포락선의 응용

: 곡선끼리 접하는 상황의 기계적 풀이법

Abstract

목표: 매개변수 t로 표현된 접선이나 곡선의 방정식을 다변수 함수 $F(x,t)=0$으로 설정하고, x와 t에 대한 편미분을 통해 기계적으로 연립만 하면 되는 풀이법을 익힙니다.

1 개념 정리: 포락선(Envelope)과 편미분

개념 1: 포락선(Envelope)이 대체 뭔데?

직선 자를 이용해 점과 점을 연결하는 '스트링 아트'를 본 적 있나요? 직선만 무수히 그었을 뿐인데, 어느새 부드러운 '곡선'의 형태가 나타납니다. 이렇게 규칙을 가지고 움직이는 수많은 선들이 감싸면서 만들어내는 뼈대 곡선을 바로 **'포락선'**이라고 부릅니다.
간단한 예시를 볼까요? 직선의 방정식 $y=2tx-t^2$ 이 있다고 해봅시다. t값에 $1,2,3\ldots$을 넣을 때마다 수많은 직선이 그려지겠죠? 이 수많은 직선들이 도대체 어떤 곡선을 감싸고 있는지 (포락선인지) 알아내는 방법이 있습니다. 바로 **'편미분'**입니다.

개념 2: '편미분' 요약

편미분이라는 말이 무섭게 들리지만, 고등학생도 이미 알고 있는 개념입니다. **"여러 개의 문자 중 하나만 '진짜 문자'로 보고, 나머지는 그냥 '숫자(상수)' 취급해서 미분하자!"** 이것이 전부입니다.
아까 본 식 $y=2tx-t^2$ 에서 t가 계속 변한다고 했죠? 그럼 x랑 y는 잠시 '숫자'라고 생각하고, 오직 t에 대해서만 미분해 보는 겁니다. (미분해서 0이 되는 순간을 찾습니다.)

$$0=2x-2t$$

간단하게 $t=x$ 라는 결과를 얻었습니다. 이제 이 $t=x$ 를 원래 식에 대입해 보세요.

$$y=2(x)x-(x)^2 \implies y=x^2$$

$y=x^2$ 이라는 익숙한 이차함수가 나왔습니다. 즉, $y=2tx-t^2$ 이라는 수많은 직선들은 사실 $y=x^2$ 의 접선들이었던 겁니다! 이렇게 t에 대해 편미분해서 0이 되는 식을 원래 식에 대입하면 원래의 곡선(포락선)을 바로 찾을 수 있습니다.

2 실전 적용 1: 201130

문항 30.

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$가 곡선 $y = 2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

해설 및 풀이

두 곡선이 한 점에서 만나므로 접점의 좌표를 x라 두고 연립합니다. 조건에 의해 $a = f(t)$입니다.

1. **편미분 3단계 연립:** $F(x,t) = t^3 \ln(x-t) - 2e^{x-f(t)} = 0$

$$\begin{aligned}
&[\text{조건식}] && t^3 \ln(x-t) - 2e^{x-f(t)} = 0 \\
&[x\text{로 편미분}] && \frac{t^3}{x-t} - 2e^{x-f(t)} = 0 \\
&[t\text{로 편미분}] && 3t^2 \ln(x-t) - \frac{t^3}{x-t} + 2e^{x-f(t)} f'(t) = 0
\end{aligned}$$

2. **식 정리 및 대입:** [조건식]과 [x로 편미분] 식을 연립하면 $t^3 \ln(x-t) = \frac{t^3}{x-t}$ 이므로 $\ln(x-t) = \frac{1}{x-t}$가 됩니다. 이 상수값을 만족하는 $x - t = \alpha$라 둡니다.

   [t로 편미분] 식에 $\frac{t^3}{\alpha} = 2e^{x-f(t)}$ ([x로 편미분] 변형)과 $\ln(x-t) = \frac{1}{x-t} = \frac{1}{\alpha}$ 를 대입하여 정리합니다.

$$3t^2 \left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{t^3}{\alpha} + \left(\frac{t^3}{\alpha}\right) f'(t) = 0$$

   양변에 $\frac{\alpha}{t^2}$를 곱해주면 $(t > 0)$

$$3 - t + tf'(t) = 0 \implies f'(t) = 1 - \frac{3}{t}$$

   따라서 $f'(1/3) = 1 - 9 = -8$ 이고, 정답은 $(-8)^2 = \mathbf{64}$ 입니다.

3 실전 적용 2: 241127

문항 27.

실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y = \frac{1}{e^x} + e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a) = -e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

해설 및 풀이

원점을 지나는 접선의 방정식을 $y = xf(t)$라 하고 곡선과 연립합니다.

1. **편미분 3단계 연립:** $F(x,t) = e^{-x} + e^t - xf(t) = 0$

$$\begin{aligned}
&[\text{조건식}] && e^{-x} + e^t - xf(t) = 0 \\
&[x\text{로 편미분}] && -e^{-x} - f(t) = 0 \implies f(t) = -e^{-x} \\
&[t\text{로 편미분}] && e^t - xf'(t) = 0 \implies f'(t) = \frac{e^t}{x}
\end{aligned}$$

2. **식 정리 및 대입:** 조건에서 $f(a) = -e\sqrt{e} = -e^{3/2}$ 가 주어졌으므로, 이를 [x로 편미분] 식에 대입하면 $x = -\frac{3}{2}$ 입니다.

   [조건식]에 $t = a, x = -\frac{3}{2}$를 대입하여 e^a를 구합니다.

$$e^{3/2} + e^a - \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-e^{3/2}\right) = 0 \implies e^a = \frac{1}{2}e^{3/2}$$

   마지막으로 [t로 편미분] 식에 구한 값들을 대입합니다.

$$f'(a) = \frac{e^a}{x} = \frac{\frac{1}{2}e^{3/2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}e^{3/2} = -\mathbf{\frac{1}{3}e\sqrt{e}}$$