수능대비 고난도 기출 선별

2027 ver.1 (Total 221제)

Contents

LEVEL 1

— 평가원 —

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

21. 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1) > -1$
(나) $f(1)-f(-1) > 8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x) \geq 0$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1| = 2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

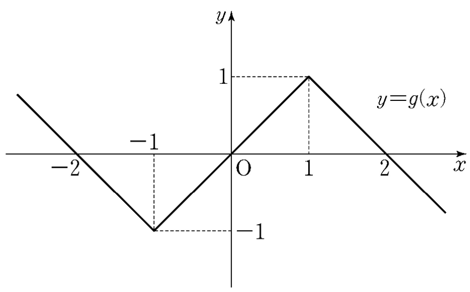
21. 실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x < -1) \\ bx & (-1 \le x < 1) \\ x+c & (x \ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g \circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]

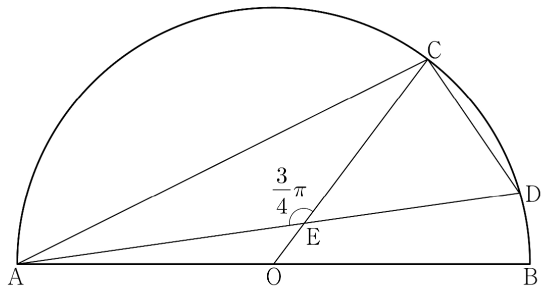
① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2



13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x | 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \,|\, \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (|f(t)|-|t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $g'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$, $x=6$ 에서 극값을 갖는다.

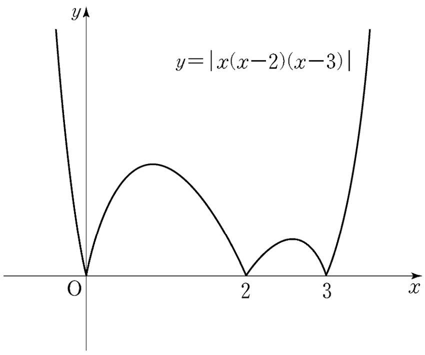
$f(6)\times g(2)<0$ 일 때, $f(8)$ 의 값은? [4점]

① 16　② 22　③ 28　④ 34　⑤ 40

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

20. 상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

20. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

21. 함수

$$f(x)=\frac{k}{x-11}+6 \quad (k \geq 36)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수는? [4점]

$\lvert f(x)\rvert \leq y \leq -x+5$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 2 이상 4 이하이다.

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

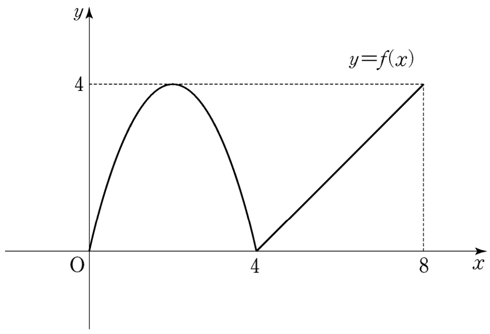
① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

29. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\displaystyle\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은

$\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 2 & (0 \le x < 2) \\ -2x+6 & (2 \le x < 3) \\ 0 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$

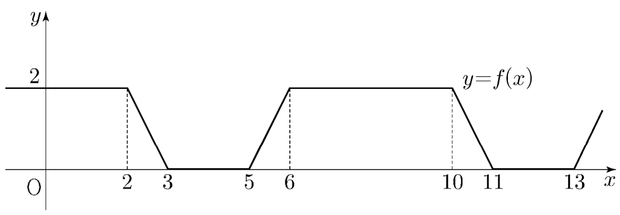
(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}+n & (x \ne 0) \\ n & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38



29. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \left|2^x-4\right| & (x\le p \text{ 또는 } x\ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lvert f(k) \rvert + \lvert g(k) \rvert = 0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

13. 두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \le a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

$b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고

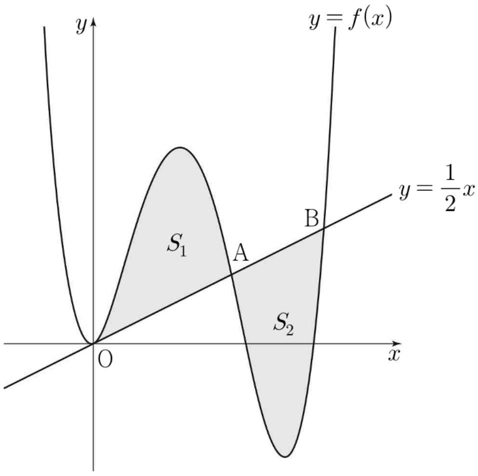
x좌표가 양수인 두 점 A, B($\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$)에서 만난다.

곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,

곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$ 이고 $S_1=S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

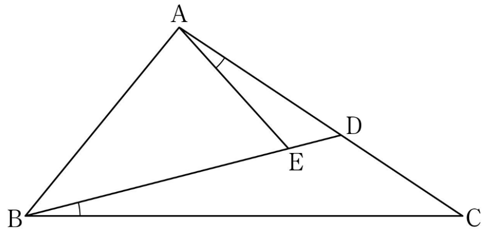


20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=6$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 AC 를 $4:3$ 으로 내분하는 점을 D 라 하자. 선분 BD 위의 점 E 가

$$\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{DBC},\quad \sin(\angle\mathrm{DAE}):\sin(\angle\mathrm{EDA})=1:3$$

을 만족시킨다. $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{5}$ 일 때, 삼각형 BCD 의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{180}{11}\pi$ ② $\frac{195}{11}\pi$ ③ $\frac{210}{11}\pi$

④ $\frac{225}{11}\pi$ ⑤ $\frac{240}{11}\pi$

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

13. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x (x-t)f(t)dt = 3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x)dx$의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

20. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

13. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

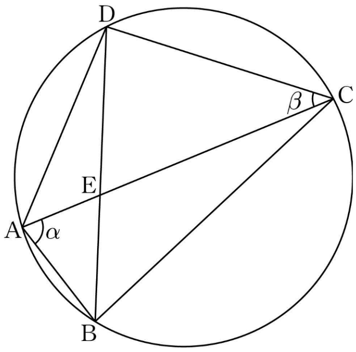
을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

13. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{30}$, $\overline{\mathrm{CD}}=8$

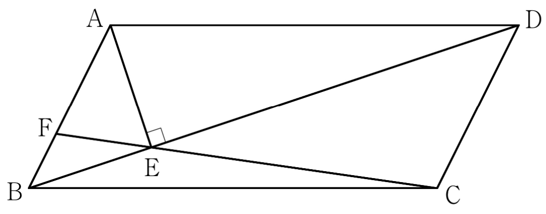
이다. $\angle\mathrm{BAC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ACD}=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{12}$이다.
두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는?
$\left(\text{단, } 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

13. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자.

$\cos(\angle \mathrm{AFC})=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{20}{3}$　② 7　③ $\dfrac{22}{3}$　④ $\dfrac{23}{3}$　⑤ 8

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수인 경우}) \\ a_n+2n & (a_n\text{이 } 4\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_3 > a_5$

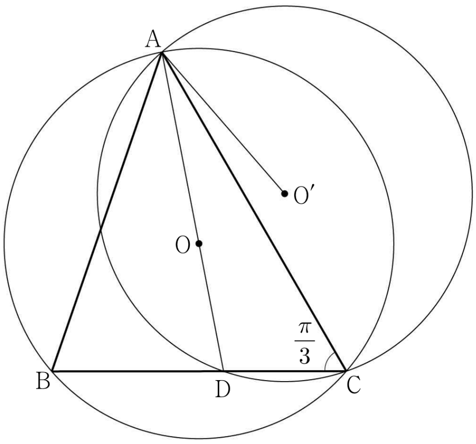
$50 < a_4+a_5 < 60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

13. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{36\sqrt{7}}{7}, \quad \sin(\angle \mathrm{BAC})=\frac{2\sqrt{7}}{7}, \quad \angle \mathrm{ACB}=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. 삼각형 ADC 의 외접원의 중심을 O′ 이라 할 때, $\overline{\mathrm{AO'}}=5\sqrt{3}$ 이다. $\overline{\mathrm{OO'}}^2$ 의 값은? (단, $0<\angle \mathrm{BAC}<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\int_t^x f(s)\,ds = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

< 보 기 >

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 $k\,(k \ge 3)$에 대하여
세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [4점]

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $g(x)=0$ 은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$ ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

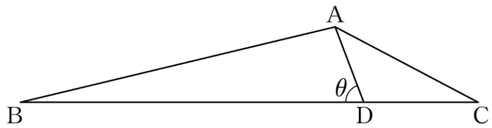
20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.
S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert S_m \rvert = \lvert S_{2m} \rvert = 162$인 자연수 $m\,(m>8)$이 존재한다.

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle \mathrm{ADB}=\theta$라 하자.

$$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2},\quad \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^x+2,\quad y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

20. 최고차항의 계수가 3 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$ 의 모든 실근은 0, 3 이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = -2^{-x+a} + b$가 있다.
집합 $\{x \mid x \neq 4,\ x\text{는 실수}\}$에서 정의된 함수

$$g(x) = f(x) + 2^x + \frac{|x-4|}{x-4}\{f(x) - 2^x\}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 t에 대하여 함수 $y = g(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

20. 양수 t에 대하여 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2}{t}\right]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sqrt{3}\sin(t\pi x),\quad g(x)=-3\cos(t\pi x)$$

가 있다. $0<k<\frac{2}{t}$인 상수 k에 대하여 $f(k)=g(k)=3k$일 때, $60(t+k)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 양수 a와 0이 아닌 실수 d에 대하여 첫째항이 모두 a이고, 공차가 각각 d, $-2d$인 두 등차수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = \lvert b_7 \rvert$
(나) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\lvert a_k \rvert - \lvert b_k \rvert)$라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \le 108$이고, $S_p = 108$인 자연수 p가 존재한다.

$S_n \ge 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 m이라 할 때, a_m의 값은? [4점]

① 46 ② 50 ③ 54 ④ 58 ⑤ 62

21. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=3^{x}-n$$

의 그래프가 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 $g(n)$이라 하자. $k \le g(n) < k+1$을 만족시키는 자연수 k를 $h(n)$이라 할 때, $h(n) < h(n+1)$을 만족시키는 100 이하의 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 103　② 105　③ 107　④ 109　⑤ 111

20. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{3}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le a_3$이다.

$a_4+a_5 \le 24$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 31 ② 37 ③ 43 ④ 49 ⑤ 55

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_1은 1이 아닌 양수이다. (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}+a_{2n}=1$이고 $a_{2n}\times a_{2n+1}=1$이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{14}(|a_n|-a_n)=10$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\dfrac{10}{3}$ ② 4 ③ $\dfrac{14}{3}$ ④ $\dfrac{16}{3}$ ⑤ 6

28. 두 양수 a, b에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} a\left(4-x^2\right) & (0 \leq x < 3) \\ b\log_2 \dfrac{x}{3}-5a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=10$이고 $f(b)=2b$일 때, $5a+b$의 값을 구하시오. [4점]

19. 7 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 함수

$$f(x)=\left|2^m\cos x-2^n\right|$$

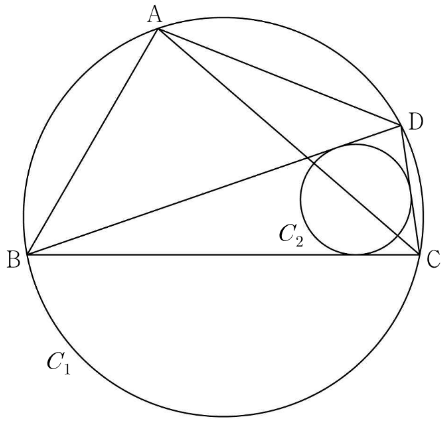
이 있다. $0\le x\le 2\pi$에서 방정식

$$\{f(x)\}^2-\left(2^5+2^4\right)f(x)+2^9=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 6이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m,n)의 개수는? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 인 원 C_1에 내접하고 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$ 인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AC가 삼각형 BCD에 내접하는 원 C_2의 넓이를 이등분할 때, 원 C_2의 반지름의 길이는? (단, $\overline{BC} > \overline{CD}$) [4점]



① $\sqrt{3}-\frac{2}{7}\sqrt{21}$ ② $\sqrt{3}-\frac{5}{21}\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{3}-\frac{4}{21}\sqrt{21}$

④ $2\sqrt{3}-\frac{5}{9}\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{21}$

17. $a>\pi$인 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2 x-\sin x-1$$

이 구간 $(\pi, a]$에서 최솟값을 갖도록 하는 a의 최솟값을 p라 하자.
구간 $(\pi, p]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라 할 때,
$p\times M$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{8}\pi$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{5}{8}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{8}\pi$

19. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 네 수 a_1, a_3, a_5, a_7은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다.
(나) 8 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \times a_{9-n} = 75$이다.

$a_1 + a_2 = \dfrac{10}{3}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = \dfrac{400}{3}$일 때, $a_3 + a_8$의 값은? [4점]

① $\dfrac{110}{3}$ ② 40 ③ $\dfrac{130}{3}$ ④ $\dfrac{140}{3}$ ⑤ 50

21. 자연수 n에 대하여 $\frac{n-1}{6}\pi \le x \le \frac{n+2}{6}\pi$에서 함수

$$f(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 40 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

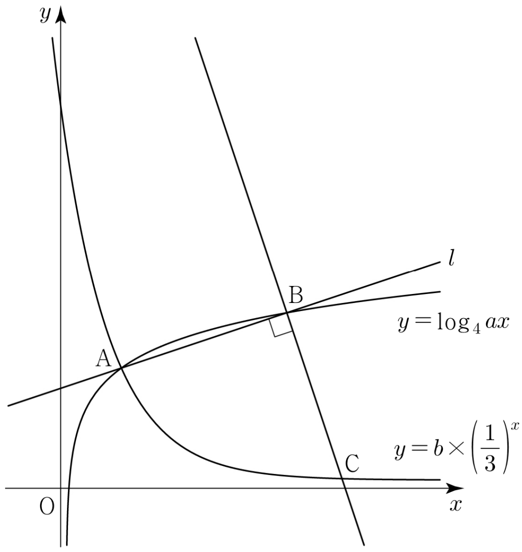
① 115 ② 117 ③ 119 ④ 121 ⑤ 123

27. 일차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2} = 4, \ \lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{x+3} = -4$$

일 때, $g(2)-f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

20. 그림과 같이 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_4 ax$ 와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 에서 만나고, 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 이 점 A 를 지난다. 점 B 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선이 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ 이라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{10}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b 는 양수이고 $x_1<x_2<x_3$ 이다.) [4점]



<보 기>

ㄱ. $x_2-x_1=3$
ㄴ. $x_3-x_1=2(y_1-y_3)$
ㄷ. $a^2=4^b$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 이차함수 $f(x)=(x-k)^2\,(k>0)$ 이 있다. 양수 a 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 3) \\ kf(x-a) & (x > 3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(가) $\lim_{x \to 3} g(x)$ 가 존재한다.
(나) 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서만 만난다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$ 이면 $g(2)=0$ 이다.
ㄴ. $g(k+a)< g(3)$
ㄷ. $(k-1)(k-2)\ge 0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위에
두 점 $\mathrm{A}(a,\ 3^a+b)$, $\mathrm{B}(a+3,\ 3^{a+3}+b)$가 있다.
직선 $y=x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은
55이다. 곡선 $y=\log_3(x-a-b)$ 위의 점 C에 대하여
점 C의 y좌표가 $a+3$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=a+55$일 때, $a+b$의 값은?
[4점]

① $\log_3 6$ ② $\log_3 12$ ③ $\log_3 18$
④ $\log_3 24$ ⑤ $\log_3 30$

27. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $a_8 = 2a_5 + 10$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \times a_{n+1} \geq 0$이다.

28. 자연수 n에 대하여 $0 \leq x \leq 4$일 때, x에 대한 방정식

$$\sin \pi x - \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

의 모든 실근의 합을 $f(n)$이라 하자.
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 2 이상의 자연수 n 과 상수 k 에 대하여 $n^2-17n+19k$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.
$\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값을 구하시오. [4점]

27. 부등식

$$\log|x-1|+\log(x+2)\le 1$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

28. 상수항과 계수가 모두 음이 아닌 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)+g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2 g(x)}{x^5} = 4$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5} = 2$

28. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, n]$에서 함수 $y=2\sin\left\{\frac{\pi}{6}(x+1)\right\}$의 최댓값을 $f(n)$, 최솟값을 $g(n)$이라 할 때, 부등식 $2<f(n)-g(n)<4$를 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

27. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k+1} = 240, \qquad \sum_{k=1}^{m} (a_k + m) = 360$$

을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

26. $0 \le x < 2\pi$에서 x에 대한 부등식

$$(2a+6)\cos x - a\sin^2 x + a + 12 < 0$$

의 해가 존재하도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

20. $t>4$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left|2^{-x+3}-2\right|=-x^2+tx-4$$

의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하자. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\left|2^{-x+3}-2\right| & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta)\\ -x^2+tx-4 & (\alpha\le x\le\beta)\end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 최솟값은? [4점]

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{26}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $\sqrt{30}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

28. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 어떤 자연수 k에 대하여

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 21, \quad S_{k+4} = 11$$

이 성립할 때, a_{k+6}의 값을 구하시오. [4점]

LEVEL 2

— 평가원 —

29. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

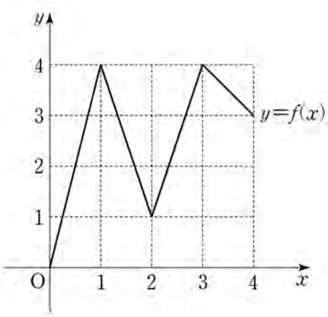
이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 그림과 같이 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X = \{a, b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$) [4점]

X에서 X로의 함수 $g(x) = f(f(x))$가 존재하고 $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a) \leq 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1} + ka_n\right) = 0$$ 이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

20. $a>\sqrt{2}$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\,0)$에서의 접선이
곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고,
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을
B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때,
$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times\lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.

(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_{1}^{2} f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \le 0) \\ x-1 & (0 < x \le 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

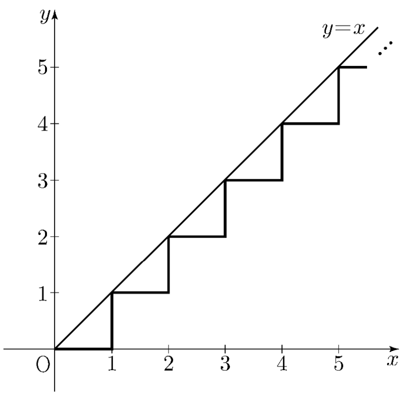
$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

29. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (ⅰ) A_0은 원점이다.
>
> (ⅱ) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



20. 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x>k$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x))=3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

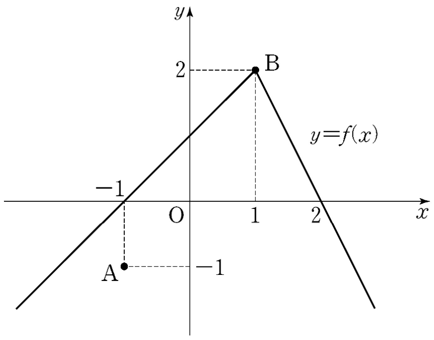
함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.

$f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]



21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$ 의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $\lvert g(x) \rvert \geq \lvert g(3) \rvert$이다.

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

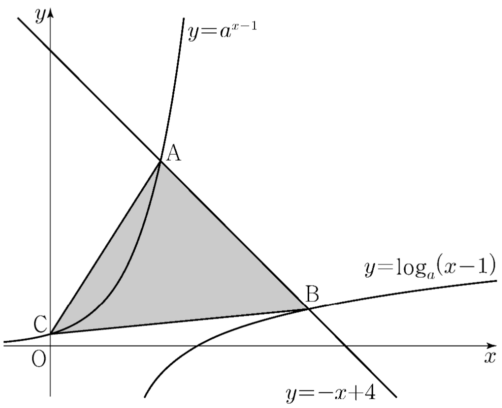
(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $\left(x^n-64\right)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

28. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

— 고3 학력평가 —

15. 최고차항의 계수가 1이고 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $\frac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은? [4점]

(가) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값은 <u>존재하지 않는다</u>. (나) $x \ge a$인 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은 4이다.

① $-\frac{41}{3}$ ② -13 ③ $-\frac{37}{3}$ ④ $-\frac{35}{3}$ ⑤ -11

15. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

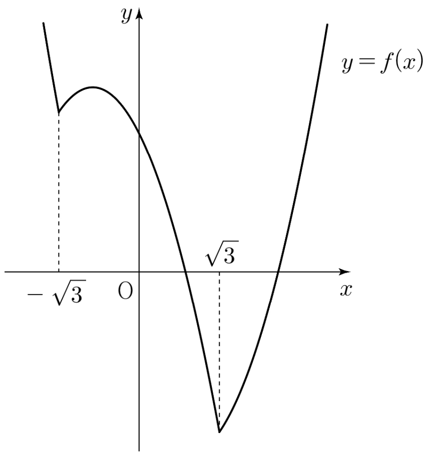
$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [4점]

① 372 ② 377 ③ 382 ④ 387 ⑤ 392

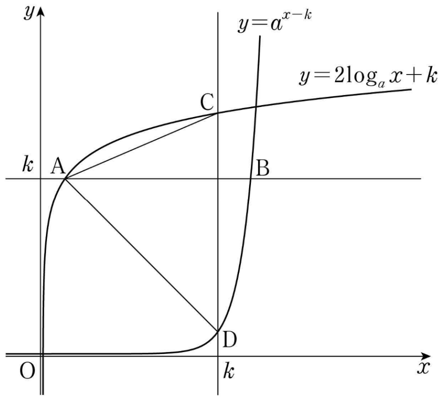
20. 실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\frac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=\left|x^2-3\right|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3, x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



21. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다. (나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$) [4점]

20. 상수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+2}+7 & (x<-2) \\ -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-a}+10 & (x\geq-2) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x+2^a y-t=0$이 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)=2$를 만족시키는 t의 최솟값이 함수 $f(x)$의 최솟값과 같도록 하는 모든 2^a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 $k(k\neq 0)$에 대하여

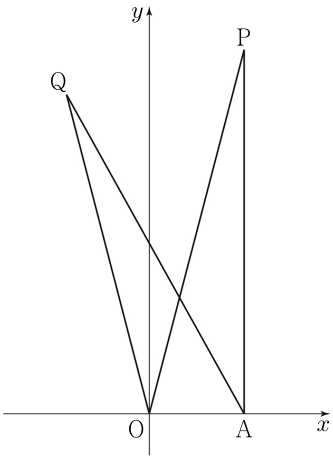
$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}\times\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=k$$

일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

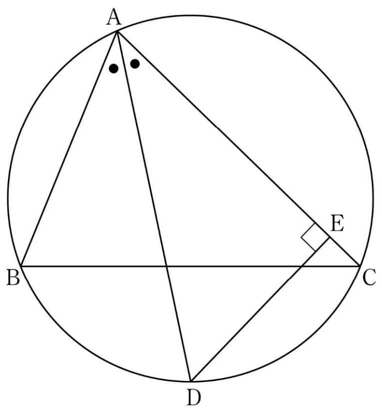
21. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(2, 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
(나) $\cos(\angle \mathrm{OPA})=\cos(\angle \mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



21. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]



20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.
양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,0)$, $(0,2t)$,
$(-t,0)$, $(0,-2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가
곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는
$t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오.
(단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) [4점]

21. 함수 $f(x)=-x^2+kx\ (k>0)$의 그래프 위에 있는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))\left(a>\frac{k}{2}\right)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하고, 직선 $y=g(x)$의 x절편을 b라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 AOH의 넓이를 S라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_a^b g(x)dx=S$

(나) $\int_0^a \left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx=\frac{32}{3}$

$g(-k)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.) [4점]

20. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a\neq 0)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a 의 값의 범위는 $m<a<M$ 이다.

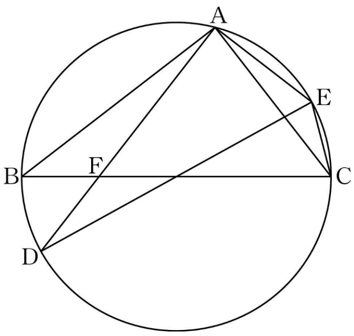
함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=4,\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}},\ \sin(\angle \mathrm{CAE})=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{\mathrm{AF}}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

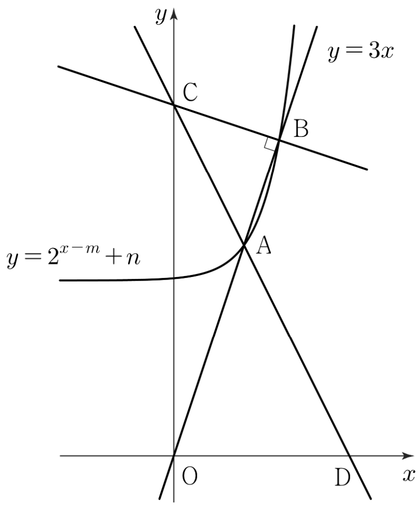


20. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)\{f(x)+f(t)\}\,dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

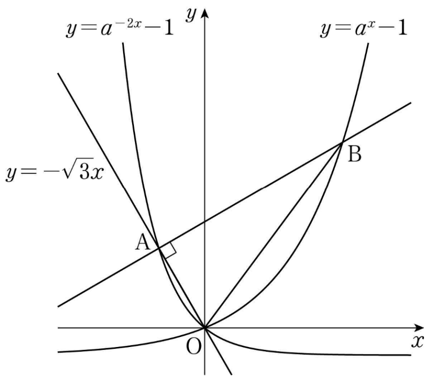
21. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n\ (m>0,\ n>0)$과 직선 $y=3x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



21. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\ y=a^{x}-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x}-1$과 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



22. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$ 에 대하여 $x \geq -3$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3 \leq x < 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \leq x < 6k+3) \end{cases}$$

(단, k 는 모든 자연수)

이다. 자연수 n 에 대하여 직선 $y=n$ 과 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{12} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. $m \le -10$ 인 상수 m 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} \left|5\log_2(4-x)+m\right| & (x \le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(t>0)$ 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 모든 실근의 합을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$t \ge a$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 양수 a 의 최솟값은 2 이다.

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$
(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$

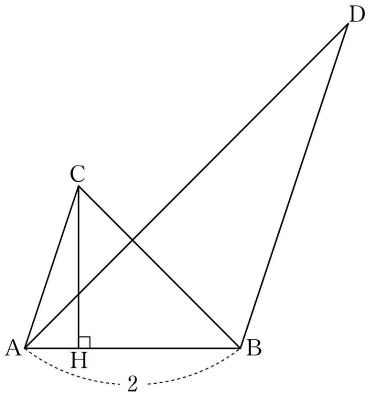
$\int_{0}^{p} g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

20. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$ 의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이다.

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

22. 실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} |a_n+n| & (a_n<0) \\ a_n-10+k & (a_n \geq 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_4 \times a_5=0$이 되도록 하는 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 함수 $f(x)=\left|x^3-3x+8\right|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

22. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

— 고2 학력평가 —

28. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$
(나) 1이 아닌 상수 α에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha$이다.

$\alpha\times f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_{2n-1}=1$
(나) 수열 $\{a_na_{n+1}\}$은 등비수열이다.

$S_{10}=33$일 때, S_{18}의 값을 구하시오. [4점]

21. 상수 k에 대하여 정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x-2}-2 & (x<k) \\ -\log_2(x+2)-2 & (x \ge k) \end{cases}$$

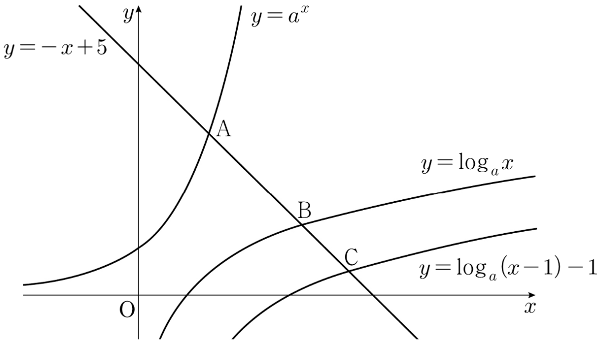
가 일대일대응이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \log_2(2-x)+2 & (x<-k) \\ -2^{x-2}+2 & (x \ge -k) \end{cases}$$

라 할 때, $f(a) \le b \le g(a)$를 만족시키는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? (단, $-2 \le a \le 2$) [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

27. $a>2$인 실수 a에 대하여 그림과 같이 직선 $y=-x+5$가 세 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\log_a(x-1)-1$과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.
$\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$일 때, $4a^3$의 값을 구하시오. [4점]



27. 두 자연수 a, b에 대하여 $0 \le x \le 8$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = a\sin\frac{\pi}{4}x + b$$

이다. 집합 $\{x \mid f(x) = n,\ n \text{은 자연수}\}$의 모든 원소의 합이 22일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [4점]

29. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $12(a_{14}+a_{15})$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n}-1 & (a_n>0)\\ -a_n & (a_n\le 0)\end{cases}$$

이다.

(나) $a_1>6$이고, $a_1+a_5+a_9+a_{13}=13$이다.

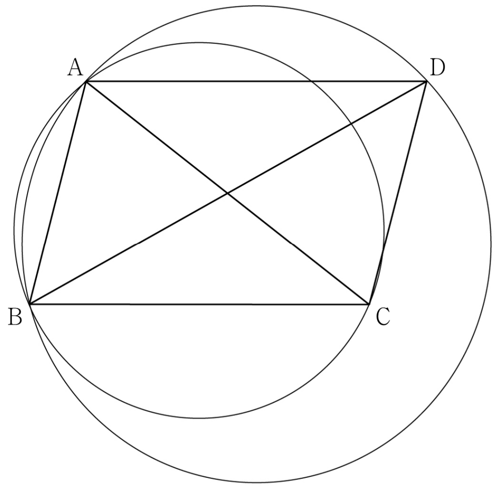
27. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n에 대하여 모든 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) m의 양의 제곱근은 n의 양의 네제곱근의 2배이다.

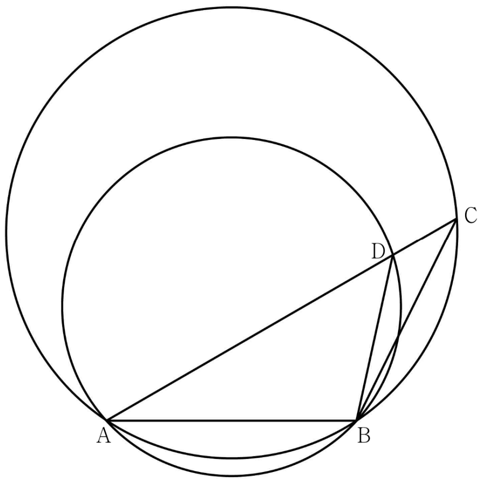
(나) $\frac{3m}{n}$은 자연수이다.

28. 두 자연수 a, b에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, \log_4 b)$, $\mathrm{B}(1, \log_8 \sqrt[4]{27})$이 있다. 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 곡선 $y=-\log_4(3-x)$ 위에 있고, 집합 $\{n \mid b < 2^n \times a \le 32b,\ n은\ 정수\}$의 모든 원소의 합은 25이다. $a+b$의 최댓값을 구하시오. [4점]

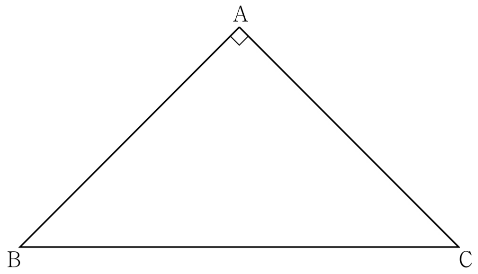
27. 그림과 같이 둘레의 길이가 20 이고 $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 ABCD 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{32}{3}\pi$ 일 때, 삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AD}}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

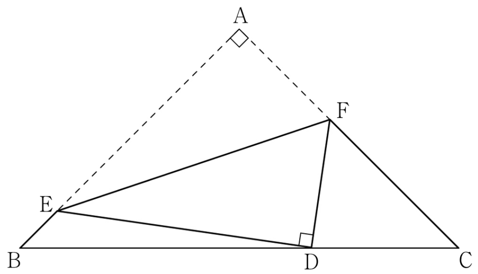


29. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}} > 2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC 위의 점 D가 $\overline{\mathrm{CD}} = 2\sqrt{7}$, $\cos(\angle\mathrm{BDA}) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ 을 만족시킨다. 삼각형 ABC와 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하자. $R_1 : R_2 = 4 : 3$일 때, $\overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{BD}}$의 값을 구하시오. [4점]

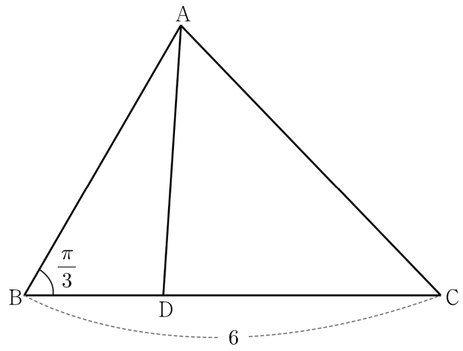


29. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 BC 위의 점 D, 선분 AB 위의 점 E, 선분 AC 위의 점 F에 대하여 선분 EF를 접는 선으로 하여 점 A가 점 D와 겹쳐지도록 접었다. 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이의 비가 $2:1$일 때, 선분 DF의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





28. $\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B와 점 C가 아닌 점 D를 잡고, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r_2라 하자. $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{13}}{3}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 1보다 큰 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\left|2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}\right|$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 실수 $t\,(0\le t\le 2k)$에 대하여 $t\le x\le t+1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이 되도록 하는 t의 값은 α와 β뿐이다.

$k\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$) [4점]

29. 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & (x<5) \\ |2x-a| & (x \geq 5) \end{cases},$$

$$g(x)=(x-5)(x-b)$$

라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

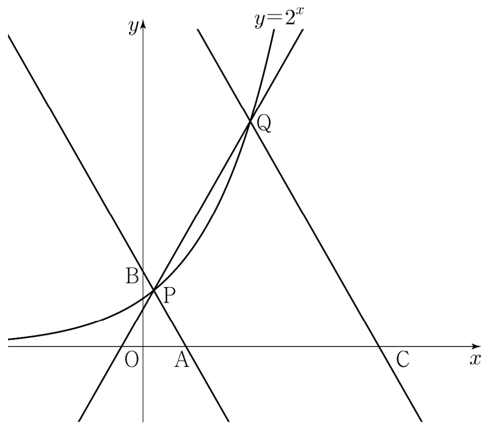
LEVEL 3

— 평가원 —

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}}, \quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) (직선 AP의 y절편) $-$ (직선 BQ의 y절편) $= \dfrac{13}{2}$
(나) 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

29. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
>
> (다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 이 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$ 이다.
(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = \dfrac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
(나) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

30. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,
삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다. (나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

30. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$ 에 대하여 구간 $[0,\infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$ 일 때, $g(x)=f(x)$ 이다. (나) $n \le x < n+1$ 일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$ 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\,(k \ge 6)$ 에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$ 라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-n^2\right)=\frac{241}{768}$ 이다. k의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$
>
> 이다.

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (\lvert a_n \rvert \text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } \lvert a_n \rvert \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$ 이다. (나) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+2} \rvert$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0) = -3$, $f(g(1)) = 6$

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
$h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$와

곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다.

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에

있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{133}{8}\right)$일 때,

$a\times b=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 정수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 <u>존재하지 않는</u> 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = f(3) = 0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x) = 0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

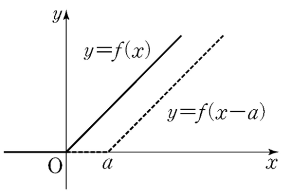
30. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

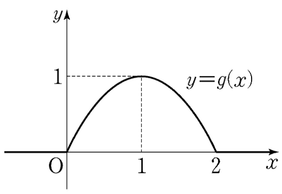
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \le 1) \\ 0 & (|x-1| > 1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a < b < 2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]





30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f' \circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

30. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고 $0<b-a\leq\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim_{x \to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$에 대하여 $f(k-1)f(k+1)<0$ 을 만족시키는 정수 k는 <u>존재하지 않는다</u>.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$$ 이다.

(나) $n=3$, 4일 때, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=6$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) 네 항 a_2, a_3, a_4, a_5 중 짝수인 항의 개수는 1이다.

21. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+a & (x<2) \\ \left|5\log_2 x-b\right| & (x \geq 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
(나) $g(t)=2$인 자연수 t의 개수는 6이다.

22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
> 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 양수 a와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이다.

$f(a)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$

(나) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

22. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
> (나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to k}\frac{2x^2 f(x)-\left(f(k)\right)^2}{x-k}=\lim_{x \to k}\frac{\left(f(x)\right)^2-\left(f(k)\right)^2}{x-k}$$
을 만족시키는 실수 k는 t, $-t\,(t>1)$뿐이다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 17일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (a_n \geq 3) \\ 10 & (a_n < 3) \end{cases}$$

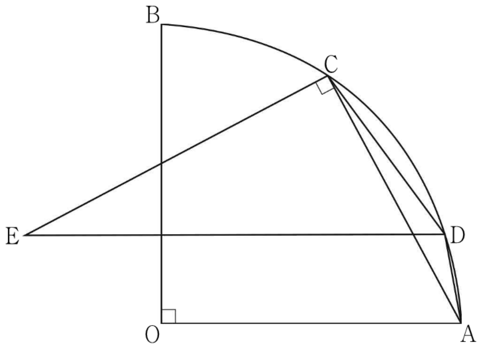
을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2 = 2\int_3^x (t^2+2t)f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



21. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\displaystyle\sum_{k=m}^{2m} \lvert a_k \rvert = 128$인 자연수 m이 존재한다.

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x\lvert g(x)\rvert = \int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+x & (f(x)\ge 0) \\ 2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 불연속인 실수 t의 개수는 1이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수는 2이다.

$f(-2)=-2$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여
구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고,
구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t) = m_1 - m_2$$

라 하자. $k > 0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t) = k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \leq t \leq 2\}$이다.

$g(4) = 0$일 때, $k + g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 \times a_2 > 0$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} {a_n}^2 & (a_n \le 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 = a_5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 두 상수 a, $b(b \neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x| < 2$일 때, $g(x) = \int_0^x (-t+a)dt$이고
> $|x| \geq 2$일 때, $|g'(x)| = f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,
$\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를
$h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \to 4+} h(t)=5$

(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.

[4점]

22. 두 자연수 a, b $(a < b < 8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x < a) \\ x-10 & (a \le x < b) \\ |x-9|-1 & (x \ge b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 양수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $f(k) < 0$

$f(a) \times f(b) \times f(k)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)|=f(x),\ \lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$$

이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\dfrac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[4점]

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$ 를 만족시키는 실수 α 의 최솟값은 -1 이다.

(다) 모든 실수 x 에 대하여 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x}\{f(u)-ku\}du\geq 0$ 이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)\ (k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다. (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.) [4점]

— 고2 학력평가 —

28. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}$$

이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{3n-2} + a_{3n} = 2a_{3n-1}$이다.
(나) 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

$\sum_{k=1}^{14} a_k = 500$일 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

29. 두 상수 a, $b(0 \le b \le \pi)$에 대하여

닫힌구간 $\left[\dfrac{\pi}{2}, a\right]$에서 함수 $f(x) = 2\cos(3x+b)$의

최댓값은 1이고 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

$a \times b = \dfrac{q}{p}\pi^2$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인

자연수이다.) [4점]

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 k에 대하여 a_k는 x에 대한 방정식 $x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$의 근이다. (나) $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 개수는 2이다.

29. $0 \le x \le 2\pi$일 때, x에 대한 방정식

$$\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$$

의 서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱을 구하시오. [4점]

28. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0-} \frac{\sqrt{x^2}-f(x)}{x+f(x)} \times \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x^2}-f(x)}{x+f(x)} = -2$
(나) $\lim_{x \to a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a 의 개수는 1 이다.

$f(24)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수이고 $f'(2) < 0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt-4 & (x<2) \\ \displaystyle-\int_0^x f(t)dt+4 & (x\geq 2) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)+4}{x-2}=g'(0)$
(나) 방정식 $g(x)=4$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

27. $n \geq 4$ 인 자연수 n 에 대하여 집합 $\{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{n}{2}\cos \pi x + 1$$

이 있다. 방정식 $|f(x)| = 3$ 의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=4}^{10} g(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x \le 2m) \\ -3x+4a & (x > 2m) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} ax-a & (x \le m+1) \\ x-a+1 & (x > m+1) \end{cases}$$

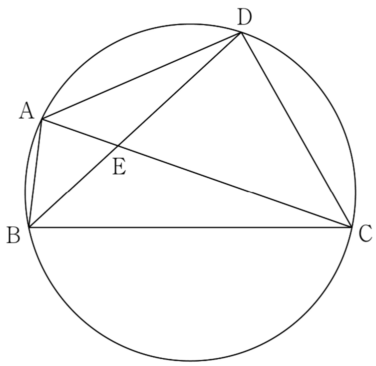
이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\alpha-} f(x) \ne \lim_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim_{x\to\beta-} g(x) \ne \lim_{x\to\beta+} g(x)$인 실수 α, β가 존재한다.

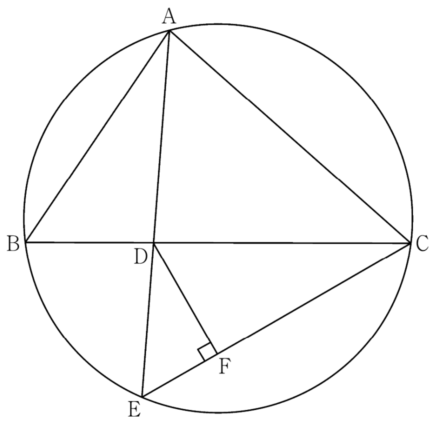
(나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} \dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재한다.

$m+g(a^2)$의 값을 구하시오. [4점]

29. $\overline{\text{DA}}=2\overline{\text{AB}}$, $\angle\text{DAB}=\frac{2}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. 두 대각선 AC, BD의 교점을 E라 할 때, 점 E는 선분 BD를 $3:4$로 내분한다. 사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$, $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 직선 AD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자. 점 D에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 F라 할 때, 선분 FC의 길이는 $\frac{q}{p}\sqrt{11}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 자연수 k에 대하여 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-k-2}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-k}-2$와 직선 $y=k$가 있다. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-k-2}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-k}-2$와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때 선분 AB가 직선 $y=k$와 만나도록 하는 n의 최댓값과 최솟값의 합을 $f(k)$라 하자.
$f(k)=15$를 만족시키는 k의 값을 구하시오. [4점]

29. 자연수 $m\,(m \geq 2)$에 대하여 집합 A_m을

$$A_m = \{\log_m x \mid x\text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$$

라 하고, 집합 B를

$$B = \{2^k \mid k\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$$

라 하자. 집합 B의 원소 b에 대하여 $n(A_4 \cap A_b) = 4$가 되도록 하는 모든 b의 값의 합을 구하시오. [4점]

29. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos A = -\frac{1}{4}$

(나) $\sin B + \sin C = \frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)=\frac{1}{3}x+a$ 에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} g(x)+f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x)-f(x) & (f(x)< g(x)) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\alpha-} h(x)\neq \lim_{x\to\alpha+} h(x)$ 를 만족시키는 실수 α 의 값은 2 뿐이다.
> (나) 모든 실수 k 에 대하여 $\lim_{x\to k} |h(x)-1|$ 의 값이 존재한다.

$h(0)=\frac{7}{3}$ 일 때, $h(5)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

[4점]

30. 두 양수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 집합 $\{x\,|\,x \neq -a,\ x\text{는 실수}\}$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{bx}{x+a} & (x<-a,\ -a<x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
실수 t에 대하여 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 두 양수 t_1, t_2에 대하여 $t_1<t_2$이면 $h(t_1) \geq h(t_2)$이다.
(나) 함수 $h(t)$는 $t=0$, $t=\alpha$, $t=\beta(0<\alpha<\beta)$에서만 불연속이며 $h(0)=\alpha$, $h(\alpha)=\beta-1$이다.

$f(a-b)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 두 양수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \left|-ax^2+b\right| & (x\le 0) \\ x^2-2ax+b^2 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$는 최솟값 2를 갖고, 두 상수 α, β에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left|\lim\limits_{t\to\alpha-} g(t)-\lim\limits_{t\to\alpha+} g(t)\right|=2$
(나) $\lim\limits_{t\to\beta-} g(t)-\lim\limits_{t\to\beta+} g(t)+1=g(\beta)$
(다) $g(\alpha)\ne g(\beta)$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\alpha$, $\alpha+24\beta=30$일 때, $f(-2)+f(1)=\dfrac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
[4점]

30. 함수 $f(x)=|x-k|-4$ (k는 실수)와 양의 실수 a ($a\neq 1$)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} a^{-f(x)} & (f(x)<0) \\ a^{f(x)} & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=16$의 교점의 개수가 3이고 $g(1)=16$일 때, 모든 $f(a-2)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

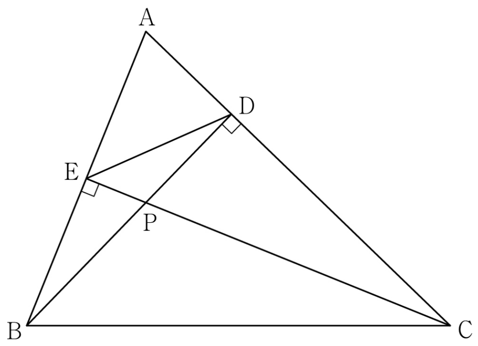
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x}+2^{-a}-2 & (x<a) \\ 2^{-x}+2^{a}-2 & (x \geq a) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

함수 $y=\lvert f(x) \rvert$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k는 오직 하나뿐이다.

$2^{M+m}=p+\sqrt{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 예각삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 두 선분 BD, CE의 교점을 P라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π일 때, 삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 $a\pi$이다. $55a$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]



30. 세 양수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)(x+a) & (x<-4,\ -4<x<0)\\ b & (x=-4)\\ -x^2+6x+c & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 있다.

상수 $k(k>4)$와 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$에서
x의 값이 t에서 $t+k$까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$라 하고,
$f(t)\times g(t)$의 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $f(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $f(k)=b$

$f(c-a-b)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 자연수 p와 실수 q $(q \geq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = |p \sin x - q|$$

이다. $f(a) = q$인 서로 다른 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$과 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이다.

두 수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점]

30. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2ax+b$라 할 때, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a) & (x \le a) \\ |f(x)| & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$k \ge 24$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$10a+b$의 값을 구하시오. [4점]

30. 세 실수 $a\,(a \neq 0)$, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k) \\ -\dfrac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$가 존재한다.
(나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left\|\log_2\dfrac{x}{2}\right\|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)=-x^2+2x-1$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $\log_{2^k}\{f(2)+\lvert k\rvert\}\le\log_{2^k}8$
(나) 부등식 $\log_{2^k}\{f(x)+\lvert k\rvert(x-1)\}\le\log_{2^k}4x$ 를 만족시키는 자연수 x의 개수는 6이다.

30. 첫째항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 두 정수 d, r에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+d & (a_n \geq 0) \\ ra_n & (a_n < 0) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_k=a_{k+12}=0$인 자연수 k가 존재한다.

$a_2+a_3=0$, $a_5=16$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=\sin x,\ g(x)=a\cos x+b$$

에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.
>
> (나) $0<c<\frac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여
>
> $h(c)=h(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다.

상수 $k\left(k>\frac{1}{2}\right)$에 대하여 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, $a+20\left(\frac{k}{b}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점]

29. 두 함수

$$f(x)=\frac{3}{a}|x-3|-b,\quad g(x)=\sin\frac{\pi}{b}x+3$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $2a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $y=f(g(x))$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
(나) $0\le x\le 6$일 때, 함수 $y=g(f(x))$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점의 개수는 3이다.

30. $\frac{12}{5} < k \leq 4$ 인 상수 k와 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 짝수이면
> a_n은 $0 \leq x \leq 2$에서 직선 $y = -\frac{k}{2n}$와
> 곡선 $y = 2\sin\left(n\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + \left|k\sin^2(n\pi x) - (k-1)\right|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.
> (나) n이 홀수이면
> a_n은 $0 \leq x \leq 2$에서 직선 $y = \frac{k+1}{n}$과
> 곡선 $y = 2\sin\left(n\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + \left|k\sin^2(n\pi x) - (k-1)\right|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$0 < a_2 < 6$일 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

30. 두 자연수 a, b에 대하여 세 함수

$f(x)=\cos\pi x$, $g(x)=\sin\pi x$, $h(x)=ax+b$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x\le 4$일 때, 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수는 홀수이다.

(나) $0\le x\le 4$일 때, 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

$\dfrac{a\times b}{\cos^2\pi t}$의 값을 구하시오. [4점]

빠른답안

LEVEL 1

[평가원]

1	3	2	1	3	3	4	678	5	2	6	5	7	2	8	8
9	2	10	5	11	2	12	10	13	80	14	21	15	4	16	1
17	2	18	43	19	1	20	24	21	1	22	13				

[고3 학력평가]

1	2	2	2	3	1	4	5	5	2	6	1	7	3	8	1
9	5	10	70	11	1	12	5	13	1	14	2	15	1	16	2
17	2	18	117	19	1	20	30	21	71	22	13	23	180	24	8
25	24	26	110												

[고2 학력평가]

1	3	2	2	3	1	4	3	5	144	6	2	7	1	8	1
9	5	10	5	11	25	12	2	13	2	14	2	15	18	16	35
17	3	18	4	19	16	20	13	21	29	22	7	23	1	24	22

LEVEL 2

[평가원]

1	32	2	2	3	15	4	10	5	8	6	25	7	33	8	1
9	426	10	110	11	2	12	1	13	8	14	36	15	13	16	186
17	42	18	16	19	19	20	39	21	10	22	192	23	31	24	110
25	24	26	75												

[고3 학력평가]

1	5	2	1	3	54	4	12	5	12	6	3	7	25	8	22
9	84	10	240	11	13	12	35	13	6	14	24	15	13	16	8
17	64	18	8	19	66	20	226	21	15	22	63	23	2	24	16

[고2 학력평가]

1	18	2	513	3	1	4	49	5	10	6	28	7	112	8	15
9	271	10	28	11	17	12	11	13	47	14	11				

LEVEL 3

[평가원]

1	220	2	73	3	231	4	117	5	9	6	7	7	20	8	38
9	9	10	296	11	64	12	13	13	58	14	19	15	108	16	61
17	39	18	5	19	457	20	38	21	380	22	19	23	105	24	42
25	40	26	200	27	243	28	65	29	78	30	65	31	483	32	51
33	2														

[고3 학력평가]

1	76	2	15	3	8	4	7	5	29	6	30	7	251	8	81
9	154	10	381	11	54	12	64	13	170	14	4	15	486	16	82
17	3	18	32	19	729	20	96	21	114	22	182	23	121		

[고2 학력평가]

1	98	2	14	3	5	4	48	5	40	6	30	7	74	8	4
9	13	10	45	11	10	12	72	13	29	14	25	15	75	16	311
17	5	18	4	19	36	20	50	21	11	22	30	23	28	24	5
25	28	26	59	27	133	28	53	29	686						

End of Document

수고하셨습니다.