1)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 2보다 큰 상수 a에 대하여

$$\left\{x \,\middle|\, \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(f(x))}{h}=0\right\}=\{0,\ 2,\ a\}$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{3}{2}a\right)$의 값을 구하시오.

물음	→
충분조건	도구1
설계(초안)	
필요조건	도구2
설계(확정)	

1) 정답 18

충분조건

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$

$a>2$인 상수 a

극한 조건식 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(f(x))}{h}=0$을 만족하는 x의 집합이 $\{0,\ 2,\ a\}$

도구1

분수 함수 극한의 수렴 조건 (분모가 0으로 갈 때, 극한값이 존재하려면 분자도 0으로 가야 함)

미분계수의 정의 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(f(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-(f(f(x))-f(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(f(x))-f(x)}{h}$$
$$=f'(x)-\lim_{h\to0}\frac{f(f(x))-f(x)}{h}$$

설계(초안)

주어진 극한이 0으로 수렴하기 위해서는 $h\to0$일 때 분자의 극한도 0이어야 하므로,

$f(x)-f(f(x))=0$

즉, $f(f(x))=f(x)$가 기본적으로 성립해야 함을 파악한다.

이 조건이 성립할 때 극한식은 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$로 정리되므로, 극한값이 0이라는 것은 결국 $f'(x)=0$을 의미함을 도출한다.

필요조건(결정적 열쇠)

조건들을 종합하면, 집합 $\{0,\ 2,\ a\}$는 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근이다.

또한 $x=0,\ 2,\ a$일 때 $f(f(x))=f(x)$가 반드시 성립해야 하므로, 사차함수의 극값들인 $f(0)$, $f(2)$, $f(a)$는 모두 방정식 $f(x)=x$의 실근(고정점)이어야 한다.

도구2

사차함수 그래프의 개형(W형)과 극대·극소의 위치 관계

다항함수의 식 세우기 (인수정리 및 대칭성 활용)

설계(확정)

삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로 사차함수 $f(x)$는 W자 개형이다.

$f(0)$과 $f(a)$가 극소, $f(2)$가 극대이다.

$f(0)$, $f(2)$, $f(a)$가 $y=x$ 선상에 존재하며, 두 극솟값이 $f(0)=f(a)=0$으로 같고 극댓값이 $f(2)=2$인 완벽한 선대칭 구조를 상정해 보자.
선대칭의 중심이 $x=2$가 되므로 자연스럽게 $a=4$가 도출된다.
$f(x)=kx^2(x-4)^2$로 세팅한 후 $f(2)=2$를 대입해 k을 구하고 답을 도출해 내면 된다.

[풀이]
주어진 식의 극한값은 x에 대한 함수이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(f(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-(f(f(x))-f(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(f(x))-f(x)}{h}$$

$$=f'(x)-\lim_{h\to0}\frac{f(f(x))-f(x)}{h}$$

에서 극한의 분자식 $f(f(x))-f(x)$는 h와 무관한 상수이다.
따라서 극한값이 존재하고 그 값이 0이 되려면, 분모가 0으로 수렴하므로 분자 또한 0이어야 한다.
즉, $f(f(x))-f(x)=0$ 이어야 한다.
따라서 극한값은 0이 되고, 주어진 식은 $f'(x)=0$이 된다.
주어진 집합의 조건은 $f'(x)=0$과 $f(f(x))=f(x)$를 동시에 만족하는 x의 집합이다.
즉, $\{x\mid f'(x)=0,\ f(f(x))=f(x)\}=\{0,2,a\}$ 이다.
$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로, $f'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.
$f'(x)=0$은 최대 3개의 실근을 가지며 문제에서 주어진 집합의 원소가 3개이므로 $f'(x)=0$의 근은 $x=0,2,a$이다.
$f(x)$의 최고차항 계수를 k $(k>0)$라 하면 $f'(x)$의 최고차항 계수는 $4k$이다.
따라서 $f'(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$f'(x)=4kx(x-2)(x-a)$
$f'(x)=0$의 근인 $0,2,a$는 $f(f(x))=f(x)$ 또한 만족해야 한다.
$x=0$에 대하여, $f(f(0))=f(0)$이다.
$x=2$에 대하여, $f(f(2))=f(2)$이다.
$x=a$에 대하여, $f(f(a))=f(a)$이다.
이는 함수값 $f(0)$, $f(2)$, $f(a)$가 방정식 $f(t)=t$의 근임을 의미한다.
$a>2$이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하면 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=a$에서 극솟값을, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 $f(0)<f(2)$이고 $f(a)<f(2)$이다.
$f(0)$, $f(2)$, $f(a)$가 모두 방정식 $f(t)=t$의 근이 되는 가장 간단한 경우는 다음과 같다.
(i) $f(0)=0$
(ii) $f(2)=2$
(iii) $f(a)=0$ 또는 $f(a)=2$ 또는 $f(a)=a$