실수 2×2 행렬의 분류

: 4가지 핵심 케이스와 기저 변환

Abstract

목표: 실수 2×2 행렬 A에 대해 적절한 기저(열벡터로 이루어진 P)를 선택하여 $[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$를 가장 단순한 형태(표준형)로 만드는 아이디어를 정리합니다.

핵심 요약:

- **서로 다른 실근:** 고유벡터들을 기저로 사용.
- **중근 (대각화 가능):** A는 이미 대각행렬(λI) 형태임.
- **중근 (대각화 불가):** 고유벡터와 일반화 고유벡터를 기저로 사용.
- **켤레복소근:** 복소 고유벡터의 실수부와 허수부를 분리하여 기저로 사용.

1 케이스 1: 서로 다른 두 실근 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

개념: 고유벡터의 독립성

서로 다른 실수 고유값에 대응하는 고유벡터들은 선형 독립입니다. 따라서 이 두 고유벡터를 기저로 선택하면 행렬은 대각화됩니다.

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} \quad (Av_i = \lambda_i v_i) \quad \Longrightarrow \quad [A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

예시

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$는 삼각행렬이므로 고유값은 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$입니다. 각 고유값에 해당하는 고유벡터 v_1, v_2를 찾아 $P = [v_1 \ v_2]$로 두면, 다음처럼 대각화됩니다.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 케이스 2: 중근 λ이며 대각화 가능한 경우

개념: 유일한 형태

$n \times n$ 행렬이 고유값을 오직 하나(λ)만 가지면서 대각화가 가능하다면, 그 행렬은 반드시 스칼라 행렬이어야 합니다.

$$A = PDP^{-1} = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda(PIP^{-1}) = \lambda I$$

즉, 2×2에서 "중근 + 대각화 가능"이라면 $A = \lambda I$ 형태가 유일합니다.

예시

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$라면, 어떤 기저를 선택하더라도 표현행렬은 항상 $2I$입니다.

3 케이스 3: 중근 λ이며 대각화 불가능 (조르당 표준형)

개념: 일반화 고유벡터

고유벡터가 1개(v_1)뿐이라면 기저가 부족하므로 '일반화 고유벡터' v_2를 도입합니다.

$$(A - \lambda I)v_1 = 0 \quad (\text{고유}), \qquad (A - \lambda I)v_2 = v_1 \quad (\text{일반화})$$

기저 $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$에서 행렬은 다음과 같은 조르당 블록이 됩니다.

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

풀이 예시

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **고유값:** $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \lambda = 2$ (중근).
2. **고유벡터** v_1**:** $(A - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
3. **일반화 고유벡터** v_2**:** $(A - 2I)v_2 = v_1$을 풉니다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 1.$$

   가장 간단한 해로 $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$을 선택합니다.

4. **결과:** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4 케이스 4: 결레복소근 $a \pm bi$ $(b \neq 0)$

개념: 복소수 구조의 행렬 표현

복소 고유값 $\lambda = a + bi$에 대응하는 실수 기저 $\mathcal{B} = \{u, v\}$를 잡으면, 행렬은 다음과 같이 표현됩니다.

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$$

여기서 단위행렬 I는 실수 1에, 행렬 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$는 허수 i에 대응됩니다.

실제로 J를 제곱해보면 다음과 같이 허수 단위의 성질($i^2 = -1$)과 정확히 일치함을 알 수 있습니다.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

풀이 예시

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **고유값:** $(2-\lambda)^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm i\sqrt{2}$. $(a = 2, b = \sqrt{2})$
2. **복소 고유벡터:** $\lambda = 2 + i\sqrt{2}$일 때,

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x - i\sqrt{2}y = 0.$$

   $y = 1$이라 두면 $x = -i\sqrt{2}$. 즉 $w = \binom{-i\sqrt{2}}{1}$.

3. **실수/허수 분리:** $w = \binom{0}{1} + i\binom{-\sqrt{2}}{0} \Rightarrow u = \binom{0}{1}, v = \binom{-\sqrt{2}}{0}$.
4. **결과:** 기저 $\mathcal{B} = \{u, v\}$에서 $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = 2I + \sqrt{2}J$.