4점 공략법

수학의

정상화

CONTENTS

1

무엇이 문제인가?

2

지금, 변화해야 할 때

1. 경험에서 논리로

CHAPTER

1

1

무엇이 문제인가?

1. 공부의 방향성
2. 절차의 중요성

잘못된 공부의 방향성

개별 문제에서 일반 원칙을 추출할 수 있을까?

누락과 모순

개별 문제에서의 조건으로 일반 원칙을 성급히 추출하는 것은 해서는 안 되는 공부다.
그 이유는 다음과 같다.

① 문제에 일반적으로, 중요하게 출제되는 공통 조건을 인지하지 못할 가능성이 크다.
② 그 조건을 인지하더라도 그 사용 방식을 모두 집대성하지 못할 수도 있다.
③ 성급하게 일반화된 사용 방식은 고정관념을 유발한다.
이는 시험장에서 최악의 결과로 돌아온다.

01

최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이다.

① 36　② 38　③ 40　④ 42　⑤ 44

02

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2 + x$이다.

03

실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \leq f'(x) \leq 5$이다.

(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는
점 $(4n,\ 12n)$, 점 $(4n+1,\ 12n+5)$, 점 $(4n+2,\ 12n+8)$, 점 $(4n+3,\ 12n+9)$
을 모두 지난다.

(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌구간 $[2k-1,\ 2k]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는
각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_4^7 f(x)\,dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오.

조건만으로 일반화는 불가능하다

조건을 이용하여 수학 문제를 해결하는 과정은 재료를 이용하여 음식을 하는 것과 같다.
이때 재료만 가지고 활용 방법을 결정하는 것이 올바를까?
만드는 음식에 따라 재료를 활용하는 방식은 달라지게 되어있다.

수학 또한 마찬가지다. 목적에 따라 조건의 활용은 얼마든지 달라지지 않을까?

조건의 활용은 구하고자 하는 것부터 시작하여 상황에 따라 다르게 결정된다.
이것을 단지 하나의 조건만 보며 일반화하는 것은 애초에 불가능하다.

04

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x\ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05

최고차항의 계수가 양수이고 $f'(2)<0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt-4 & (x<2) \\ -\int_0^x f(t)dt+4 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2-} \frac{g(x)-4}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{g(x)+4}{x-2} = g'(0)$

(나) 방정식 $g(x)=4$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(5)$의 값을 구하시오.

요소 인식의 실패

그래프 추론에서 새로운 함수가 자주 나온다.
항상 성립하는 등식, 항등식이 있듯, 항상 성립하는 부등식이라는 요소가 있다.
등식을 만드는 표현도 있지만 부등식을 만드는 표현도 있다.
실수를 구하는 방식과 자연수/정수를 구하는 방식은 다르다.

이와 같이 수학 문제 해결의 일반 원칙을 완성하기 위해서는 주요 요소를 알고 있어야 한다.
과연 학생이 이런 요소를 모두 인지하여 체계적인 원칙을 완성할 수 있을까?

학생 스스로 기존 강사들의 개별 문제 풀이를 한 데 모아

모순 없이,
전체와 부분의 층위를 고려하여,
모든 요소를 총괄하는

일반 원칙을 만드는 것이 가능할까?

기존의 수학 공부는 효율이 나올 수도, 효과적일 수도 없다.
이 심각히 모순된 학습을 유도하는 원인은 바로 기존의 수학 강의다.

개별 문제의 해법을 던져주는 것은 강의가 아니다.
완성된 일반 원칙을 제시하는 수업만이 강의임을 인지해야 한다.

이는 국어, 수학, 탐구 과목뿐만 아니라 모든 시험에 적용되는 기준이다.
다음 문제를 기반으로 현 수학 공부의 문제점을 인식해 보자.

06

두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n<\dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의최솟값이 6이 되도록하는 자연수 k의 개수는?

① 48　　② 51　　③ 54　　④ 57　　⑤ 60

07

모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

08

다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)-f(1)$의 최솟값은?

(가) 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2이고, 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수이다. (나) 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-3, 0)$에서 감소한다. (다) 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, 1)$에서 증가한다.

① 29 ② 34 ③ 38 ④ 41 ⑤ 43

09

정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \times \dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} < 0$ 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린 구간 $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다.

10

2 이상의 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=3^x-n$$

의 그래프가 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 $g(n)$이라 하자.

$$k \le g(n) < k+1$$

을 만족시키는 자연수 k를 $h(n)$이라 할 때, $h(n)<h(n+1)$을 만족시키는 100 이하의 모든 n의 값의 합은?

① 103 ② 105 ③ 107 ④ 109 ⑤ 111

공부의 방향성의 정상화

완성된 일반 원칙을 배운 후, 개별 문제로 연습한다.

일반 원칙 학습이 먼저다

강사 완벽히 준비한 일반 원칙으로 수학 문제를 일관되게 해결하는 과정을 학습한다.
이때 수학 문제는 다음의 목적으로 사용된다.

① 일반 원칙을 이해하기 위한 예시

② 적용 과정의 이해를 위한 예시

학습 단계에서 가장 중요한 부분이나 학생과 강사 모두 제대로 인지하지 못하는 과정이다.
올바른 원칙과 그에 맞는 좋은 데이터가 없는데 좋은 출력이 나올 리가 없다.

문제는 적용 연습의 수단

강사가 제공한 일반 원칙을 암기했다면, 그대로 문제 해결을 구현화한다.
이때 성급하게 일반 원칙을 수정하거나, 추가하지 않는다.
학생들 대다수는 아직 이해도가 낮아 적용하지 못하는 것을
일반 원칙을 탓하며 완성된 원칙을 망가뜨리는 경우가 많기 때문이다.

즉, 처음에는 그대로 따라 하는 것에 집중한다.
특히, 4점공략법은 이미 완성된 강의다. 4공법은 함부로 건드리지 않는다.

수정 보완

원칙의 적용이 당연하다 생각하면 소거할 수 있다.
원칙의 디테일을 위해 추가할 수 있다.
새로운 요소를 인지하고 원칙을 추가할 수 있다.

하지만 이는 충분히 공부가 진행된 상태,
이해도가 생긴 상태에서 시도해야 하는 공부다.
주의하도록 하자.

주의사항

일반 원칙의 선택지를 암기하고, 선택하는 과정을 연습하는 것이다.
선택한 결과를 공부하는 것이 아니다.

우리 학생들이 성적을 올리지 못하는 것은
사후적인 선택의 결과에 매달리기 때문이다.

문제 해결 시작 전 분석의 과정,
문제 해결 과정 중 일반 원칙을 적용하는 것이 공부다.

뒷북 치지 말자. 수능 끝나고 분석하기 위해 공부하는 것이 아니다.
수능 보는 중, 원칙대로 풀기 위해 공부하는 것이다.

11

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+4) = f(x)$이고

$$\int_{-2}^{2} \{f(x) + x^2 - 2x\}^2 dx$$

의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-2}^{36} f(x)dx$의 값을 구하시오.

TR'S KNOWHOW

• 항상 성립하는 부등식

이 문제는 항상 성립하는 부등식이 구성요소이다. 이 항성부의 기능은 다음과 같다

| 예제 | 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 1$가 성립할 때,

① 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 이용하여 부등식을 생성할 수 있다.
즉, $f(x)$의 최소≥ 1을 얻을 수 있다.

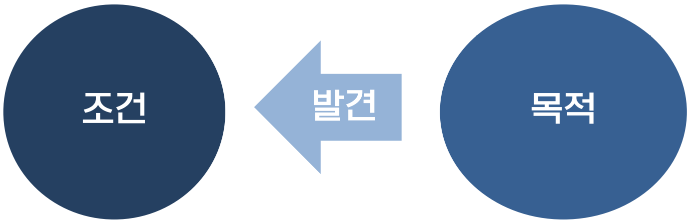
② 항상 성립하는 부등식은 항등식 개념이다. 대입, 정적분 등을 할 수 있다.
예를 들어, $x=1$을 대입하여 $f(1) \geq 1$을 얻을 수 있다.

③ 다양한 케이스 중 부등식을 이용하여 케이스를 선택할 수 있다.
예를 들어, 그래프 추론 등 케이스가 존재하는 상황에서 부등식을 만족하는 개형을 선택할 수 있다.

④ 미정계수를 구해야 할 때 등호를 이용하여 추가적인 등식을 생성할 수 있다.
예를 들어, 추가적으로 $f(3)=1$임을 알고 있다면, 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 $y=1$에서 접해야하므로 $f'(3)=0$임을 알 수 있다.

⑤ 함수를 생성해야 할 때 등호를 이용하여 함수를 생성할 수 있다.
예를 들어, 추가적으로 $\int_0^2 f(x)dx \leq 2$임을 알고 있다면,. 필연성으로 $f(x)=1\ (0 \leq x \leq 2)$임을 알 수 있다.

이렇게 목적과 구성요소, 그리고 기능을 선택하면 방향이 잡히면서 조건의 활용 방법이 저절로 드러나게 된다.



내가 능동적으로 필요한 조건을 찾으러 갈 수 있을 때, 수학 고정 100점을 달성할 수 있다.

12

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1\leq x<1) \\ ax-a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x (g(t)-f(t))\,dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자.

$a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은?

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

TR'S KNOWHOW

• 정방향을 분석하면 일반적인 결과를 얻을 수 있으며, 이를 이용하여 추론 문제를 해결한다.

상황	특수한 상황이 발생하는 지점
만나는 상태	① 튕접 ② 뚫접 ③ 불연속 ④ 첨점 ⑤ 점근선 등

| 예제 1 | 함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 살펴보자.

| 예제 2 | 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=0, 4$에서 불연속이고 $f(0)=0$이다. $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

• 특수 개수는 등식을 만들고 일반 개수는 부등식을 만든다.

개수 정보는 대표적인 식 생성 표현이다.

특수 개수는 등식을 만든다. 반대로 등식 생성이 목적이면 조건의 개수가 특수함을 예상할 수 있다.

일반 개수는 부등식을 만든다. 반대로 부등식 생성이 목적이면 조건의 개수가 일반적임을 예상할 수 있다.

잘못된 학습 대상 인식

수능은 지식을 묻는 시험이 아니다.

문제 해결은 목적지로 도착하는 과정

수학 문제는 목적지로 이동하는 것과 같다.

집에서 미국의 게이트웨이 아치 국립공원을 간다고 생각해 보자.
우리는 이미 이동에 필요한 개념은 다 알고 있다.
비자, 여권, 비행기, 자동차, 기차 등등 모르는 것이 없다.
하지만 지금 당장 가보라고 하면 갈 수 있을까?

이때 목적지에 도달하지 못한다고
여권, 비행기, 자동차, 기차 공부하면 우스운 사람이지 않을까?

수학도 마찬가지다.
쉬운 문제는 문제 해결의 과정, 즉 절차가 눈에 보이기 때문에 쉽다고 느끼는 것이고,
어려운 문제는 그 절차가 보이지 않아 어떻게 시작할지 몰라 어렵다고 느끼는 것이다.

그렇다면 내가 공부해야 할 것은? 당연히도 절차다.
지식, 실전 개념도 절차와 연결되었을 때 사용 가능해진다.
정작 더 중요하고 핵심인 절차는 무시하고 지식만 쌓아나간다고
수학 문제가 해결되는 것은 아니다.

수학 성적을 올리고 싶다면 절차를 공부하자.

기본 개념은 문제로 고난도 문제는 절차 학습으로

기본 개념은 문제를 통해 사용하면서 익히는 것이 효과적이다.
고난도 문제는 절차의 일반 원칙 학습으로 배우고 반복하는 것이 효과적이다.

하지만 학생들은 반대로 공부한다.

기본 개념은 강의에만 의존한다.
고난도 문제는 혼자서 누락과 충돌만 반복하며 애쓴다.

여러분의 수학 성적이 만족스럽지 않다면 수학적 재능, 감각의 문제가 아니다.
배움의 문제다. 대한민국 수학 교육이 비정상인 탓이 1순위다.

제대로 공부하고, 제대로 학습한 후 재능을 탓하는 것이 순서지 않을까?

올바른 학습 대상

절차를 중심으로

절차

수학 문제를 해결하는 절차는 정해져 있다.
모든 문제에 통용되는 일반 절차를 공부한다.

문제의 특이성이 아닌 일반성에 집중하며 내가 해야 하는 것을 파악한다.
이런 절차 중심으로 문제를 인식하면 수학 문제는 모두 똑같다는 결론에 도달할 수 있다.

지식도 절차와 연결

지식도 절차와 연결하여 사용 가능한 상태로 만든다.
예를 들어, 원주각을 공부했다고 가정하자.

'동일 원, 혹은 반지름이 같은 원에서 원주각을 일정하다.'

까지만 공부하는 것은 죽은 공부다. 이 지식이 절차 중 어디에 사용되는지를 공부해야 살아 있는 지식이 된다.

원주각의 같음을 인지하여 식 생성 과정에서 문자를 적게 둘 수 있게 된다.
즉, 원주각은 문자를 적게 두는 역할로 사용되는 것이다.
문제로 확인하자.

13

$\angle A > \dfrac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1,\ \overline{\mathrm{AH}} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6　② $\dfrac{25}{4}$　③ $\dfrac{13}{2}$　④ $\dfrac{27}{4}$　⑤ 7

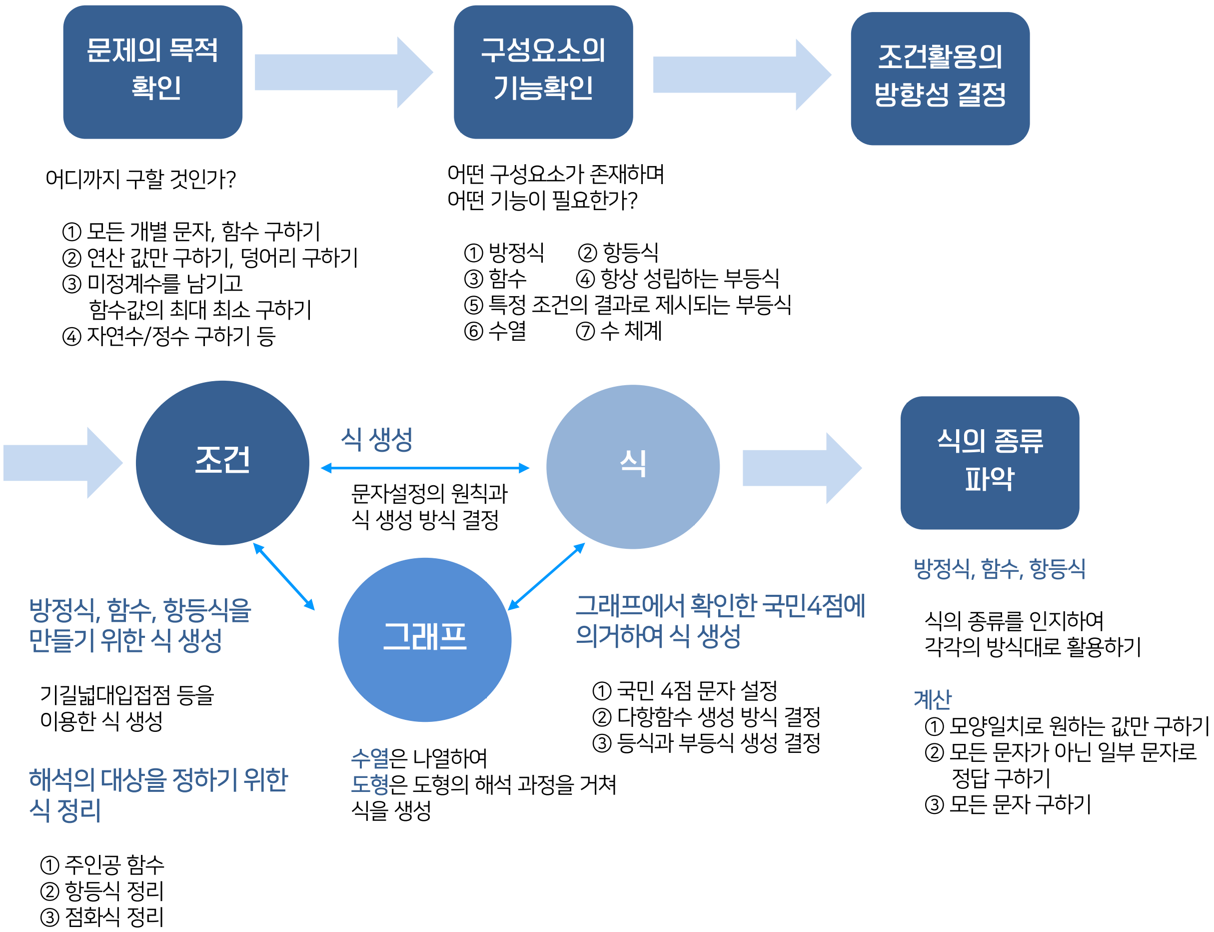
TR'S KNOWHOW

- **삼각함수 활용에 대한 일반 절차의 적용은 다음과 같다.**

① 길이, 각을 구하는 것이 목적이다. 길이, 각은 삼각형에서 구하므로 삼각형을 본다.
② 길이와 각을 문자로 설정한 후, 식을 생성한다.
③ 이때 문자는 적게 설정되어야 한다. 길이 관점에서, 각 관점에서의 관계성을 이용하여 문자를 적게 둔다.
길이는 보통 길이비, 사인비, 면적비로 문자를 적게 둔다.
각은 원주각, 외각, 평행선, 사각형 대각 합 π, 이등변삼각형, 접현각, 지름 등으로 관계성을 확인한 후 문자를 적게 둔다.
④ 문자를 설정하면 식 생성 방식은 자연스럽게 결정된다.

TR'S KNOWHOW

• 수학 문제의 해결 절차



• 조건의 구현화는 식 생성, 식 정리, 그래프뿐이다.

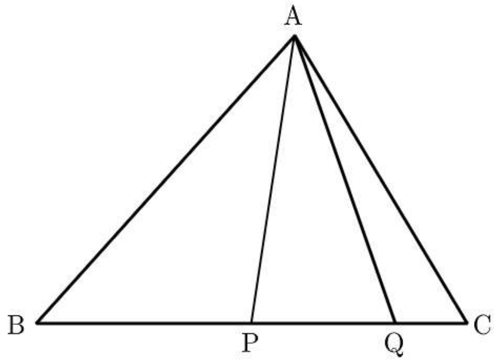
아무리 낯선 조건이어도 그것을 구현화하는 절차는 식 생성, 식 정리, 그래프뿐이다.
단 3개의 선택지 중 올바른 구현화 과정을 정하는 것은 어려운 일이 아니다.
또한 이 정해진 절차에서 고려해야 하는 것도 굉장히 한정적이다.
즉, 수학 문제는 겉보기에는 다 달라 보이고 새로워 보여도 동일하게 해결될 수밖에 없다.
변하는 것이 아니라 변하지 않는 것에 집중했을 때, 공부가 쉬워짐을 명심하자.

14

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{\mathrm{AQ}}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle \mathrm{QAP}):\sin(\angle \mathrm{APQ})=\sqrt{2}:3$$

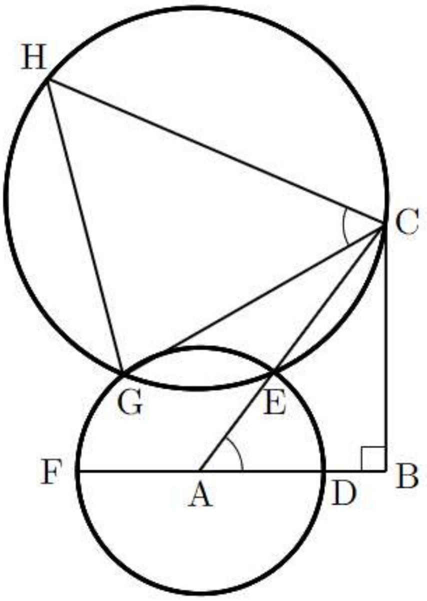
일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?



① $\dfrac{85}{9}\pi$　② $\dfrac{88}{9}\pi$　③ $\dfrac{91}{9}\pi$　④ $\dfrac{94}{9}\pi$　⑤ $\dfrac{97}{9}\pi$

15

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{\mathrm{CG}}=2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle\mathrm{HCG}=\angle\mathrm{BAC}$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는?



① $\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$　② $\dfrac{38\sqrt{10}}{25}$　③ $\dfrac{14\sqrt{3}}{5}$　④ $\dfrac{32\sqrt{15}}{25}$　⑤ $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$

TR'S KNOWHOW

• 고난도 문제는 결국 삼각형의 관찰을 묻는다.

쉬운 문제는 문자 설정을 신경쓰면 어렵지 않게 해결된다.
하지만 고난도 문제는 삼각형을 봐야 해결할 수 있다.
정보의 이동을 고려하는 방식도 절차가 있지 않을까?
이런 모든 것이 정리된 강의와 교재가 4점공략법 일반론이다.

16

상수 a $(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점 중 제1 사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 B, 곡선 $y=a^x-2$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 삼각형 AOC의 넓이가 8일 때, $a\times\overline{OB}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $2^{\frac{13}{6}}$ ② $2^{\frac{7}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$ ④ $2^{\frac{8}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{17}{6}}$

17

곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $A(a, b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1 사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

TR'S KNOWHOW

- **함수에서의 식 생성**

- **식 정리**

식을 다룰 때 지켜야 하는 기본 원칙이 있다.

① 같은 모양이 나오도록 식을 정리한다.

② 같은 종류가 나오도록 식을 정리한다.

이는 단순 연립 연산이 되지 않을 때 더더욱 중요하게 사용된다.

18

실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
〈보기〉 옳은 것을 모두 고른 것은?

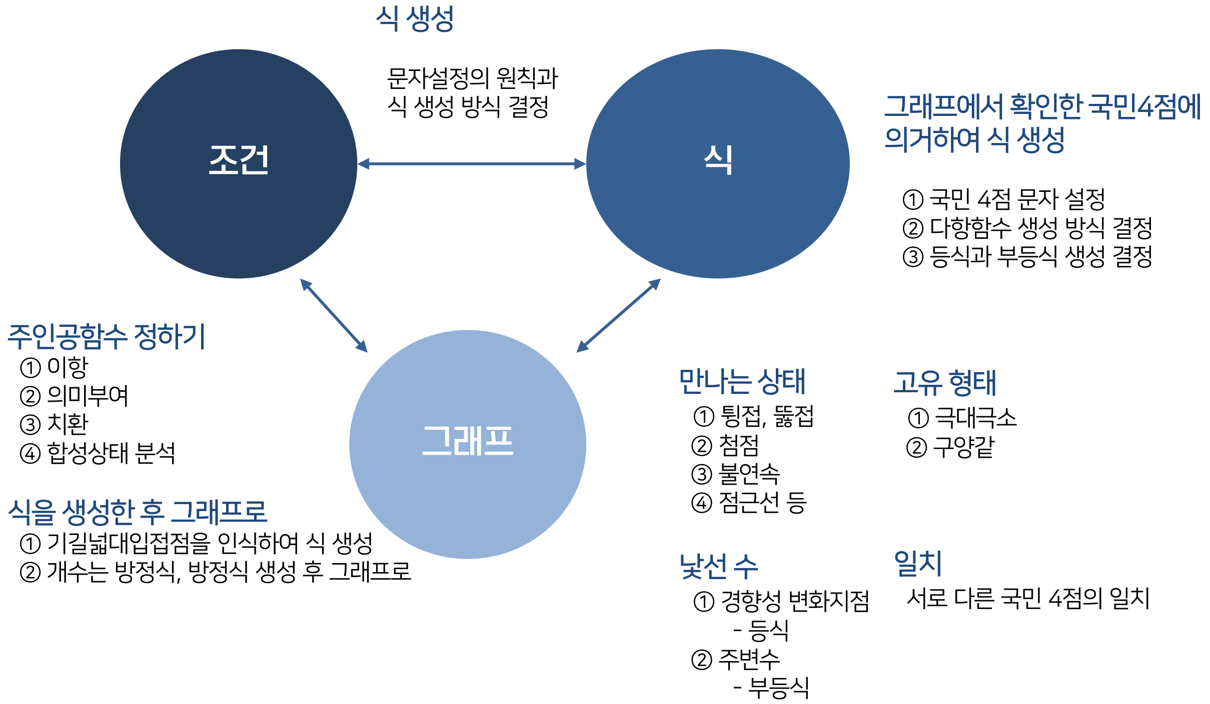
보기

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

TR'S KNOWHOW

• 그래프 추론



• 식으로 옮기지 못하는 숫자, 문자는 좌표평면에 표시되어야 한다. 그래야 정체를 파악한 후 식을 생성할 수 있다.

식으로도 파악하지 못하고 그래프로도 보지 못하는 숫자, 문자는 수학 문제에 존재하지 않는다.
그래프를 그리는 이유는 식으로 옮기지 못하는, 정체를 모르는 숫자, 문자의 정체를 파악하기 위해서이다.
이러한 숫자, 문자를 낯선 숫자, 낯선 문자라 칭하겠다.
낯선 문자와 숫자의 표시 위치를 고려하여 주인공 함수를 정하고, 표시를 고려하여 결과를 생각하자.

CHAPTER

2

2

지금, 변화해야 할 때

1. 경험에서 논리로

선 논리, 후 연습
이것이 당연하고 올바른 공부

4공법 후 적용 연습

준킬러 이상의 문제는 사전준비, 필유공까지는 공부한 후 연습하자.

① 4전준비로 논리 학습
② 필유공으로 논리에 기반한 준킬러 유형 및 해결을 위한 절차 연결 학습
또한, 필유공 문제로 데이터베이스 확립
③ 이에 기반하여 준킬러 이상 연습

이것이 합리적인 공부다.
해야 하는 공부량도 명확하며, 리턴도 확실하다.

막연한 경험은 공부가 아니다

하지만 대다수의 수험생은 문제를 풀면 성적이 오르지 않을까?하는 막연함으로 공부한다.
이는 다음과 같은 문제점이 있다.

① 경험이 일반원칙으로, 논리로 자동으로 전환되는 것이 아니다.
그냥 흘려버리는 양이 상당하다.
② 모든 것을 경험해야 성과가 나온다. 이는 필요한 공부량이 무한대가 된다.

그래서 많은 수험생이 재수, 삼수, 사수를 하는 것이다.
수능은 그런 시험이 아님에도 잘못 공부하기 때문에 발생하는 일이다.

TR'S KNOWHOW

- **더 이상 초딩이 아니다. 경험에 의한 공부에서 논리에 의한 공부로 발전해 나가자.**

초딩 때는 논리보다는 경험에 의한 공부가 진행된다.
더하기, 곱하기 모두 논리로 이해하기보다는 물체를 이용하여 그 연산을 경험으로 이해하도록 유도한다.
이는 어렸을 때, 논리력이 부족할 때 이루어지는 학습이다.

실제로 학년이 올라갈수록 교과서의 설명도 경험에 의한 이해 중심에서 논리에 의한 이해 중심으로 바뀐다.
양자 역학을 경험으로 이해할 수는 없기 때문이다.
하지만 많은 수험생들은 아직도 경험적으로 이해하지 못하면, 이해가 안 된 것으로 착각한다.
논리적으로 이미 옳고, 합리적임을 이해했음에도 경험적으로 와닿지 않는다며 이해가 안 되었다고 착각한다.
이미 개념 공부가 끝났음에도 계속 개념에 집착하는 모습을 보이기도 한다.

이런 공부에 대한 잘못된 태도가 얼마나 많은 시간 낭비를 유발하는지 깨달아야 한다.
이제는 논리 전개를 파악하는 것이 이해임을 알아야 한다.

지수 부등식의 해법을 예로 들어보자.
① 지수함수는 밑이 1보다 크면 증가한다.
② 증가함수 정의에 따르면 정의역이 클 때, 치역이 크다.
③ 그러므로 $\log_2 f(x) < \log_2 g(x)$의 부등식은 $f(x) < g(x)$의 해를 구하는 것과 같다.

위와 같이 수학 정의에 따른 연역적 논리가 이어진다면 완벽하게 이해한 것이다.
$\log$부등식이 낯설다, 와닿지 않는다는 추상적인 평가 기준은 아무런 의미도 없는 것이다.

4점공략법의 논리도 마찬가지다.
이미 논리적으로 옳음이 밝혀졌다면 동일 상황에서 그 논리를 적용할 수 있어야 한다.
문제의 함수가 복잡하든, 낯설든 그것은 전혀 중요한 것이 아니다.
이미 논리적으로 옳음을 증명했다면 개별적이고 특수한 모양과 상관없이 적용할 수 있어야 하며
이것이 이해를 달성한 사람의 해법이 된다.

다 해보고, 다 확인하는 것이 이해라고 생각한다면 당신은 아직도 초딩 수준의 공부에 머무른 것이다.
고딩이면 고딩답게, 수험생이면 수험생답게 본인의 공부를 실천하도록 하자.

19

$x>a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다.(단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오.

TR'S KNOWHOW

• 의미부여

| 예제 1 | $(x-3)^2+(y-4)^2=4$위의 점 (x, y)에 대하여 $\dfrac{y}{x}$의 최댓값을 구하시오.

| 예제 2 | 폐구간 $[\,0,\ \pi\,]$ 에서 $f\,(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x-3}$의 최댓값은 k이다. $40k$의 값을 구하시오.

문제 풀이의 집착에서 벗어나자

문제는 수단이다. 목적이 아니다.

문제 풀이 양을 채우는 것이 목적인가?

수험생 대다수는 문제 푸는 것이 수험생활의 목적인 경우가 많다.
모의고사 100개, 200개 양을 채운다고 수학 실력이 저절로 향상되는 것이 아니다.

수능 공부의 목적은?

수능 공부의 목적은 다음과 같다.

① 일반 원칙의 완성 (수학은 4점공략법으로 이미 제공하므로 암기만 하면 됨)
② 일반 원칙의 적용 연습

문제를 이를 위한 수단일뿐이다.
일반 원칙의 이해와 완성을 위한 데이터로써,
일반 원칙의 적용 연습을 위한 교보재로써
문제는 그 역할을 다하는 것이다.

수단에 집착하는 우매한 사람이 되지 않도록 주의하자.

올바른 공부를 위한 커리 안내

성적대 별로 가는 길이 다르다.

중하위권

개념공략법으로 개념과 기본유형을 확립하고,
기출구 유형완성으로 유형 연습을 확실히 수행한다.

중위권

4전준비로 논리를 학습한 후
필유공으로 준킬러의 인식과 해결 절차를 유형화한다.

상위권

4전준비로 논리를 학습한 후
4공법으로 문제의 특수성에 휘둘리지 않고 일관된 해결을 체화 및 훈련한다.

Solution

정답 및 해설

1) [정답] ①

[해설]

$y=6x-6$ 과 $y=2x^3-2$ 는 모두 $(1,0)$ 을 지나고 $(1,0)$ 에서의 접선의 기울기가 6이다.

모든 양의 실수 x 에 대하여

$6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이므로

$y=f(x)$ 는 $x=1$ 에서 $y=6x-6$ 과 접해야 한다

$f(x)$ 가 다항함수이므로

$f(x)-(6x-6)=(x-1)^2 \cdot Q(x)$

$x \to \infty$ 일 때, $f(x) \le 2x^3-2$ 이므로 $f(x)$ 는 3차 이하이다.

(ㄱ) $f(x)$ 가 1차인 경우

$y=6x-6$ 와 접하면서 $f(0)=-3$인 함수는 없다

(ㄴ) $f(x)$ 가 2차인 경우

$f(x)=(x-1)^2+(6x-6)$

$f(0)=1-6=-5 \ne -3$ 이므로 조건(가)를 만족하지 않는다.

(ㄷ) $f(x)$ 가 3차인 경우

$f(x)=(x-1)^2(x+a)+(6x-6)$

$f(0)=a-6=-3$ 에서 $a=3$

$f(x)=(x-1)^2(x+3)+(6x-6)$

$\therefore f(3)=4\times6+6\times3-6=36$

2) [정답] 226

[해설]

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to0}|f(x)-1|=0$

이므로 삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x)-1=xg(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|xg(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|xg(x)|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|$$

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 실수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

$xf(x)\ge-4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\ge-4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\ge0$

$x^2(x^2+ax+4)\ge0$

$x^2\ge0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+4\ge0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\le0$

$-4\le a\le4$

$f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은

$a=4$일 때 226이다.

3) [정답] 323

[해설]

함수 $f(x)$가 (4, 12), (5, 17), (6, 20), (7, 21)을 지나고

$1\le f'(x)\le5$이므로

(i) 두 점 (4, 12), (5, 17)의 기울기가 5이므로

$4\le x\le5$에서 $f(x)=5x-8$

(ii) 두 점 (6, 20), (7, 21)의 기울기가 1이므로

$6\le x\le7$에서 $f(x)=x+14$

(ⅲ) 주어진 조건에 의해 (5, 17)과 (6, 20)을 지나는 함수는 이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(5)=10a+b=5$, $f'(6)=12a+b=1$

$\therefore\ a=-2,\ b=25$

$f(5)=17$에서 $c=-58$

(i)~(ⅲ)에 의해

$$\int_4^7 f(x)\,dx$$

$$=\int_4^5 (5x-8)\,dx+\int_5^6 \left(-2x^2+25x-58\right)dx$$

$$+\int_6^7 (x+14)\,dx$$

$$=\frac{323}{6}$$

따라서 $6a=323$

4) 정답 ④

ㄱ. $g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x>0)\end{cases}$

$g(x)$는 미분가능한 함수이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)$

$\lim\limits_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$

$\therefore\ f(0)=0$ ($\because$ $f(x)$는 연속함수) $\therefore$ 참

ㄴ. $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $g'(0)=f(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+ax$라 할 수 있다.

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-3x^2-ax & (x<0)\\ 3x^2+ax & (x\ge 0)\end{cases}$

$a=0$이면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극댓값을 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. (i) $x\ge 0$일 때

$f(x)=3x^2+ax=x$이므로

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{1-a}{3}$

(ii) $x<0$일 때

$f(x)=-3x^2-ax=x$이므로

$x=-\dfrac{1+a}{3}$

방정식 $f(x)=x$가 서로 다른 세 실근을 가지려면

$\dfrac{1-a}{3}>0$, $-\dfrac{1+a}{3}<0$이어야 한다.

$\therefore\ -1<a<1$

$f(1)=a+3$이므로 $2<f(1)<4$ $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5) [정답] 30

[해설]

$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$라 하면

$F(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

$g(x)=\begin{cases}F(x)-4 & (x<2)\\ -F(x)+4 & (x\ge 2)\end{cases}$

조건 (가)에서

$\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=g'(0)$이고 $\lim\limits_{x\to 2-}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}\{g(x)-4\}=\lim\limits_{x\to 2-}\{F(x)-8\}=F(2)-8=0$

그러므로 $F(2)=8$

…… ㉠

또한

$\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{F(x)-8}{x-2}=F'(2)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{-\{F(x)-8\}}{x-2}$

$=-F'(2)=-f(2)$

$g'(0)=F'(0)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 $f(2)=-f(2)=f(0)$에서

$f(2)=f(0)=0$

$f(x)=ax(x-2)(x-b)$ (a, b는 상수, $a>0$)

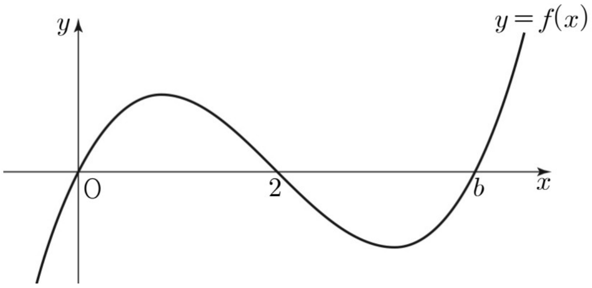
$f(x)=a\{x^3-(b+2)x^2+2bx\}$에서

$f'(x)=a\{3x^2-2(b+2)x+2b\}$

$f'(2)=a(-2b+4)<0$에서

$a>0$이므로 $-2b+4<0$, $b>2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2) \\ -f(x) & (x>2) \end{cases}$$

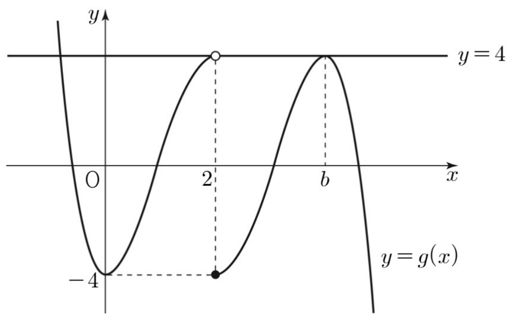
$f(x)=ax(x-2)(x-b)$ $(a>0,\ b>2)$에 대하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	b	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$		$\nearrow$	$g(b)$	$\searrow$

$\lim_{x\to 2-} g(x)=4$, $\lim_{x\to 2+} g(x)=g(2)=-4$

조건 (나)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 두 점에서 만나야 하므로 $g(b)=4$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(b)=-\int_0^b f(t)dt+4=4$에서 $\int_0^b f(t)dt=0$

$$\int_0^b at(t-2)(t-b)dt$$
$$=\int_0^b a\{t^3-(b+2)t^2+2bt\}dt$$
$$=a\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{b+2}{3}t^3+bt^2\right]_0^b$$
$$=a\left(\frac{b^4}{4}-\frac{b+2}{3}\times b^3+b^3\right)$$
$$=ab^3\left(\frac{b}{4}-\frac{b+2}{3}+1\right)=0$$

$3b-4(b+2)+12=0$에서 $b=4$

㉠에 의하여 $\int_0^2 f(t)dt=8$

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 at(t-2)(t-4)dt$$
$$=a\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right]_0^2$$
$$=4a=8$$

에서 $a=2$이므로 $f(x)=2x(x-2)(x-4)$

따라서 $f(5)=30$

6) 정답 ①

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하자.

점 A와 점 P_1의 y좌표가 같으므로

점 P_1의 x좌표를 x_1이라 하면

$16^{x_1}=2^{4x_1}=2^{64}$

$\therefore\ x_1=16$

또한 점 Q_n과 점 P_{n+1}의 y좌표가 같으므로

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}=2^{4x_{n+1}}$

$\therefore\ x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$에서 $\{x_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$인

등비수열이므로 $x_n=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}$

$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_6<\frac{1}{k}\le x_5$이다.

$\therefore\ \left(\frac{1}{4}\right)^3<\frac{1}{k}\le\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$16\le k<64$

$\therefore$ (k의 개수)$=48$

7) [정답] 64

[해설]

조건 (나)에서 $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟

값이 3이므로 $|a_3|=|a_5|$

(i) a_3, a_5가 홀수일 때

a_3, a_4, a_5가 순서대로 홀수, 짝수, 홀수이므로

$a_3=\alpha$라 하면

$$a_3=\alpha,\ a_4=\alpha-3,\ a_5=\frac{\alpha-3}{2}$$

$$|\alpha|=\left|\frac{\alpha-3}{2}\right|$$

$\therefore\ \alpha=-3$ 또는 $\alpha=1$

(ii) a_3, a_4, a_5가 모두 짝수일 때

a_3, a_4, a_5가 순서대로 짝수, 짝수, 짝수인 경우

$a_3=\alpha$라 하면

$$a_3=\alpha,\ a_4=\frac{\alpha}{2},\ a_5=\frac{\alpha}{4}$$

$$|\alpha|=\left|\frac{\alpha}{4}\right|$$

$\therefore\ \alpha=0$

(iii) a_3, a_5가 짝수이고 a_4가 홀수일 때

$a_3=\alpha$라 하면

$$a_3=\alpha,\ a_4=\frac{\alpha}{2},\ a_5=\frac{\alpha}{2}-3$$

$$|\alpha|=\left|\frac{\alpha}{2}-3\right|$$

$\therefore\ \alpha=-6$ 또는 $\alpha=2$

이상에서 가능한 a_3의 값은 $-6,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2$

(i) $a_3=-6$이면 a_2의 값은 -3 또는 -12이다.

$a_2=-3$이면 $a_1=-6$이어야 하므로 모순이다.

$a_2=-12$이면 가능한 a_1의 값은 -24 또는 -9

(ii) $a_3=-3$이면 $a_2\neq 0$이므로 $a_2=-6$이고 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a_3=2$이면 $a_2=4$ 또는 $a_2=5$이다.

$a_2=4$일 때 가능한 a_1의 값은 7 또는 8

$a_2=5$일 때 가능한 a_1의 값은 10

(iv) $a_3=1$이면 $a_4=-2$이고 조건 (나)에 의해서 $a_2=2$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(v) $a_3=0$일 때

조건 (나)에 의해서 $a_2\neq 0$이므로 $a_2=3$

$a_2=3$에서 $a_1=6$

이상에서 모든 $|a_1|$의 값은

$6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 24$

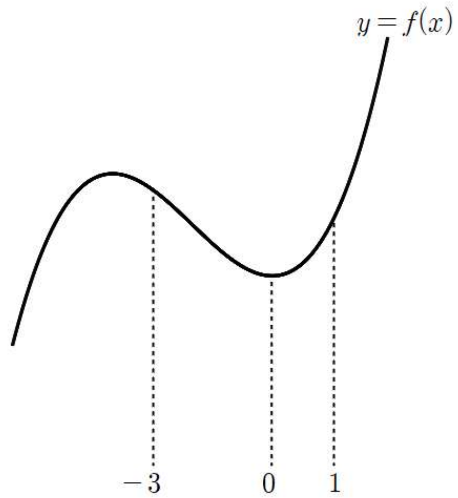
따라서 $|a_1|$의 값의 합은

$6+7+8+9+10+24=64$

8) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 2이고 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$는 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 정수)로 놓을 수 있다.



조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-3, 0)$에서 감소하고 조건 (다)에서 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0, 1)$에서 증가하므로 삼차함수의 그래프의 개형을 생각하면 $f'(0)=0$이어야 하고

$f'(-3)\leq 0,\ f'(1)>0$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이므로

$f'(0)=b=0$

$f'(-3)=54-6a$에서 $54-6a\leq 0$

$\therefore\ a\geq 9$

$\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=6+2a$에서 $\quad 6+2a>0$

$\therefore\ a>-3$

$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $\quad a \geq 9$

$\cdots\cdots$ ㉢

이때 $f(x)=2x^3+ax^2+c$에서

$$f(2)-f(1)=\{16+4a+c\}-\{2+a+c\} \\ =3a+14$$

이므로 ㉢에서 $\quad 3a \geq 27$

$\therefore\ 3a+14 \geq 41$

따라서 $f(2)-f(1)$의 최솟값은 41이다.

9) 정답 380

10) [정답] ②

[해설]

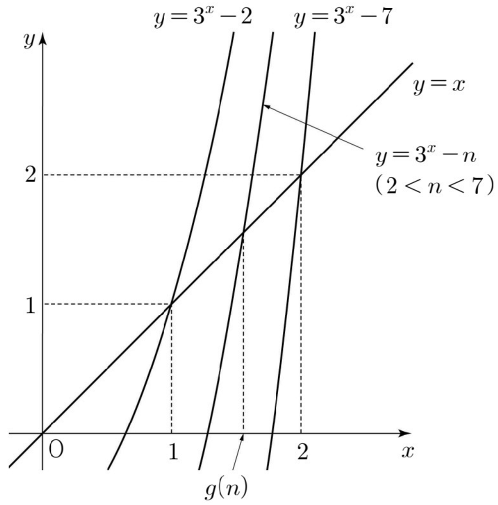
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $g(n)$은 직선 $y=x$가 함수 $f(x)=3^x-n$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값과 같다.

또한 2 이상의 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$가 함수 $f(x)=3^x-n$의 그래프와 만나는 두 점 중 한 점의 x좌표는 양수이고 다른 한 점의 x좌표는 음수이다.

따라서 $g(n)$은 직선 $y=x$가 함수 $f(x)=3^x-n$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표와 같다. 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(1,\ 1)$을 지나면 $1=3^1-n$에서 $n=2$이므로 $g(2)=1$

(ⅰ) 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(2,\ 2)$를 지나면

$2=3^2-n$에서 $n=7$이므로 $g(7)=2$



$1=g(2)<g(3)<\cdots<g(6)<g(7)=2$

따라서 $2 \leq n \leq 6$일 때,

$1 \leq g(n)<2$이므로 $h(n)=1$

(ⅱ) 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(3,\ 3)$을 지나면

$3=3^3-n$에서 $n=24$이므로 $g(24)=3$

$2=g(7)<g(8)<\cdots<g(23)<g(24)=3$

따라서 $7 \leq n \leq 23$일 때,

$2 \leq g(n)<3$이므로 $h(n)=2$

(ⅲ) 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(4,\ 4)$를 지나면

$4=3^4-n$에서 $n=77$이므로

$g(77)=4$

$3=g(24)<g(25)<\cdots<g(76)<g(77)=4$

따라서 $24 \leq n \leq 76$일 때,

$3 \leq g(n)<4$이므로 $h(n)=3$

(ⅳ) 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(5,\ 5)$를 지나면

$5=3^5-n$에서 $n=238$이므로 $g(238)=5$

$4=g(77)<g(78)<\cdots<g(237)<g(238)=5$

따라서 $77 \leq n \leq 237$일 때,

$4 \leq g(n)<5$이므로 $h(n)=4$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $h(n)<h(n+1)$을 만족시키는 $2 \leq n \leq 100$인 모든 n의 값의 합은 $6+23+76=105$이다.

11) [정답] 12

[해설]

모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)+x^2-2x\}^2 \geq 0,\ f(x)\geq 0$

이므로 정적분 $\int_{-2}^{2}\{f(x)+x^2-2x\}^2dx$의 값이 최소가 되기 위해서는

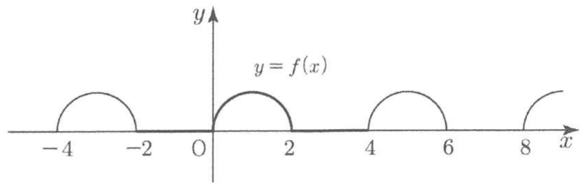
(i) $0 \leq x \leq 2$에서

$x^2-2x \leq 0$이므로 $f(x)=-x^2+2x$

(ii) $-2 < x \leq 0$에서

$x^2-2x \geq 0$이므로 $f(x)=0$

$f(x+4)=f(x)$이고, (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$의 개형은 그림과 같다.



$$\int_0^4 f(x)dx=\int_4^8 f(x)dx=\int_8^{12}f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{32}^{36}f(x)dx$$

따라서

$$\int_{-2}^{36}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+9\int_0^4 f(x)dx$$
$$=0+9\int_0^2(-x^2+2x)dx$$
$$=9\times\frac{4}{3}=12$$

12) [정답] ④

[해설]

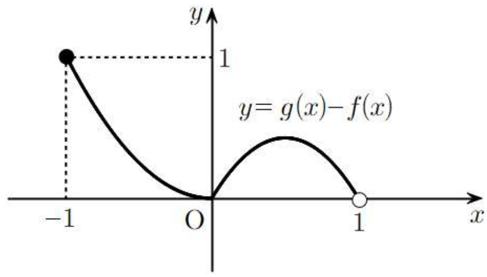
함수 $h(x)=\int_0^x(g(t)-f(t))\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(x)=g(x)-f(x)$$

$$=\begin{cases} x^2+ax+a & (x<-1) \\ x^2 & (-1\leq x<0) \\ -x^2+x & (0\leq x<1) \\ -(x-1)(x-a) & (x\geq 1)\end{cases}$$

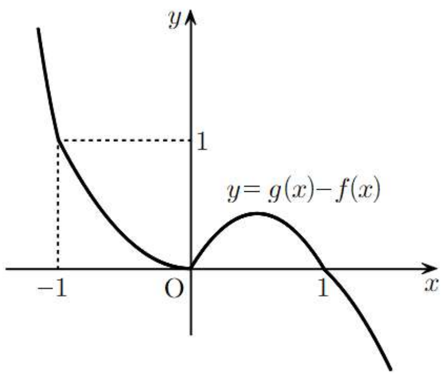
함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 도함수인 함수 $y=g(x)-f(x)$의 부호가 바뀌는 점이 오직 하나 존재해야 한다.

이때 $-1\leq x<1$에서 함수 $y=g(x)-f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $h(x)$가 극값을 갖는 x의 값은 $x<-1$ 또는 $x\geq 1$이다.



(i) $0<a\leq 1$일 때

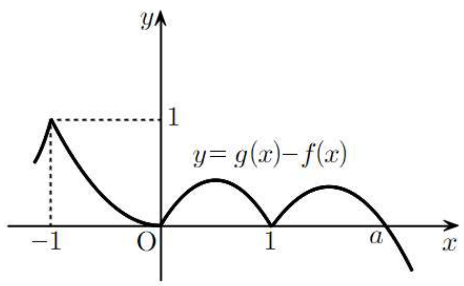
$x<-1$에서 이차함수 $y=x^2+ax+a$의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{2}$이고 $x\geq 1$에서 이차함수 $y=-(x-1)(x-a)$의 축의 방정식은 $x=\frac{1+a}{2}$이므로 함수 $y=g(x)-f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. 따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서만 극값을 가지므로 조건을 만족시킨다.



(ii) $a>1$일 때

$x\geq 1$에서 함수 $y=g(x)-f(x)$의 그래프는 다

음 그림과 같이 $x=a$에서 부호가 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.



따라서 함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $x<-1$에서 함수 $y=g(x)-f(x)$의 부호가 바뀌는 점이 존재하지 않아야 한다. 방정식 $g(x)-f(x)=0$, 즉 $x^2+ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$a^2-4a\le 0,\qquad a(a-4)\le 0$

$\therefore\ 0\le a\le 4$

이때 $a>1$이므로 $\qquad 1<a\le 4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$0<a\le 4$

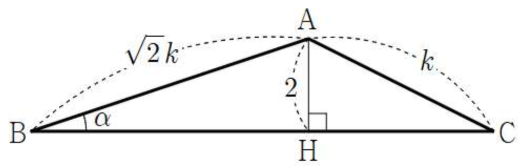
따라서 a의 최댓값은 4이므로 $\qquad k=4$

$$\therefore\ h(3)=\int_0^3\{g(t)-f(t)\}\,dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+t)\,dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0$$
$$+\left(-9+\frac{45}{2}-12\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)$$
$$=\frac{7}{2}$$
$$\therefore\ k+h(3)=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$$

13) 정답 20

14) [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\qquad R=5\sqrt{2}$

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{2}k$, $\overline{\text{AC}}=k$ $(k>0)$으로 놓고 $\angle\text{ABC}=\alpha$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin\alpha}=2R=10\sqrt{2},\qquad \sin\alpha=\frac{k}{10\sqrt{2}}$$

…… ㉠

직각삼각형 ABH에서 $\qquad \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{2}k}$

…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

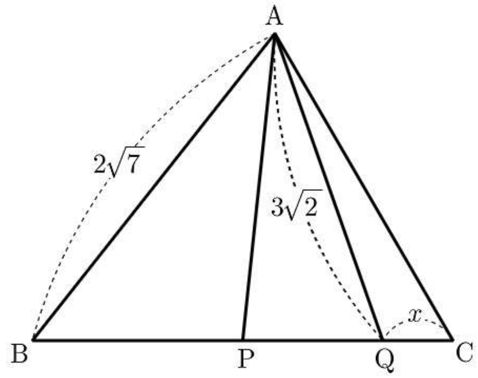
$$\frac{k}{10\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}k},\qquad k^2=20$$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\text{BH}}=\sqrt{\overline{\text{AB}}^2-\overline{\text{AH}}^2}=\sqrt{2k^2-4}=6$$

15) [정답] ②

[해설]



$\overline{AB}=2\sqrt{7}$, $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이고 선분 BC를 5 : 1로 내분하는 점이 Q이므로 $\overline{CQ}=x$라 하면 $\overline{PQ}=2x$, $\overline{BC}=6x$

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{3\sqrt{2}}{\sin(\angle APQ)}$$

이때 $\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$이므로

$\sin(\angle QAP)=\sqrt{2}k$, $\sin(\angle APQ)=3k$라 하면

$$\frac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}k}=\frac{3\sqrt{2}}{3k},\qquad \overline{PQ}=2$$

$2x=2$이므로 $x=1$

$$\overline{CQ}=1,\ \overline{BC}=6$$

삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ)=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{7}\times5}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\cos(\angle ABQ)=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이므로

$$\sin^2(\angle ABQ)+\cos^2(\angle ABQ)=1$$

에서 $\sin(\angle ABQ)=\frac{3}{4}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times2\sqrt{7}\times6\times\cos(\angle ABC)\\&=22\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{22}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{22}}{\sin(\angle ABC)}=2R,\qquad \frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{2\sqrt{22}}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}\pi$$

16) [정답] ④

[해설]

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\angle BAC=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{4}{5}$

…… ㉠

점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{AD}=3\times\frac{2}{3}=2$$

점 A를 중심으로 하는 원의 반지름의 길이는 $\overline{AD}=2$이다.

점 E와 G는 이 원 위의 점이므로

$$\overline{AE}=2,\ \overline{AG}=2$$

$$\therefore\ \overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=5-2=3$$

삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CG}^2=\overline{AC}^2+\overline{AG}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AG}\cos(\angle CAG)$$

$$(2\sqrt{6})^2=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cos(\angle CAG)$$

$$24=29-20\cos(\angle CAG),$$

$20\cos(\angle CAG)=5$

$$\therefore\ \cos(\angle CAG)=\frac{1}{4}$$

$\angle EAG=\angle CAG$이므로 삼각형 AEG에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{EG}^2&=\overline{AE}^2+\overline{AG}^2-2\overline{AE}\cdot\overline{AG}\cos(\angle EAG)\\&=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\frac{1}{4}\\&=6\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{EG}=\sqrt{6}$$

삼각형 CEG에서 세 변의 길이는 각각

$$\overline{CE}=3,\ \overline{EG}=\sqrt{6},\ \overline{CG}=2\sqrt{6}$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle CGE)=\frac{\overline{EG}^2+\overline{CG}^2-\overline{CE}^2}{2\cdot\overline{EG}\cdot\overline{CG}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2 - 3^2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{6+24-9}{24} = \frac{7}{8}$$

$\therefore$

$$\sin^2(\angle \mathrm{CGE}) = 1 - \cos^2(\angle \mathrm{CGE}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$\angle \mathrm{CGE}$는 삼각형의 내각이므로 $\sin(\angle \mathrm{CGE}) > 0$

$$\therefore \sin(\angle \mathrm{CGE}) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

이때 삼각형 CEG의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 CEG에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle \mathrm{CGE})} = \frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{24}{\sqrt{15}}$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{5}$$

$\angle \mathrm{HCG} = \angle \mathrm{BAC}$이므로 $\sin(\angle \mathrm{HCG}) = \frac{4}{5}$ ($\because$ ㉠)

네 점 C, E, G, H는 한 원 위에 있으므로 삼각형 CGH에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{GH}}}{\sin(\angle \mathrm{HCG})} = 2R$$

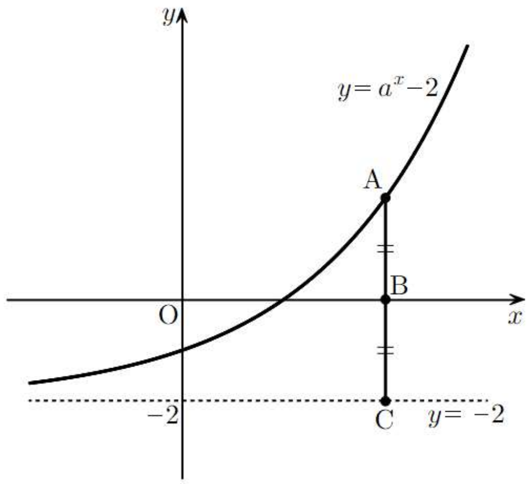
$$\therefore \overline{\mathrm{GH}} = 2R\sin(\angle \mathrm{HCG})$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}$$

17) [정답] ③

[해설]

곡선 $y = a^x - 2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



점 B의 x좌표를 t라 하면

$$\mathrm{A}(t,\ a^t - 2),\ \mathrm{B}(t,\ 0)$$

함수 $y = a^x - 2$의 그래프의 점근선이 $y = -2$이므로

$$\mathrm{C}(t,\ -2)$$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = 2$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 4$

$\overline{\mathrm{OB}} = t$이므로 삼각형 AOC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times t = 2t$$

문제의 조건에서 넓이는 8이므로

$$2t = 8$$

$$\therefore t = 4$$

$\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$에서

$$a^t - 2 = -(-2)$$

$$a^t = 4$$

$$a^4 = 4 \ (\because ㉠)$$

$$a = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$a = 2^{\frac{1}{2}}$, $\overline{\mathrm{OB}} = t = 4$이므로

$$a \times \overline{\mathrm{OB}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 4 = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^2 = 2^{\frac{5}{2}}$$

18) [정답] 457

[해설]

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$는 곡선 $y = \log_{16}(8x+2)$ 위의 점이므로

$$b = \log_{16}(8a+2)$$

점 $B(c, d)$는 곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$$d = 4^{c-1} - \frac{1}{2}$$

점 A를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점 $A'(b, a)$는 직선 OB 위에 있으므로 세 점 O, A′, B는 한 직선 위에 있다.

따라서 두 직선 OA′, OB의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \ (\text{단, } b \neq 0, \ c \neq 0)$$

$$\therefore \ ac = bd$$

즉, 상수 k에 대하여

$$c = kb, \ d = ka$$

로 놓을 수 있다.

선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$이므로

$$\frac{a+c}{2} = \frac{77}{8}, \qquad a+c = \frac{77}{4}$$

$$\frac{b+d}{2} = \frac{133}{8}, \qquad b+d = \frac{133}{4}$$

$c = kb, \ d = ka$를 대입하면

$$a + kb = \frac{77}{4}$$

…… ㉠

$$b + ka = \frac{133}{4}$$

…… ㉡

한편, $f(x) = \log_{16}(8x+2)$라 하면 점 $A(a, b)$가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 점 $A'(b, a)$는 함수 $y = f(x)$의 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 점이다.

$x = \log_{16}(8y+2)$에서 $16^x = 8y+2$, 즉 $16^x - 2 = 8y$이므로

$$f^{-1}(x) = 2^{4x-3} - \frac{1}{4}$$

$g(x) = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$라 하면

$$2f^{-1}(x) = g(2x) = 4^{2x-1} - \frac{1}{2}$$

…… ㉢

이때 $c = kb, \ d = ka$이므로 $\quad g(kb) = kf^{-1}(b)$

…… ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad k = 2$

$k = 2$를 ㉠, ㉡에 대입하면

$$a + 2b = \frac{77}{4}, \ 2a + b = \frac{133}{4}$$

위 연립방정식을 풀면

$$a = \frac{63}{4}, \ b = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \ a \times b = \frac{63}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{441}{16}$$

$p = 16, \ q = 441$이므로

$$p + q = 16 + 441 = 457$$

19) 정답 ②

[해설]

ㄱ. $t = 1$일 때, 두 곡선 $y = 1 - \log_2 x$와 $y = 2^{x-1}$의 교점의 좌표는 $(1, 1)$이므로 $\quad f(1) = 1$

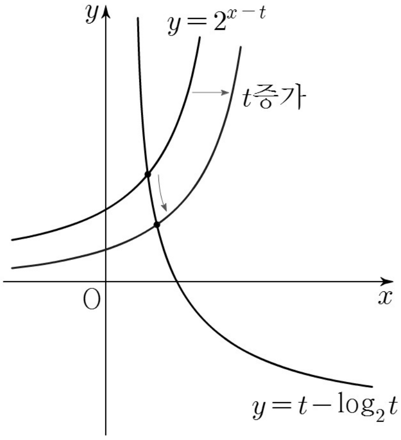
$t = 2$일 때, 두 곡선 $y = 2 - \log_2 x$와 $y = 2^{x-2}$의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이므로 $\quad f(2) = 2$

(참)

$$\therefore A = 100$$

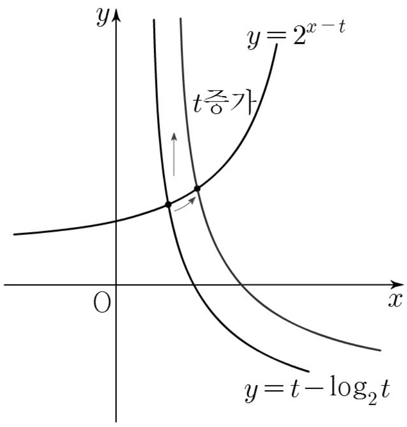
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 함수 $y = t - \log_2 x$는 y축의 양의 방향으로 평행이동하고, 함수 $y = 2^{x-t}$는 x축의 양의 방향으로 평행이동한다.

$a < b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 곡선 $y = a - \log_2 x$와 $y = 2^{x-a}$의 교점을 P, 두 곡선 $y = a - \log_2 x$와 $y = 2^{x-b}$의 교점을 Q라 하면 [그림1]과 같이 평행이동에 의해 Q의 x좌표가 P의 x좌표보다 크다.



[그림1]

또 두 곡선 $y=b-\log_2 x$와 $y=2^{x-b}$의 교점을 R라 하면 [그림2]와 같이 평행이동에 의해 R의 x좌표가 Q의 x좌표보다 크다.



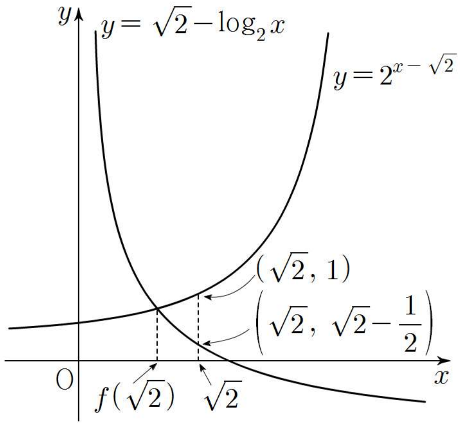
[그림2]

따라서 R의 x좌표가 P의 x좌표보다 크므로 t가 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

(참)

$\therefore B=10$

ㄷ.



$t=\sqrt{2}$일 때, 두 함수 $y=\sqrt{2}-\log_2 x$와 $y=2^{x-\sqrt{2}}$에서

$x=\sqrt{2}$에 대한 함숫값은 각각

$$\sqrt{2}-\log_2\sqrt{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2},\ 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=1$$

이고, $\sqrt{2}-\frac{1}{2}<1$이다.

즉, $\sqrt{2}-\log_2\sqrt{2}<2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$이므로 $x=\sqrt{2}$는 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표보다 큰 곳에 있다.

$\therefore f(\sqrt{2})<\sqrt{2}$

(거짓)

$\therefore C=0$

이상에서 $A+B+C=100+10+0=110$

20) 216

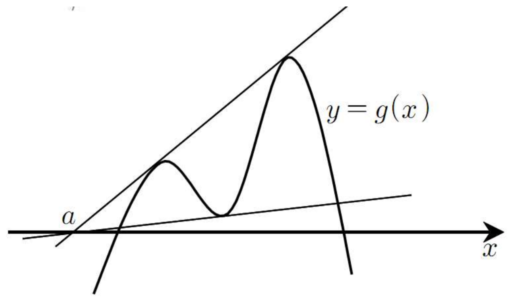
[출제의도] 미분법을 활용하여 극솟값의 최솟값을 구할 수 있는가?

(가) $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}\ (x>a)$는 두 점 $(x, g(x))$, $(a, 0)$을 지나는 직선의 기울기이다.

(나) 직선의 기울기 $f(x)$가 극대인 곳, 즉 기울기가 커지다가 작아지는 곳은 접점이다. $(a, 0)$을 지나면서 $x=\alpha,\ \beta$에서 접선의 기울기가 M으로 같아지려면 공통접선이어야 한다.

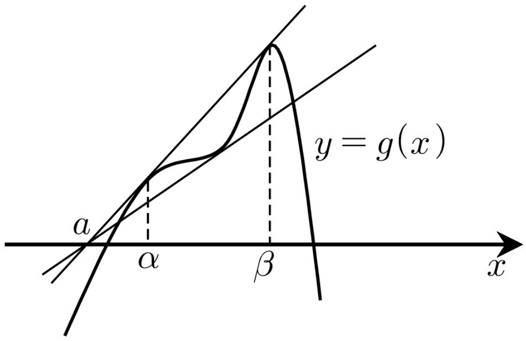
곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각해보면

i)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개다 이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

ii)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 1개다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극대 또는 극소가 되는 x의 값이 3개 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

i), ii)에서

$y=g(x)$와 $y=M(x-a)$가 $x=\alpha,\ \beta$에서 접하므로 방정식 $g(x)=M(x-a)$는 중근을 가진다.

$g(x)-M(x-a)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$g'(x)-M=-2(x-\alpha)(x-\beta)^2-2(x-\alpha)^2(x-\beta)$

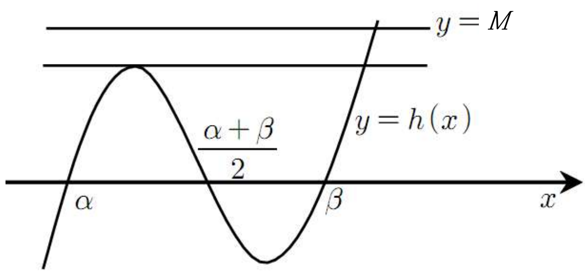
$g'(x)=M-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$g'(x)=0$을 만족하는 실근의 개수는 1개 또는 2개 이어야 한다. 그러므로

$M=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

의 교점이 1개 또는 2개이다.

$h(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 라고 하면



따라서 M의 최솟값은 함수 $h(x)$의 극댓값이다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$이므로, $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$으로 생각하여 극댓값을 구해보면

$h(x)'=12(x+3)(x-3)=0$ 에서 $x=-3$, $x=3$

따라서 구하는 극댓값은

$h(-3)=216$