+75=-25$,

$x_2(5)=25a-50a+b=-25a+b$

이고, 주어진 조건에 의하여 $x_1(5)=x_2(5)$ 이므로

$-25a+b=-25$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=2,\ b=25$

따라서 구하는 값은

$a+b=27$

12. 정답 ②

주어진 부등식에서

$(a\cos x-1)\cos x\geq\dfrac{2}{a}(a\cos x-1)\sin x$

$\left(\cos x-\dfrac{1}{a}\right)\left(\cos x-\dfrac{2}{a}\sin x\right)\geq 0$

이때 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 두 곡선 $y=\cos x$,

$y=\dfrac{2}{a}\sin x$ 는 a 의 값에 관계없이 한 점에서 만나고,

교점의 x 좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

$0<x<\alpha$ 일 때 $\cos x-\dfrac{2}{a}\sin x>0$,

$\alpha<x<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $\cos x-\dfrac{2}{a}\sin x<0$

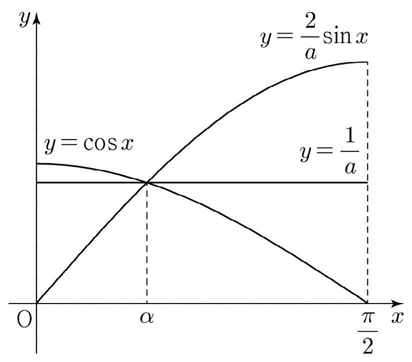
이므로 주어진 조건을 만족시키려면

$0<x<\alpha$ 일 때 $\cos x-\dfrac{1}{a}>0$,

$\alpha<x<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $\cos x-\dfrac{1}{a}<0$

즉, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 x 에 대한 방정식

$\cos x-\dfrac{1}{a}=0$ 의 실근이 α 이어야 한다.



$\cos\alpha=\dfrac{1}{a}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 값은

$$a=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

13. 정답 ③

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2}{|f(x+1)|-|f(x-1)|}\qquad\cdots\ ㉠$$

에서 $x\to3$일 때 (분자)$\to0$이고 극한값이 존재하지 않으므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to3}\big(|f(x+1)|-|f(x-1)|\big)=0$$

$\therefore\ |f(4)|=|f(2)|$

이때 $f(2)\neq0$, $f(4)\neq0$이면 두 함수 $f(x+1)$, $f(x-1)$이 $x=3$의 근방에서 부호가 바뀌지 않는다. 즉, $x=3$의 근방에서 $|f(x+1)|-|f(x-1)|$은 이차 이하의 다항식이므로 ㉠의 값이 존재한다.

$\therefore\ f(2)=f(4)=0$

따라서

$f(x)=(x-2)(x-4)$

이므로 $f(0)=8$

14. 정답 ⑤

점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=4$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$

이고, 주어진 조건에서

$\sin(\angle\mathrm{CDE}):\sin(\angle\mathrm{CED})=\sqrt{5}:1$

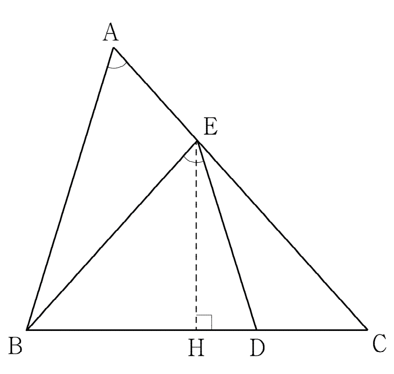
이므로 삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\mathrm{CDE})}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CED})}$$

$$\overline{\mathrm{CE}}=\frac{\sin(\angle\mathrm{CDE})}{\sin(\angle\mathrm{CED})}\times\overline{\mathrm{CD}}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{5}\ \ (\because\ \overline{\mathrm{CD}}=2)$

한편, 삼각형 BEC는 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형이므로 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{BH}}=3$, $\overline{\mathrm{DH}}=1$

삼각형 BHE에서

$$\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BE}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2}=\sqrt{11}$$

이므로 삼각형 DHE에서

$$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DH}}^2+\overline{\mathrm{EH}}^2}=2\sqrt{3}$$

따라서 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BED}=\theta$라 하면, 삼각형 BED에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2-\overline{\mathrm{BD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{DE}}}=\frac{20+12-16}{2\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{165}}{15}$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2R$$

$$R=\frac{6}{2\times\frac{\sqrt{165}}{15}}=\frac{3\sqrt{165}}{11}$$

이므로 구하는 값은

$$\pi R^2=\frac{135}{11}\pi$$

15. 정답 ①

조건 (가)에 의하여 $g(0)=0$이고 $f(0)<1$이면 $g(0)=1$이므로 $f(0)\geq1$이어야 한다.

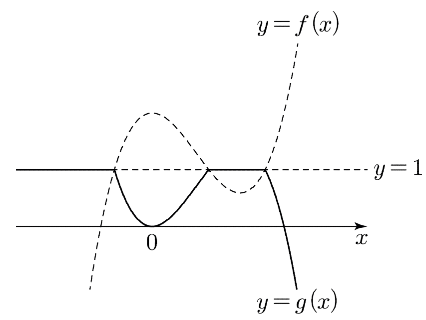
즉,

$g(0)=-f(0)+2=0$

$\therefore\ f(0)=2$

또한 조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



한편,

$$h(x)=\int_1^x g(t)\,dt$$

라 하면 조건 (나)의

$$\int_1^x g(t)\,dt\times\int_2^x g(t)\,dt=-\frac{1}{4}$$

에서

$$h(x)\big(h(x)-h(2)\big)=-\frac{1}{4}$$

$$\left(h(x)-\frac{h(2)}{2}\right)^2-\frac{\big(h(2)\big)^2}{4}+\frac{1}{4}=0$$

조건 (나)를 만족시키려면

$$-\frac{\big(h(2)\big)^2}{4}+\frac{1}{4}\leq0$$

$\big(h(2)\big)^2\geq1$

$\therefore\ h(2)\leq-1$ 또는 $h(2)\geq1\qquad\cdots\ ㉠$

이어야 한다.

이때 주어진 조건에 의하여 $f(1)=f(2)$이므로

$g(1)>0$, $g(2)>0$

즉,

$$h(2)=\int_1^2 g(t)\,dt>0$$

이므로 ㉠에서

$$h(2)=\int_1^2 g(t)\,dt\geq1\qquad\cdots\ ㉡$$

이어야 한다.

이때 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\leq1$

이므로

$$\int_1^2 g(t)\,dt\leq1\qquad\cdots\ ㉢$$

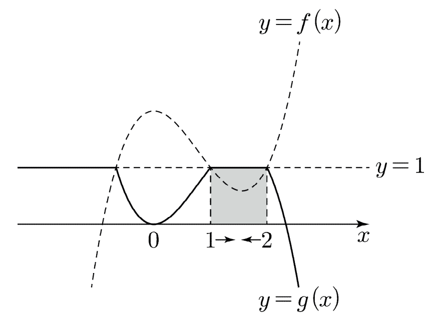
㉡, ㉢에 의하여

$$\int_1^2 g(t)\,dt=1$$

이고, 위 값을 만족시키려면

$f(1)\leq1\qquad\cdots\ ㉣$

이어야 한다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 가지므로

$f(x)=ax^2(x+b)+2$ (a, b는 상수, $a>0$)

이라 하면 $f(1)=f(2)$이므로

$a(1+b)+2=4a(2+b)+2$

$1+b=8+4b$

$\therefore\ b=-\dfrac{7}{3}$

즉,

$$f(x)=ax^2\left(x-\frac{7}{3}\right)+2$$

이므로 ㉣에 의하여

$$f(1)=-\frac{4}{3}a+2\leq1$$

$\dfrac{4}{3}a\geq1\qquad\therefore\ a\geq\dfrac{3}{4}$

따라서

$$f(3)=6a+2\geq\frac{13}{2}$$

이므로 $f(3)$의 최솟값은 $\dfrac{13}{2}$

16. 정답 8

로그의 진수 조건에 의하여

$\dfrac{x}{6}>0$, $x-5>0$

$\therefore\ x>5$

주어진 방정식에서

$$\log_4\frac{x}{6}+\log_4(x-5)=1$$

$$\log_4\left\{\frac{x}{6}(x-5)\right\}=\log_4 4$$

$$\frac{x}{6}(x-5)=4$$

$x^2-5x-24=0$

$(x+3)(x-8)=0$

$\therefore\ x=8\ \ (\because\ x>5)$

17. 정답 18

$f'(x)=6x^2-4x$에서

$f(x)=2x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=10$이므로

$f(1)=2-2+C=10$

$\therefore\ C=10$, $f(x)=2x^3-2x^2+10$

따라서 구하는 값은

$f(2)=16-8+10=18$

18. 정답 5

$\sum_{k=1}^{8}(a_k+k)=8$ 에서

$\sum_{k=1}^{8}a_k+\frac{8\times 9}{2}=8$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=-28$

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+a_8)=2$ 에서

$\sum_{k=1}^{7}a_k+7a_8=2$

$\sum_{k=1}^{8}a_k+6a_8=2$

$6a_8=30$ $(\because \sum_{k=1}^{8}a_k=-28)$

$\therefore a_8=5$

19. 정답 7

$f(x)+k\ge g(x)$ 에서

$x^3+3x^2+k\ge -x^3+12x$

$2x^3+3x^2-12x+k\ge 0$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x+k$ 라 하면

$h'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

방정식 $h'(x)=0$ 에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

이므로 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	k	$\searrow$	$k-7$	$\nearrow$	$k+4$

따라서 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $k-7$ 이므로 주어진 조건을 만족시키려면

$k-7\ge 0$ $\quad\therefore k\ge 7$

따라서 구하는 값은 7

20. 정답 125

$a_n+a_{n+1}=2n$ $\quad\cdots$ ㉠

㉠에 $n=1$ 을 대입하면 $a_2=1$ $(\because a_1=1)$

㉠에 n 대신 $n+1$ 을 대입하여 정리하면

$a_{n+1}+a_{n+2}=2n+2$

위 식에서 ㉠을 빼면

$a_{n+2}-a_n=2$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{2n}=\boxed{2n-1}$

한편 $k\ge 2$ 일 때 2^{k-1} 과 2^k 의 값은 항상 짝수이므로

$a_{2^k}-a_{2^{k-1}}=(2^k-1)-(2^{k-1}-1)$

$=\boxed{2^{k-1}}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{2^{k-1}}{a_{2^{k-1}}a_{2^k}}$$

$$=\frac{1}{a_1a_2}+\sum_{k=2}^{6}\frac{2^{k-1}}{a_{2^{k-1}}a_{2^k}}$$

$$=1+\sum_{k=2}^{6}\left(\frac{1}{a_{2^{k-1}}}-\frac{1}{a_{2^k}}\right)\ (\because a_1=a_2=1)$$

$$=1+\sum_{k=2}^{6}\left(\frac{1}{2^{k-1}-1}-\frac{1}{2^k-1}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{63}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{63}=\boxed{\frac{125}{63}}$$

따라서

$f(n)=2n-1,\ g(k)=2^{k-1},\ p=\frac{125}{63}$

이므로 구하는 값은

$p\times\left(f(16)+g(6)\right)=\frac{125}{63}(31+32)=125$

21. 정답 12

$g(x)=xf(x)$ 라 하자.

조건 (가)에 의하여 삼차함수 $g(x)$ 는 증가함수이므로 모든 실수 x 에 대하여

$g'(x)=f(x)+xf'(x)\ge 0$

이때 조건 (나)에 의하여

$f(2)=4,\ f'(2)=-2$

이므로

$g'(2)=4+2\times(-2)=0$

따라서

$g(x)=p(x-2)^3+8p$ (p 는 $p>0$ 인 상수)

$(\because g(0)=0)$

이라 하면

$g(2)=2f(2)=8$ $(\because f(2)=4)$

이므로

$8p=8$ $\quad\therefore p=1$

따라서

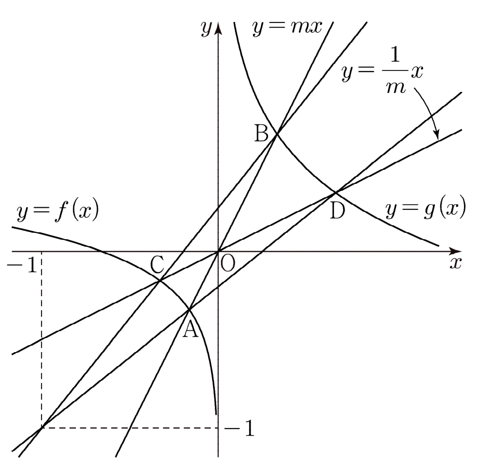
$g(x)=(x-2)^3+8=x^3-6x^2+12x$

이고

$f(x)=x^2-6x+12$

이므로 $f(6)=12$

22. 정답 96



$f(x)=\log_a(-bx),\ g(x)=-2\log_a\left(\frac{bx}{2}\right)$

이므로

$g(x)=-f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

즉, 원점 O에 대하여

$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OC}:\overline{OD}=1:2$

이므로 두 직선 AC, BD는 서로 평행하고

$\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$

이때 $E(-1, -1)$ 이라 하면

$\overline{EC}:\overline{EB}=1:2$

이므로 점 C는 선분 EB의 중점이다.

두 점 A, C의 좌표를 각각

$A(\alpha, m\alpha),\ C\left(\beta, \frac{\beta}{m}\right)$

이라 하면 점 B의 좌표는

$B(-2\alpha, -2m\alpha)$

이므로

$\frac{-1+(-2\alpha)}{2}=\beta$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{4},$

$\frac{-1+(-2m\alpha)}{2}=\frac{\beta}{m}$

$\therefore \frac{m\alpha+\frac{\beta}{m}}{2}=-\frac{1}{4}$

즉, 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ 이고,

선분 AC의 중점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

직선 AC의 기울기는 -1 이다.

이때 두 직선 AC, BD가 서로 평행하므로

직선 BD의 기울기도 -1 이고

선분 BD의 중점도 직선 $y=x$ 위에 있다.

선분 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

$\overline{BD}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로 두 점 B, D의 좌표는 각각

$B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ D\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

즉, 점 A의 좌표는 $A\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ 이고

점 A는 곡선 $y=\log_a(-bx)$ 위의 점이므로

$-\frac{1}{3}=\log_a\frac{b}{6}$ $\quad\cdots$ ㉠

또한 점 D는 곡선 $y=-2\log_a\left(\frac{bx}{2}\right)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{3}=-2\log_a\frac{b}{3}$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$\log_a\frac{b}{6}=2\log_a\frac{b}{3}$

$\frac{b}{6}=\frac{b^2}{9}$ $\quad\therefore b=\frac{3}{2}$

㉠에 $b=\frac{3}{2}$ 을 대입하면

$-\frac{1}{3}=\log_a\frac{1}{4}$

$a^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=64$

따라서 구하는 값은

$a\times b=64\times\frac{3}{2}=96$

[확률과 통계]

23	④	**24**	⑤	**25**	①	**26**	②	**27**	③
28	④	**29**	6	**30**	224				

[해설]

23. 정답 ④

4개의 문자 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

24. 정답 ⑤

$P(A|B^C)=\frac{3}{4}$ 에서

$\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{3}{4}$ $\quad\cdots$ ㉠

$P(A^C\cup B)=\frac{2}{3}$ 에서

$1-P(A\cap B^C)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$

㉠에 위 값을 대입하면

$\frac{1}{3\mathrm{P}(B^C)}=\frac{3}{4}$

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}\qquad \therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$

25. 정답 ①

정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이

$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{6}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{6}$

이므로

$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{6}=\frac{7}{50}\bar{x},\qquad \cdots$ ㉠

$\bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{6}=3.72\qquad \cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\bar{x}=\frac{7}{50}\bar{x}+3.72$

$1.86\bar{x}=3.72\qquad \therefore\ \bar{x}=2$

㉡에 $\bar{x}=2$를 대입하면

$0.43\sigma=1.72\qquad \therefore\ \sigma=4$

26. 정답 ②

1부터 7까지의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 6의 약수끼리 서로 이웃하지 않으려면 각각의 수 사이에 4, 5, 7을 나열해야 한다.
또한 8의 약수는 1, 2, 4이므로 8의 약수끼리 이웃하지 않으려면 4는 3과 6 사이에 놓여야 한다.
3, 4, 6의 묶음을 A라 하면 1, 2, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!$

3과 6을 나열하는 경우의 수는

$2!$

1, 2, A 각각의 수 사이에 5와 7을 나열하는 경우의 수는

$2!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3!\times2!\times2!}{7!}=\frac{1}{210}$

27. 정답 ③

주어진 식에서

$\mathrm{P}(X=k)=\frac{a}{k(k+1)}=a\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

전체 확률의 합은 1이므로

$$\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(X=k)=a\times\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=a\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}a=1$$

$\therefore\ a=\frac{5}{4}$

또한 주어진 식에서

$k^2\mathrm{P}(X=k)+k\mathrm{P}(X=k)=a$

이므로

$$\sum_{k=1}^{4}k^2\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=1}^{4}k\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{4}a$$

$\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)=4a$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)=5\ \left(\because\ a=\frac{5}{4}\right)$

28. 정답 ④

X에서 Y로의 함수 f의 개수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

$\frac{2}{f(2)}$가 자연수이려면 $f(2)$는 2의 약수이어야 하므로 $\frac{2}{f(2)}$가 자연수일 때와 자연수가 아닐 때의 $f(2)$의 개수는 각각 2, 4

마찬가지로 $\frac{4}{f(4)}$가 자연수일 때와 자연수가 아닐 때의 $f(4)$의 개수는 각각 3, 3

$\frac{6}{f(6)}$이 자연수일 때와 자연수가 아닐 때의 $f(6)$의 개수는 각각 4, 2

한편,

$\frac{2}{f(2)},\ \frac{4}{f(4)},\ \frac{6}{f(6)}\qquad \cdots$ ㉠

중 자연수인 것의 개수가 2 이상이면 조건을 항상 만족시킨다.

㉠의 세 값 모두 자연수일 때의 함수 f의 개수는

$2\times3\times4=24$

㉠의 세 값 중 자연수인 것의 개수가 2일 때의 함수 f의 개수는

$4\times3\times4+2\times3\times4+2\times3\times2=84$

㉠의 세 값 중 자연수인 것의 개수가 1 이하일 때 조건을 만족시키려면

'㉠의 세 값 중 두 값이 모두 자연수가 아니면서 더했을 때 자연수이어야 한다.' $\cdots$ ㉡

㉡을 만족시키려면

$f(2)=f(4)=3$ 또는 $f(2)=f(4)=6$

또는 $f(2)=f(6)=4$ 또는 $f(4)=f(6)=5$

이어야 한다.

이때 위 각각의 경우에 대하여 남은 하나의 함숫값은 어떤 값을 갖더라도 조건을 만족시키므로 ㉠의 세 값 중 자연수인 것의 개수가 1 이하일 때의 함수 f의 개수는

$4\times6=24$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$24+84+24=132$

이므로 구하는 확률은

$\frac{132}{216}=\frac{11}{18}$

29. 정답 6

세 수 4, 6, 9 중 임의로 두 수를 택하여 곱한 값은

24 또는 36 또는 54 또는 81

즉, 십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합은

6 또는 9

이때 검은 공 5개 중 숫자 6이 적힌 공의 개수를 n이라 하면 한 번의 시행에서 기록한 수가 6일 확률은

$\frac{1\times n}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{n}{15}$

따라서 주어진 시행을 100번 반복할 때 6을 기록한 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\frac{n}{15}\right)$을 따른다.

한편,

$X=6Y+9(100-Y)=900-3Y$

에서

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(900-3Y)=900-3\mathrm{E}(Y)=840$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=20$

즉,

$\mathrm{E}(Y)=100\times\frac{n}{15}=20\qquad \therefore\ n=3$

또한

$\mathrm{V}(Y)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,4^2)$을 따르고, $Z=\frac{Y-20}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{P}(X\le810)\\&=\mathrm{P}(900-3Y\le810)\\&=\mathrm{P}(Y\ge30)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.494=0.006\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은

$1000\times k=1000\times0.006=6$

30. 정답 224

다섯 개의 상자 A, B, C, D, E에 들어 있는 사탕의 개수를 각각

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ (a,b,c,d,e는 음이 아닌 정수)

라 하면, 사탕의 개수의 합은 20이므로

$a+b+c+d+e=20\qquad \cdots$ ㉠

조건 (나)에서 이웃한 두 상자에 들어 있는 사탕의 개수의 합이 항상 홀수이려면 이웃한 두 상자에 들어있는 사탕의 개수가 각각 홀수, 0 또는 짝수이어야 한다.

즉, 순서쌍 (a,b,c,d,e)는 다음 중 하나를 만족시켜야 한다.

① $a,\ c,\ e$만 홀수

② $b,\ d$만 홀수

이때 ①이면 $a+b+c+d+e$의 값은 홀수이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 ②이어야 하고, 두 수 $b,\ d$는 홀수이므로 조건 (가)에 의하여 0으로 가능한 수는 $a,\ c,\ e$이다.

(ⅰ) $a=0$인 경우

조건 (가)와 ②에 의하여 b는 3 이상의 홀수, d는 홀수이고, 두 수 $c,\ e$는 2 이상의 짝수이므로

$b=2b'+3,\ c=2c'+2,$

$d=2d'+1,\ e=2e'+2$

(b',c',d',e'은 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$b'+c'+d'+e'=6$

위 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c',\ d'$의 모든 순서쌍 (b',c',d',e')의 개수는

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

이므로 (ⅰ)의 경우의 수는 84

(ⅱ) $c=0$인 경우

조건 (가)와 ②에 의하여 두 수 $b,\ d$는 3 이상의 홀수이고, 두 수 $a,\ e$는 2 이상의 짝수이므로

$a=2p+2,\ b=2q+3,$

$d=2r+3,\ e=2s+2$

(p,q,r,s는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$p+q+r+s=5$

위 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $p,\ q,\ r,\ s$의 모든 순서쌍 (p,q,r,s)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

이므로 (ⅱ)의 경우의 수는 56

(ⅲ) $e=0$인 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 (ⅲ)의 경우의 수는 84

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$84+56+84=224$

[미적분]

23	⑤	**24**	④	**25**	②	**26**	①	**27**	③
28	②	**29**	70	**30**	83				

[해설]

23. 정답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{1+\cos x}$$
$$=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

24. 정답 ④

$\ln(ex)=t$라 하면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=e$일 때 $t=2$이고 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\frac{\left(\ln(ex)\right)^2}{x}dx=\int_1^2 t^2dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{7}{3}$$

25. 정답 ②

주어진 부등식에서

$$\frac{{a_n}^2-1}{n}<a_n-\frac{n}{4}$$
$${a_n}^2-1<na_n-\frac{n^2}{4}\ (\because\ n\text{은 자연수})$$
$${a_n}^2-na_n+\frac{n^2}{4}-1<0$$
$$\left(a_n-\frac{n}{2}+1\right)\left(a_n-\frac{n}{2}-1\right)<0$$
$$\frac{n}{2}-1<a_n<\frac{n}{2}+1$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\quad(\because\ n\text{은 자연수})$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+a_n}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n^2+a_n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{\sqrt{1+\frac{a_n}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}$$

26. 정답 ①

주어진 입체도형을 점 $(t, 0)\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{4}\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\frac{\sec t}{\sqrt{\tan t+1}}\right)^2=\frac{\sec^2 t}{\tan t+1}$$

따라서 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\tan t+1}dt$$
$$=\left[\ln(\tan t+1)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln 2$$

27. 정답 ③

$f(x)=xe^{2-2x^2}-ax$에서

$$f'(x)=e^{2-2x^2}-4x^2e^{2-2x^2}-a$$
$$=(1-4x^2)e^{2-2x^2}-a,$$
$$f''(x)=-8xe^{2-2x^2}-4x(1-4x^2)e^{2-2x^2}$$
$$=4x(4x^2-3)e^{2-2x^2}$$

이므로 방정식 $f''(x)=0$에서

$$x=0\ \text{또는}\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

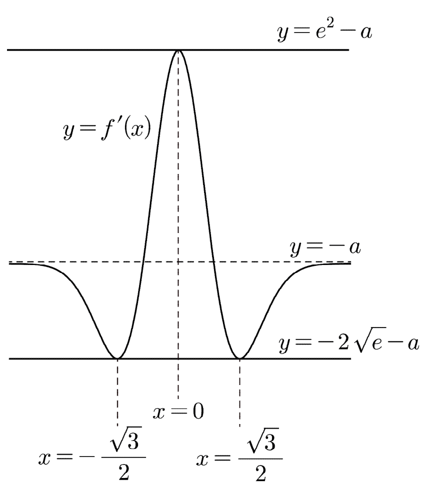
함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=-a,$$
$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{e}-a,$$
$$f'(0)=e^2-a$$

이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$$-2\sqrt{e}-a<0<e^2-a$$

즉,

$$-2\sqrt{e}<a<e^2$$

이어야 한다.

따라서

$$\alpha=-2\sqrt{e},\ \beta=e^2$$

이므로 구하는 값은

$$\alpha\times\beta=-2e^{\frac{5}{2}}$$

28. 정답 ②

$h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$라 하면 $f(x)=h(x-t)$이고,

$$h'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

방정식 $h'(x)=0$에서

$$\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}=0$$
$$\therefore\ x=-1\ \text{또는}\ x=1$$

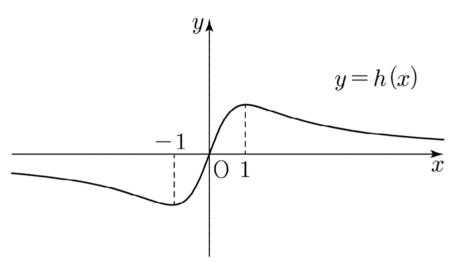
즉, 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

이때

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$$

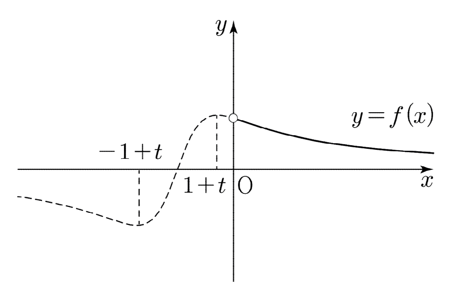
이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 t의 값의 범위에 따라 함수 $g(t)$를 구해보면 다음과 같다.

(ⅰ) $t\le0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

이므로 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

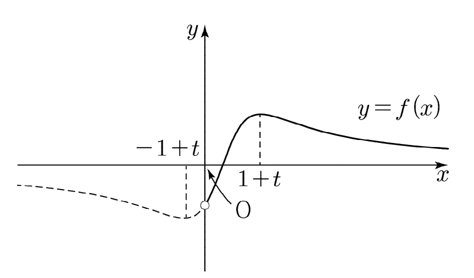
$$f(x_1)f(x_2)>0$$

따라서

$$g(t)=0$$

(ⅱ) $0<t\le1$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)\ (x>0)$의 치역은

$$\left\{y\ \middle|\ -\frac{t}{t^2+1}<y\le\frac{1}{2}\right\}$$

즉, 두 양의 실수 x_1, x_2에 대하여

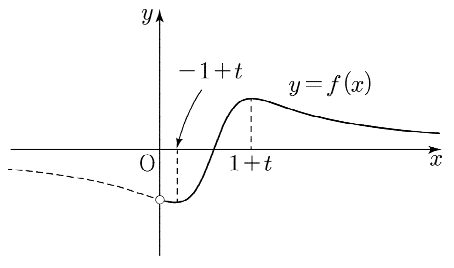
$$-\frac{t}{2(t^2+1)}<f(x_1)f(x_2)\le\frac{1}{4}$$

이므로

$$g(t)=-\frac{t}{2(t^2+1)}$$

(ⅲ) $t>1$ 일 때

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)\ (x>0)$ 의 치역은

$$\left\{y \,\middle|\, -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$$

즉, 두 양의 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$-\frac{1}{4}\le f(x_1)f(x_2)\le\frac{1}{4}$$

이므로

$$g(t)=-\frac{1}{4}$$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t\le 0) \\ -\dfrac{t}{2(t^2+1)} & (0<t\le 1) \\ -\dfrac{1}{4} & (t>1)\end{cases}$$

따라서 구하는 값은

$$\int_{-5}^{5} g(t)\,dt$$
$$=\int_{-5}^{0} g(t)\,dt+\int_0^1 g(t)\,dt+\int_1^5 g(t)\,dt$$
$$=0+\int_0^1\left(-\frac{t}{2(t^2+1)}\right)dt+\int_1^5\left(-\frac{1}{4}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2t}{t^2+1}\,dt-1$$
$$=-\frac{1}{4}\Big[\ln(t^2+1)\Big]_0^1-1$$
$$=-\frac{\ln 2}{4}-1$$

29. 정답 70

주어진 식에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}-S_n}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{2}\ \left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}=0,\ S_1=a_1\right)$$
$$\therefore\ a_1=-2$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 주어진 조건에 의하여 $d>4$ 이므로

$n=1$ 일 때 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}<0$,

$n\ge 2$ 일 때 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}>0$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right|$$
$$=-\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{S_2}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{S_2}=1$$
$$\therefore\ S_2=4$$

즉,

$$S_2=-2+a_2=4\ (\because\ a_1=-2)$$
$$\therefore\ a_2=6,\ d=8$$

따라서 구하는 값은

$$a_{10}=a_1+9d=-2+72=70$$

30. 정답 83

$g(x)=\cos\big(\pi f(x)\big)$ 에서

$$g'(x)=-\pi f'(x)\sin\big(\pi f(x)\big)$$

이므로 방정식 $g'(x)=0$ 에서

$$f'(x)=0\ \text{또는}\ \sin\big(\pi f(x)\big)=0$$

즉,

$$f'(x)=0\ \text{또는}\ f(x)=k\ (k\text{는 정수})$$

를 만족시키는 모든 0 이상의 x 의 값들을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \cdots$$

이다. (∵ [참고1])

이때 조건 (나)에서

$$g(\alpha_2)=-1,\ g(\alpha_4)=0$$

이므로

$$\pi f(\alpha_2)=\pi+2l\pi\ (l\text{은 정수}),$$
$$\pi f(\alpha_4)=\frac{\pi}{2}+m\pi\ (m\text{은 정수})$$

즉,

$$f(\alpha_2)=1+2l,\ f(\alpha_4)=\frac{1}{2}+m,\ f'(\alpha_4)=0$$

을 만족시켜야 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha_4$ 에서 극대인 경우

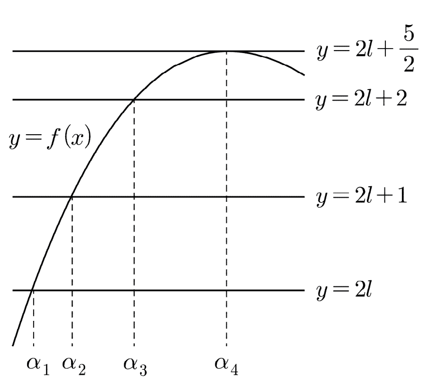
$f'(\alpha_1)>0$ 이므로 $\alpha_1<x<\alpha_4$ 에서

$$f'(x)>0$$

즉, $f(\alpha_2)=1+2l$ 에 대하여

$$f(\alpha_1)=2l,\ f(\alpha_3)=2l+2,\ f(\alpha_4)=2l+\frac{5}{2}$$

이므로 다음 그림과 같다.



이때 조건 (가)에서

$$f(\alpha_2)+f(\alpha_4)=4l+\frac{7}{2}=\frac{\alpha_2+1}{4}$$
$$\therefore\ \alpha_2=16l+13$$

이고, $0<\alpha_2<3$ 에서

$$0<16l+13<3$$

위 부등식을 만족시키는 정수 l 은 존재하지 않으므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha_4$ 에서 극소인 경우

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이면 $x<\alpha_4$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $f'(\alpha_1)>0$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이고, 다음을 만족시켜야 한다.

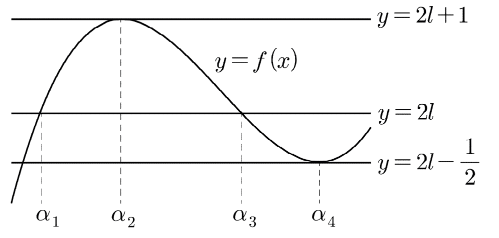
① 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha_2$ 에서 극대이다.

② $\alpha_1<x<\alpha_4$ 에서 방정식 $f(x)=f(\alpha_1)$ 의 실근은 α_3 이다.

즉, $f(\alpha_2)=1+2l$ 에 대하여

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_3)=2l,\ f(\alpha_4)=2l-\frac{1}{2}$$

이므로 다음 그림과 같다.



조건 (가)에서

$$f(\alpha_2)+f(\alpha_4)=4l+\frac{1}{2}=\frac{\alpha_2+1}{4}$$
$$\alpha_2=16l+1$$
$$\therefore\ \alpha_2=1\ (\because\ 0<\alpha_2\le 3),\ \alpha_4=3$$

따라서 $l=0$ 이므로

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_3)=0,$$
$$f(\alpha_2)=1,\ f(\alpha_4)=-\frac{1}{2}$$

이고 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)와 삼차함수의 그래프의 비율관계에 의하여

$$f(x)=a(x-1)^2(x-4)+1\ (a\text{는}\ a>0\text{인 상수})$$

라 하면 $f(3)=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$f(3)=-4a+1=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ a=\frac{3}{8},\ f(x)=\frac{3}{8}(x-1)^2(x-4)+1$$

따라서

$$f(6)=\frac{3}{8}\times 5^2\times 2+1=\frac{79}{4}$$

이고 $p=4$, $q=79$ 이므로 $p+q=83$

[참고1]

조건 (나)에 의하여 $g(\alpha_4)=0$ 에서

$$\cos\big(\pi f(\alpha_4)\big)=0$$
$$\therefore\ \sin\big(\pi f(\alpha_4)\big)\ne 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha_4$ 에서 극대 또는 극소이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 모든 실근에 대하여 함수 $g(x)$ 는 극대 또는 극소이다.

[참고2]

삼차함수의 그래프의 비율관계

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ 라 할 때

$$f'(x)=3(x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$$

이므로 다음 그림과 같은 비율관계가 성립한다.