답

공통
21444 53121 25154
14 / 49 / 660 / 360 / 16 / 7 / 25

확통
14352 3
69 / 95

미적
51543 1
235 / 13

출제 의도
최근 평가원이 추구하는 것으로 보이는 트렌드인 '낯선 문제로 실제 난이도보다 어렵게 보이기'를 실현하려고 노력했다. 10번, 12번, 15번, 22번, 미적 30번 등에서 평가원에서 자주 보이지 않는 상황을 만들어 처음 보는 문제와 유형을 대처하는 방법을 기르도록 하였다.
최근 수능(25, 26학년도)에서 수학I 단원 킬러문제가 자주 나오고 있기에 22번을 삼각함수의 그래프 문제로 제작하였고, 26평가원 지수함수와 로그함수의 그래프 킬러문항처럼 특정 발상을 이용하면 쉽게 풀리도록 하였다.
어려운 4점 (15번, 22번, 미적 28번, 미적 30번)을 제외하고는 간단한 발상과 계산으로 풀리도록 하였으나, 쉬운 문제를 돌파하는 도중 계산이 조금 걸림돌이 되도록 구성하여 26학년도 평가원 시험의 경향을 따랐다.

의도한 난이도: 미적분 1등급 컷 84, 2등급 컷 76, 확률과 통계 1등급 컷 92, 2등급 컷 84

난이도 평가에 대하여

난이도: 0.5~5.0으로 평가, 0.5 단위로 높을수록 어려움
1: 개념 문제
2: 3등급 이상이 목표라면 풀어야 함
3: 2등급 이상이 목표라면 풀어야 함
4: 1등급이 목표라면 시험지 전체에서 하나는 풀어야 함
5: 백분위 99 이상이 목표라면 풀어야 함

총평

어려운 문제(확통이라면 15 22, 미적이라면 15 22 28 30)들은 정말 어렵고 쉬운 문제들은 정말 쉽다.
21, 확통 28, 확통 30, 미적 29의 발상이 어려웠다면 본인의 실력 점검이 필요하다.
10번, 12번이 쉬운 문제들 중 툭 튀는 느낌이 있지만 그정도뿐이다.

12번은 수1에서 보기 힘든 문제로 구술적으로 정의된 함수를 해석하는 문제. 미적 30번의 주제와 어느 정도 겹쳐 12번을 집중하여 푼 미적 선택자라면 30번을 처음보는 발문 치고 쉽게 해석할 수 있었을 것이다.

15번은 식으로 함수의 연속성을 판단할 수도 있지만 그냥 직관적으로 다가가는 것이 더 좋다.
접선의 기울기와 관련하여 해석한 이후는 변곡점에서의 기울기(특수한 경우)를 주의하며 경우를 나누면 해결.

21번은 2606 21번과 같이 극한식 해석이 익숙한 학생들은 손쉽게 풀었을 것이나, 극한식 해석이 숙달되지 않았다면 고전할 만하다.

22번은 삼각함수의 그래프를 각변환과 엮어 평행이동, 확대/축소를 사용하여 기하적으로 해석하는 문제.
매우 어렵다. 2606 6모 22번, 26수능 22번의 독특한 아이디어를 삼각함수에 활용해 보았다.
25, 26 평가원 시험에 모두 수1 문제가 22번 킬러로 나왔기 때문에, 22번에 한 번도 나오지 않은 삼각함수의 그래프를 어렵게 출제해 보았다. (해설을 꼭 읽어보면 좋겠음)

확통 28번, 30번은 늘 나오는 평이한 수준의 문제로, 열심히 공부한 확통 선택자라면 손쉽게 풀 수 있다.

미적 28번은 삼도극이 배제된 이후 24수능부터 3년 연속으로 28번에 적분 고난도 문항이 나온 것을 고려하여, 적분 초고난도 문항으로 제작하였다. 구하는 식의 꼴을 보고 첫 치환적분을 어떻게 하는지 찾는 것이 매우 중요하다. 함수 해석이 필요했던 24수능과 달리 25수능, 26수능에서는 순수하게 적분 방법이 어려운 문제들을 출제했기에, 비슷한 문제가 강화되어 나왔을 경우를 대비하여 적분 자체가 매우 어렵게 제작하였다.

미적 30번은 복잡한 함수의 미분계수를 음함수 미분을 이용하여 구하는 문제로, 22번과 미적 28번보다는 수월하게 해결할 수 있다. 간단한 해석 이후 경우 2개만 고려하면 약간 복잡한 계산밖에 남지 않는다.

해설은 손풀이로 제공함. (확통 28, 29, 30은 귀찮아서 미제공)

제 2 교시 수학 영역

홀수형

5지선다형

0.5/5.0

1. $\sqrt[3]{54} \times 2^{-\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

$\sqrt[3]{54} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 3$

0.5/5.0

2. 함수 $f(x) = x^4 - x^2 + x$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

$f'(x) = 4x^3 - 2x + 1$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = 29$

1.0/5.0

3. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3$, $a_3 + a_5 = 36$일 때, a_7의 값은? [3점]

① 3 ② 9 ③ 27 ④ 81 ⑤ 243

$a_n = ar^{n-1}$이라 하면

$a_1 = a = 3$

$a_3 + a_5 = 3(r^2 + r^4) = 36$, $r^4 + r^2 - 12 = 0$, $\therefore r^2 = 3$ $(\because r^2 \geq 0)$

$a_7 = ar^6 = 3 \times 27 = 81$

1.0/5.0

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + a & (x \leq -1) \\ ax + 5 & (x \geq -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\lim_{x \to -1+} f(x) = -a + 5$

$\lim_{x \to -1-} f(x) = a + 1$

$-a + 5 = a + 1$, $\therefore a = 2$

1.0/5.0

5. $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin(\pi-\theta)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin(\frac{5}{2}\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\rightarrow \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\sin(\frac{5}{2}\pi+\theta)=$ $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ $(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$

1.0/5.0

6. $\int_{-2}^{2}(x^3-3x^2+x+3)dx$의 값은? [3점]

① 8 ② 5 ③ 2 ④ -1 ⑤ -4

$\int_{-2}^{2}(x^3+x)dx=0$ (∵ 원점 대칭)

$\int_{-2}^{2}(-3x^2+3)dx=2\int_{0}^{2}(-3x^2+3)dx=\left[-x^3+3x\right]_0^2\times 2=-4$

1.0/5.0

7. 두 상수 a, b가

$$\log a^3b=4,\ \log b-\log a=1$$

를 만족시킬 때, $\log\sqrt{ab}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$3\log a+\log b=4$

$\log b-\log a=1$

두 식을 더하면 $2\log ab=5$

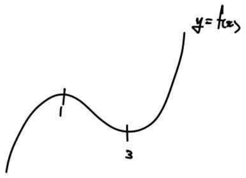
$\therefore \log\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\log ab=\frac{5}{4}$

1.0/5.0

8. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$의 극솟값이 4일 때, $f(x)$의 극댓값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)=0$, $x=1$ or $x=3$



$f(3)=k=4$

$f(1)=k+4=8$

1.0/5.0

9. 수직선 위의 두 점 $P(2^m)$, $Q(-2^{m+2})$에 대하여 선분 $\overline{PQ}$를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 0일 때, $2^{\frac{1}{m}}$의 값은? [4점]

① $\frac{63}{2}$ ② 32 ③ $\frac{65}{2}$ ④ 33 ⑤ $\frac{67}{2}$

$\frac{(1-m)\times 2^m+m\times(-2^{m+2})}{m+(1-m)}=(1-5m)2^m=0$, $\therefore m=\frac{1}{5}$

$2^{\frac{1}{m}}=2^5=32$

2.5/5.0

10. 수열 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_n=b_{n+1}$을 만족시키고 수열 $\{a_n+b_n\}$은 등차수열이다. $b_2+b_4=2b_3$일 때, $\frac{2a_1+5a_5}{b_1+b_4+b_5}$의 값은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

$n\geq 2$인 자연수 n에 대해

$\sum_{k=1}^{n}a_n-\sum_{k=1}^{n-1}a_n=a_n=b_{n+1}-b_n$, $a_n+b_n=b_{n+1}$ ⋯ ㉠

$b_4+b_2=b_3$이므로 b_n $(n\geq 2)$는 등차수열이다. ($\because$ ㉠)

$n=1$일 때

$\sum_{k=1}^{n}a_n=a_1=b_2$

등차수열 b_n $(n\geq 2)$의 공차를 d,

$b_3=b_2+d$, $\therefore a_2=d$

$b_4=b_3+d$, $\therefore a_3=d$

⋮

$b_n=b_{n-1}+d$, $\therefore a_n=d$

$a_3+b_3=b_2+2d$

$a_2+b_2=b_2+d$

$a_1+b_1=b_2+b_1$

$\{a_n+b_n\}$이 등차수열이므로 $b_1=0$

따라서 $\frac{2a_1+5a_5}{b_1+b_4+b_5}=\frac{2b_2+5d}{2b_2+5d}=1$

1.5/5.0

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 가속도 $a(t)$가

$$a(t)=6t-12$$

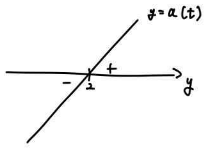
이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=2$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=0$에서 점 P의 속도가 12라면 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 점 P의 속도가 0이라면 점 P가 다시 원점으로 돌아올 때 까지 이동한 거리는 24이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ.



(참)

ㄴ. $v(t)=\int a(t)dt = 3t^2-12t+12$

$= 3(t^2-4t+4) = 3(t-2)^2 \geq 0$ (참)

ㄷ. $v(t)=\int a(t)dt = 3t^2-12t = 3t(t-4)$

$x(t)=\int v(t)dt = t^3-6t^2=0$, $\therefore t=6$ $(\because t>0)$

점 P가 t=0부터 t=6까지 이동한 거리는

$\int |v(t)|dt = \int_0^4 v(t)dt - \int_4^6 v(t)dt = 2|x(4)| = 64$ (거짓)

2.0/5.0

12. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=kx$가 두 점에서 만나고, 한 점의 x좌표가 다른 점의 x좌표의 t배가 되도록 하는 k의 값을 $f(t)$라 하자. $f(2)\times f(4)\times f(8)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{11}\times 2^{-\frac{19}{17}}$ ② $\frac{2}{5}\times 2^{-\frac{10}{9}}$ ③ $\frac{1}{3}\times 2^{-\frac{21}{19}}$
④ $\frac{1}{4}\times 2^{-\frac{11}{10}}$ ⑤ $\frac{1}{7}\times 2^{-\frac{23}{21}}$

두 그래프가 만나는 두 점의 x좌표를 a, ta라 하면

t=2일 때,

$\log_2 a = ka$

$\log_2 2a = \log_2 a + 1 = 2ka$

$\rightarrow ka = 1$

$\log_2 a = ka = 1$, $a=2$, $k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(2)=\frac{1}{2}$

t=4일 때,

$\log_2 a = ka$

$\log_2 4a = \log_2 a + 2 = 4ka$

$\rightarrow ka = \frac{2}{3}$

$\log_2 a = ka = \frac{2}{3}$, $a=2^{\frac{2}{3}}$, $k=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}$

$\therefore f(4)=\frac{1}{3}\times 2^{\frac{1}{3}}$

t=8일 때,

$\log_2 a = ka$

$\log_2 8a = \log_2 a + 3 = 8ka$

$\rightarrow ka = \frac{3}{7}$

$\log_2 a = ka = \frac{3}{7}$, $a=2^{\frac{3}{7}}$, $k=\frac{3}{7}\times 2^{-\frac{3}{7}}$

$\therefore f(8)=\frac{3}{7}\times 2^{-\frac{3}{7}}$

$f(2)f(4)f(8) = 2^{-1+\frac{1}{3}-\frac{3}{7}} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$

$= \frac{1}{7}\times 2^{-\frac{23}{21}}$

2.0/5.0

13. 함수 $f(x)=4x^2-11x+6$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-2x^2+x+2$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-2x^2+x+2$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-2x^2+x+2$ 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

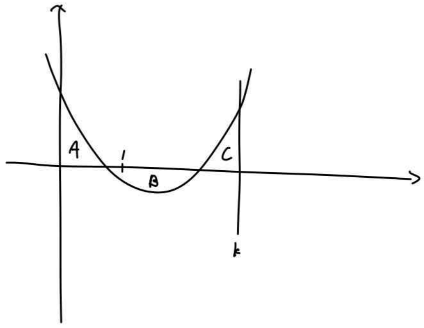
$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이}) \cdots ㉠$$

일 때, 상수 k의 값은? (단, $k>1$이고 $f(k)>-2k^2+k+2$이다.) [4점]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

$f(x)-(-2x^2+x+2)=6x^2-12x+4=g(x)$라 하자.

$g(0)>0$, $g(1)<0$ 이므로 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



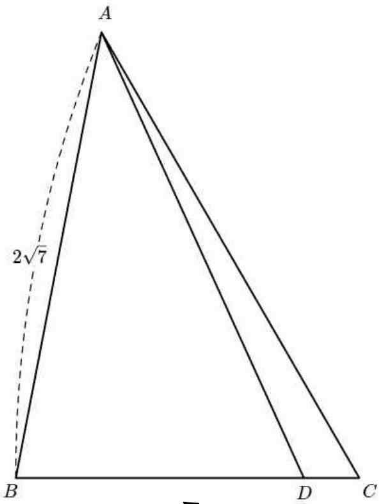
㉠에 의해 $\int_0^k g(x)dx=\left[2x^3-6x^2+4x\right]_0^k=2k^3-6k^2+4k=2k(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ $(\because k>1)$

2.5/5.0

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC의 변 BC 위에 $\sin(\angle CAD):\sin(\angle ABD)=1:3$이 되도록 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC와 삼각형 ACD의 외접원의 넓이가 $\frac{28}{3}\pi$로 같을 때, $\cos(\angle CAD)$의 값은? (단, $\angle ACD<\frac{\pi}{2}$) [4점]

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$　② $\frac{\sqrt{7}}{7}$　③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$　④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$



$\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 외접원의 반지름이 같음 $\rightarrow \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACD)}$, $\overline{AD}=2\sqrt{7}$

$\sin(\angle CAD):\sin(\angle ABD)=1:3$이므로 $\overline{CD}:\overline{AC}=1:3$

$\overline{CD}=k$, $\overline{AC}=3k$라 하면 $\frac{2\sqrt{7}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$에서 $\cos(\angle ACD)=\frac{1}{2}=\frac{10k^2-28}{6k^2}$, $\therefore k=2$

따라서 $\cos(\angle CAD)=\frac{28+36-4}{2\sqrt{7}\times6\times2}=\frac{60}{24\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

4.0/5.0

15. 실수 p와 정수 q, 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x$에 대해 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $A(a,\ f(a))$위에서의 접선이 직선 $y=px+q$과 만나는 점을 P라 하자. 함수

$$g(a)=(\text{점 } A\text{와 점 } P\text{의 } x\text{좌표의 차})$$

와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이 되도록 하는 실수 k의 값은 m뿐이다.

$|q|\le 36$일 때, 모든 순서쌍 $(p,\ q,\ m)$에 대하여 $p+q+m$의 값의 합은? [4점]

① 48 ② 41 ③ 34 ④ -34 ⑤ -41

함수 $g(x)$가 불연속인 x는 $A(a, f(a))$에서의 접선 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$와 직선 $y=px+q$가 평행한 a의 값과 같다. (두 직선이 일치하면 연속)

$f'(x)=3x^2-12x+9$의 최솟값이 -3이므로

i) $p=-3$일 때

$f'(x)=p$의 실근이 $x=2$뿐이므로 직선 $y=px+q$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$위의 직선 $y=-3x+8$과 평행하고 $q\ne 8$이다.

이때 $m=2$이고 정수 q에 대하여 $-36\le q\le 36$, $q\ne 8$이므로 순서쌍 (p, q, m)은 $(-3,-36,2)$, $(-3,-35,2)$, $\cdots$, $(-3,7,2)$, $(-3,9,2)$, $\cdots$, $(-3,35,2)$, $(-3,36,2)$이다.

이때 모든 $p+q+m$의 값의 합은 -80

ii) $p>-3$일 때

$f'(x)=p$의 실근이 2개이므로 직선 $y=px+q$는 곡선 $y=f(x)$와 접한다.

$m=1$이면 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $y=px+q$가 곡선 $y=f(x)$와 $(3, f(3))$에서 접한다.

$\therefore p=0,\ q=0,\quad p+q+m=1$

$m=2$이면 i과 같은 논리로 $p=-3$이다. (모순)

$m=3$이면 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $y=px+q$가 곡선 $y=f(x)$와 $(1, f(1))$에서 접한다.

$\therefore p=0,\ q=4,\quad p+q+m=7$

$m=4$이면 $f'(0)=f'(4)=9$에서 $y=px+q$가 곡선 $y=f(x)$와 $(0, f(0))$에서 접한다

$\therefore p=9,\ q=0,\quad p+q+m=11$

$m=5$이면 $f'(-1)=f'(5)=24$에서 $y=px+q$가 곡선 $y=f(x)$와 $(-1, f(-1))$에서 접한다

$\therefore p=24,\ q=8\quad p+q+m=37$

같은 논리로 $m=6$이면 $p=45$, $q=40$, $q>36$이므로 모순

$m\ge 6$인 모든 자연수 m에 대해 $q>36$이므로

$p+q+m$의 값의 합은 $1+7+11+37=56$

i, ii에 의해 모든 $p+q+m$의 값의 합은 -34이다.

단답형

1.0/5.0

16. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대해

$$a_{n+1}=(n+1)a_n+2$$

를 만족시킬 때, a_3의 값을 구하시오. [3점]

$a_2=2a_1+2=4$

$a_3=3a_2+2=14$

14

1.0/5.0

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^2+2x$이고 $f(0)=4$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=\frac{4}{3}x^3+x^2+4$

$f(3)=36+9+4=49$

49

1.0/5.0

18. $\sum_{k=1}^{10}(k^2+5k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$

$\sum_{k=1}^{10} 5k = 275$

$385+275=660$

660

1.5/5.0

19. 세 상수 a, b, c에 대하여

$$2^a = 3^b = 5^c,\ \frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$$

일 때, 2^a의 값은? [3점]

$2^a=3^b=5^c=k$라 하면

$2=k^{\frac{1}{a}}$

$3=k^{\frac{1}{b}}$

$5=k^{\frac{1}{c}}$

$k^{\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}}=8\times9\times5=k=360$

360

2.0/5.0

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n\times 2^n$이다.

다음은 $\sum_{n=1}^{12} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

주어진 식에 $n=1$을 대입하면 $a_1=2$

$n\times2^n-(n-1)2^{n-1}=\frac{1}{2}(n+1)\times2^n$

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \boxed{(가)}$

$\boxed{(가)}$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=2$이므로 수열 a_n의 일반항은 $a_n=\boxed{(가)}$ 이다.

$\frac{1}{2}(n+1)2^n$

$n\times2^n$

$\sum_{n=1}^{12} a_n = \sum_{n=1}^{12}\boxed{(가)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{12}2^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{12}\boxed{(나)}$

이때 $\sum_{n=1}^{12}\boxed{(나)}$ 의 값을 S라 하면

$S=2+2\times2^2+3\times2^3+\ldots+12\times2^{12}$

$2S=0+1\times2^2+2\times2^3+\ldots+11\times2^{12}+12\times2^{13}$

$2S-S=12\times2^{13}-\sum_{n=1}^{12}2^n$

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{12}2^n+\frac{1}{2}S=3\times2^{14}$

따라서 구하는 값은 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 하자. $\frac{g(2)\times p}{f(2)}=2^m$일 때, m의 값을 구하시오. [4점]

$f(n)=\frac{1}{2}(n+1)2^n$

$g(n)=n\times2^n$

$p=3\times2^{14}$

$\frac{g(2)\times p}{f(2)}=\frac{8\times3\times2^{14}}{6}=2^{16}=2^m,\ \therefore m=16$

16

3.5/5.0

21. 이차함수 $f(x)=(x-1)(x-k)$와 $g(3)=0$인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|g(x)|}{(x-k)f(x)}$가 모든 실수 a에 대해 수렴한다.
>
> (나) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{(x-1)f(x)}{g(x)-(x-1)^2}$가 수렴하지 않도록 하는 모든 실수 b의 값은 $2, m$이다. (단, $m\neq 2$)

$k+m$의 값을 구하시오. [4점]

(가)에서 $a=k$일 때, $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{|g(x)|}{(x-1)(x-k)^2}$가 수렴하므로 $g(x)=(x-k)^2Q(x)$ ($Q(x)$는 이차)

$a=1$일 때, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|(x-k)^2Q(x)|}{(x-1)(x-k)^2}$가 수렴한다.

i) $k=1$인 경우

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|(x-1)^2Q(x)|}{(x-1)^3}$가 수렴 → $Q(x)=(x-1)(ax+b)$, $g(x)=a(x-1)^3(x-3)$ ($\because g(3)=0$)

(나)에서 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{(x-1)f(x)}{g(x)-(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2\left(a(x-1)(x-3)-1\right)}$ ⋯ ㄱ

가 $b=2$일 때 발산하므로 $g(2)=1$, $\therefore a=-1$

ㄱ $=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{(x-1)^3}{-(x-1)^2(x-2)^2}$

따라서 ㄱ이 발산하는 b의 값이 1개이다. (모순)

ii) $k=3$인 경우

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|(x-3)^2Q(x)|}{(x-1)(x-3)^2}$가 수렴하므로 $Q(x)=a(x-1)^2$

(나)에서 i와 같은 논리로 $g(2)=1$, $\therefore a=1$

$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{g(x)-(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x-2)(x-4)}$이 발산하는 b의 값은 2, 4이므로 $m=4$

따라서 $k+m=7$

iii) $k\neq 1$, $k\neq 3$인 경우

같은 논리로 $Q(x)=a(x-1)^2$

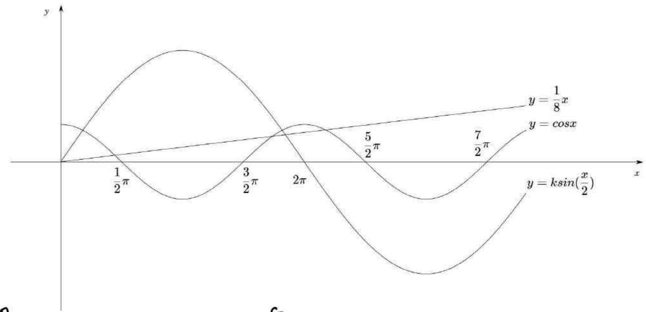
$g(x)=a(x-1)^2(x-k)^2$에서 $g(3)\neq 0$ 이다. (모순)

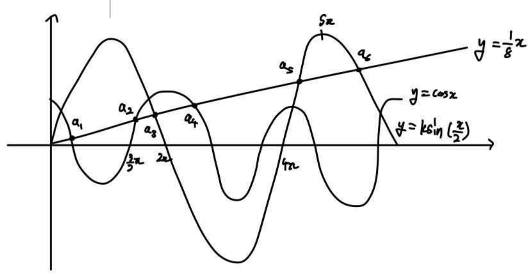
i, ii, iii에 의해 $k+m=7$

5.0/5.0

22. 두 함수 $y=\cos x$와 $y=k\sin(\frac{x}{2})$에 대하여 직선 $y=\frac{1}{8}x$이 두 함수의 그래프와 $x>0$에서 만나는 점의 x좌표를 작은 순서대로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$에 대해 $a_5=ka_2$일 때, $\dfrac{200(k-2)\cos a_2}{\pi}$의 값을 구하시오.

(단, $k>2$이다.) [4점]





위 그래프에서 $\cos a_2=\frac{1}{8}a_2$, $k\sin\frac{a_5}{2}=\frac{1}{8}a_5$ 이다.

$a_5=ka_2$에서 $\frac{1}{8}a_5=k\times\frac{1}{8}a_2$, $k\sin\frac{a_5}{2}=k\cos a_2$

이때

$\sin(\frac{x}{2})=\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$이므로 $y=k\sin(\frac{x}{2})$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 확대, y축의 방향으로 k배 확대한 후 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프와 같다.

$2(\frac{3}{2}\pi)+\pi=4\pi$, $2(2\pi)+\pi=5\pi$이므로 구간 $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$에서 $y=\cos x$의 그래프를 위와 같이 확대, 평행이동하면 구간 $(4\pi, 5\pi)$에서 $y=k\sin(\frac{x}{2})$와 같다.

$\frac{3}{2}\pi<a_2<2\pi$, $4\pi<a_5<5\pi$에서 $2a_2+\pi=a_5$이므로 $a_2=t$라 하면 $a_5=2t+\pi$

$\cos t=\frac{1}{8}t$ ⋯ ㄱ

$k\sin(t+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{8}(2t+\pi)$에서 $k\cos t=\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}\pi$ ⋯ ㄴ

ㄴ $-2\times$ ㄱ $=(k-2)\cos a_2=\frac{1}{8}\pi$

따라서 $\dfrac{200(k-2)\cos a_2}{\pi}=25$

25

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

0.5/5.0

23. ${}_3P_2$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$

1.0/5.0

24. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2}{5}$$

일 때, $P(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{5}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

1.0/5.0

25. 평균이 m이고 표준편차가 3인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 1.92 ② 2.16 ③ 2.58 ④ 3.12 ⑤ 3.96

$a = m - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{36}} = m - 1.29$

$b = m + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{36}} = m + 1.29$

$b - a = 2.58$

1.0/5.0

26. 다항식 $(3x+2)^6(2x+1)$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 8500 ② 9500 ③ 11500 ④ 12500 ⑤ 13500

$(3x+2)^6(2x+1) = 2x(3x+2)^6 + (3x+2)^6$

$(3x+2)^6$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_6C_3 \times 3^3 \times 2^3 = 20 \times 27 \times 8 = 4320$, $4320x^3 \times 2x = 8640x^4$

$(3x+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_6C_4 \times 3^4 \times 2^2 = 15 \times 81 \times 4 = 4860$,

$8640 + 4860 = 13500$

1.5/5.0

27. 주머니 안에 1부터 6까지의 자연수가 적힌 공이 하나씩 들어 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 2개 꺼낼 때, 그 두 공에 적힌 숫자의 합을 확률변수 X라 하자. $E(3X)+V(3X)$의 값은? [3점]

① 35 ② 63 ③ 84 ④ 105 ⑤ 140

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

따라서 $E(x)=7$, $V(x)=E(x^2)-E(x)=\frac{14}{3}$

$E(3x)+V(3x)=21+42=63$

2.5/5.0

28. 앞면이 보이게 일렬로 놓인 동전 5개와 1부터 6까지의 자연수가 적힌 정육면체 주사위 하나가 있다. 이 동전 5개와 주사위 1개로 다음 규칙에 따라 시행을 한다.

주사위를 던져 나온 눈이 n의 배수라면 n번째 동전을 뒤집는다.

이 시행을 3번 한 뒤 뒷면이 보이도록 놓인 동전의 개수가 3일 때, 2가 나오지 않았을 확률은? [4점]

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

2.0/5.0

29. 두 연속확률변수 X, Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 5$, $0 \le Y \le 5$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & (0 \le x \le 2) \\ \frac{1}{4} & (2 < x \le 5) \end{cases}$$

이다. $0 \le x \le 5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + g(x) = ax$가 성립할 때, $320P\left(\frac{2}{25a} \le Y \le 3\right)$의 값을 구하시오. [4점]

2.5/5.0

30. 성준이가 동전 하나와 빨간색 공, 파란색 공, 일렬로 놓인 상자 7개로 다음 규칙에 따라 시행을 한다.

n번째 시행에서 동전을 던져 앞면이 나오면 빨간색 공을, 뒷면이 나오면 파란색 공을 n번째 상자에 넣는다.

이 시행을 7회 한 뒤, (빨간색, 파란색, 파란색, 빨간색)의 순서로 공이 놓인 연속하는 4개의 상자가 없는 경우의 수를 구하시오. [4점]

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

0.5/5.0

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin 3x)^2}{x^2}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}\right)^2 = 9$

1.0/5.0

24. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{1+e^x}\,dx$의 값은? [3점]

① $\ln\dfrac{4}{3}$ ② $\ln\dfrac{3}{2}$ ③ $\ln\dfrac{5}{2}$ ④ $\ln\dfrac{8}{3}$ ⑤ $\ln 3$

$\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \Big[-\ln(e^{-x}+1)\Big]_{\ln 2}^{\ln 8} = -\ln\frac{9}{8} + \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$

1.0/5.0

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$n^2-6n+2 < a_n < n^2+3n+4$를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-6n+2}{n^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+4}{n^2}=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3+1=4$

1.5/5.0

26. 매개변수 $t\,(t>0)$로 나타낸 함수 $y=f(x)$가

$$x=e^t\ln t,\ y=e^{t^2}\ln t$$

이다. $t=a$일 때 $f'(x)=1$가 되도록 하는 상수 a에 대하여 $a+f(0)$의 값은? [3점]

① $e-3$ ② $e-2$ ③ 1 ④ $e+2$ ⑤ $e+3$

$\frac{dx}{dt}=e^t(\ln t+\frac{1}{t})$

$\frac{dy}{dt}=e^{t^2}(2t\ln t+\frac{1}{t})$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}=e^{t^2-t}\times\frac{2t\ln t+\frac{1}{t}}{\ln t+\frac{1}{t}}=1$의 실근이 $t=1$이므로 $a=1$

$t=1$일 때 $x=0$, $y=0$이므로 $f(0)=0$

$a+f(0)=1$

2.0/5.0

27. 함수 $f(x)=e^{x^2}+3x$에 대하여 $f(2x^3-1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g(e+3)+g'(e+3)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{12e+7}{12e+12}$　② $\dfrac{12e+13}{12e+15}$　③ $\dfrac{12e+19}{12e+18}$　④ $\dfrac{12e+25}{12e+21}$　⑤ $\dfrac{12e+31}{12e+24}$

$f'(x)=2xe^{x^2}+3$

$f(2x^3-1)=h(x)$라 하면 $h^{-1}(x)=g(x)$

$f(1)=h(1)=e+3$이므로 $g(e+3)=1$

$h'(x)=6x^2f'(2x^3-1)$에서 $h'(1)=6\times f'(1)=12e+18$

따라서 $g'(e+3)=\dfrac{1}{h'(1)}=\dfrac{1}{12e+18}$

$g(e+3)+g'(e+3)=1+\dfrac{1}{12e+18}=\dfrac{12e+19}{12e+18}$

4.5/5.0

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le t\le \ln 3$인 실수 t에 대해 $f'(t)=-t(e^t+1)f'(t^2)$
>
> (나) $t\ge \ln 3$인 실수 t에 대해 $f(t^2)=(\dfrac{3}{4}+\dfrac{e^t}{4})f(t)+2e^{2t}$

$f(0)=f(\ln 3)-9$일 때, $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{f(-\ln x)}{(x+1)^2}dx$의 값은? [4점]

① -18　② e^2-9　③ e^2　④ e^2+9　⑤ 18

(가)의 식 변형 → $\dfrac{f'(t)}{e^t+1}=-tf'(t^2)\cdots$ ㉠

$\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{f'(t)}{e^t+1}dt=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{-t}f'(t)}{1+e^{-t}}dt\cdots$ ㉡

$e^{-t}=k$라 하면 $-e^{-t}=\dfrac{dk}{dt}$

㉡ $\displaystyle=-\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{f'(-\ln k)}{k+1}dk=\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{f'(-\ln k)}{-k}\times\left(1-\frac{1}{k+1}\right)dk=\left[f(-\ln k)\times\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\right]_1^{\frac{1}{3}}-\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{f(-\ln k)}{(k+1)^2}dk=\frac{1}{4}f(\ln 3)-\frac{1}{2}f(0)+\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{f(-\ln k)}{(k+1)^2}dk$

㉠에서 $\displaystyle\frac{1}{4}f(\ln 3)-\frac{1}{2}f(0)+\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{f(-\ln x)}{(x+1)^2}dx=\int_0^{\ln 3}-tf'(t^2)dt=-\frac{1}{2}f((\ln 3)^2)+\frac{1}{2}f(0)=-\frac{3}{4}f(\ln 3)+\frac{1}{2}f(0)-9$ $(\because$ (나)$)$

정리하면 $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{f(-\ln x)}{(x+1)^2}dx=f(0)-f(\ln 3)-9=-18$ $(\because f(0)-f(\ln 3)=-9)$

단답형

3.5/5.0

29. 공비가 $\frac{1}{m}$(m은 정수)인 등비수열 $\{a_n\}$과

$$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n < 1) \\ 2^n & (a_n \ge 1) \end{cases}$$

인 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.
>
> (나) $b_4 = 16$, $b_6 < 1$

$|b_7| = \frac{1}{4}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 모든 값 중 양수의 합은 $A + \frac{p}{q}$이다.

$A + p + q$의 값을 구하시오.

(단, A, p, q는 자연수이고, p와 q는 서로소, $\frac{p}{q} < 1$이다.) [4점]

$a_n = a\left(\frac{1}{m}\right)^{n-1}$ ($|m| \neq 1$)라 하면

$b_4 = 16$에서 $a_4 \ge 1$, $b_6 < 1$에서 $b_6 = a_6 < 1$

$a_4 > 0$이므로 $0 < a_6 < 1$이고 $-1 < \frac{1}{m} < 1$이므로 $b_7 = a_7$, $\therefore |a_7| = \frac{1}{4}$

i) $a_7 = \frac{1}{4}$일 때

$\frac{1}{m} > 0$이고 $a_4 = \frac{1}{4} \times m^3 \ge 1$, $a_6 = \frac{1}{4} \times m < 1$에서 $\sqrt[3]{4} \le m < 4$, $m = 2, 3$ ($\because m$은 정수)

$m=2$이면 $a_n = 2^{5-n}$, $b_n = \begin{cases} 2^{5-n} & (n \ge 6) \\ 2^n & (n \le 5) \end{cases}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{5} 2^n + \sum_{n=6}^{\infty} 2^{5-n} = 62 + 1 = 63$

$m=3$이면 $a_n = \frac{1}{4} \times 3^{7-n}$, $b_n = \begin{cases} \frac{1}{4} \times 3^{7-n} & (n \ge 6) \\ 2^n & (n \le 5) \end{cases}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{5} 2^n + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{4} \times 3^{7-n} = 62 + \frac{9}{8} = 63 + \frac{1}{8}$

ii) $a_7 = -\frac{1}{4}$일 때

$\frac{1}{m} < 0$이고 $a_4 = -\frac{1}{4} \times m^3 \ge 1$, $a_6 = -\frac{1}{4} \times m < 1$에서 $-4 < m \le \sqrt[3]{4}$, $m = -2, -3$ ($\because m$은 정수)

$m=-2$이면 $a_n = 2^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = \begin{cases} 2^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & (n = 1, 3, 5, n \ge 6) \\ 2^n & (n = 2, 4) \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -16 + 4 - 4 + 16 - 1 + \sum_{n=6}^{\infty} 2^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -1 + \frac{1}{3} < 0$

$m=-3$이면 $a_n = \frac{1}{4} \times 3^7 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \begin{cases} \frac{1}{4} \times 3^7 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n & (n = 1, 3, 5, n \ge 6) \\ 2^n & (n = 2, 4) \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\frac{729}{4} + 4 - \frac{81}{4} + 16 - \frac{9}{4} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{4} \times 3^7 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -183 - \frac{1}{4} < 0$

i, ii에 의해 모든 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값 중 양수의 합은 $126 + \frac{1}{8}$이다.

$A = 126$, $p = 8$, $q = 1$, $A + p + q = 135$

135

4.0/5.0

30. 곡선 $y = (x-3)^2$ 위의 점 $A(a, (a-3)^2)$ ($a \ne 3$, $a > 0$)과 원점을 지나는 직선이 이 곡선과 만나는 두 점 중 A가 닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리를 $f(a)$라 할 때, $t \ne 1$인 양수 t에 대해 정의된 함수 $g(x)$가 1이 아닌 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> $f(a) = f(ta)$가 되도록 하는 실수 a의 값은 $g(t)$이다.

$\frac{\{g(k)-3\}^2}{g(k)} = \frac{1}{2}$가 되도록 하는 모든 실수 k에 대하여 $g'(k)$의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

두 양수 α, β에 대해 $\frac{(\alpha-3)^2}{\alpha} = \frac{(\beta-3)^2}{\beta}$일 때 $f(\alpha) = f(\beta)$이므로

$f(a) = f(ta)$이면 $\frac{(a-3)^2}{a} = \frac{(ta-3)^2}{ta}$이다.

위 식을 정리하면 $t(a-3)^2 = (ta-3)^2$

양변을 t에 대해 미분하면 $(a-3)^2 + t\frac{da}{dt} \cdot 2(a-3) = \left(a + t\frac{da}{dt}\right) \cdot 2(ta-3)$ ⋯ ㉠

$\frac{(a-3)^2}{a} = \frac{1}{2}$, $2a^2 - 13x + 18 = (2a-9)(a-2) = 0$에서 $a = 2$와 $a = \frac{9}{2}$이므로

$f(2) = f\left(\frac{9}{2}\right)$. 따라서 $a = 2$일 때 $k = \frac{9}{4}$, $a = \frac{9}{2}$일 때 $k = \frac{4}{9}$

㉠에 $a = 2$, $t = \frac{9}{4}$를 대입하면 $1 - \frac{9}{2}\frac{da}{dt} = \left(2 + \frac{9}{4}\frac{da}{dt}\right) \times 3$, $\frac{da}{dt} = -\frac{4}{9}$

$a = \frac{9}{2}$, $t = \frac{4}{9}$를 대입하면 $\frac{9}{4} + \frac{4}{3}\frac{da}{dt} = \left(\frac{9}{2} + \frac{4}{9}\frac{da}{dt}\right) \times (-2)$, $\frac{da}{dt} = -\frac{81}{16}$

이때 $a = g(t)$이므로 $\frac{da}{dt} = g'(t)$

따라서 모든 $g'(k)$의 값의 곱은 $\left(-\frac{4}{9}\right) \times \left(-\frac{81}{16}\right) = \frac{9}{4}$이다

$p = 4$, $q = 9$, $p + q = 13$

13

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.