제 2 교시

수학 영역

해원수학 김성민T

5지선다형

1. $(1+2i)+(3-i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $2+i$ ② $2-i$ ③ $4+i$ ④ $4-i$ ⑤ $5+i$

2. 다항식 x^3-27이 $(x-3)(x^2+ax+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$(x-3)(x^2+3x+9)$

3. 두 다항식 $A=x^2-2x-4$, $B=2x-3$에 대하여 $A+B$는? [2점]

① x^2+7 ② x^2-7 ③ x^2+4x
④ x^2-4x ⑤ x^2+4

4. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\sqrt{2^2+a^2}=\sqrt{13}$

$a^2=9$

$a=3$

5. 등식

$$2x^2+3x+4=2(x+1)^2+a(x+1)+b$$

가 x에 대한 항등식일 때, $a-b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

$x=-1 \Rightarrow 2-3+4=b,\quad b=3$

$x=0 \Rightarrow 4=2+a+b=a+5,\quad a=-1$

$a-b=-1-3=-4$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+k-3=0$이 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$D/4=4-k+3\geq 0$

$k\leq 7$

7. 직선 $y=ax-6$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-y=ax-6$

$y=-ax+6\quad (2,4)$

$4=-2a+6,\quad a=1$

8. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-3\alpha\beta$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\alpha+\beta=-3$

$\alpha\beta=1$

$\alpha^2+\beta^2-3\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-5\alpha\beta$

$=9-5=4$

9. 좌표평면 위의 점 $(3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{13}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{14}$ ④ $\sqrt{58}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

$A(2,3)$

$B(-2,-3)$

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

10. 부등식 $|3x-2|\le a$의 해가 $b\le x\le 2$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$) [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

$-a\le 3x-2\le a$

$2-a\le 3x\le 2+a$

$\frac{2-a}{3}\le x\le \frac{2+a}{3}$

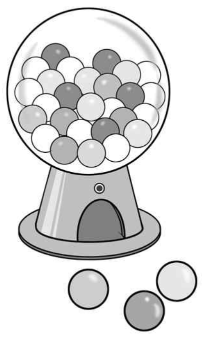
$\frac{2-a}{3}=b$, $\frac{2+a}{3}=2$

$\frac{2+a}{3}=2 \Rightarrow a=4$

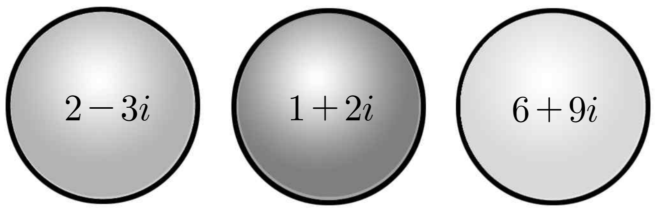
$\frac{2-a}{3}=b \Rightarrow 3b=2-a=-2,\ b=-\frac{2}{3}$

$a+b=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

11. 버튼을 한 번 누르면 복소수가 하나씩 적힌 세 개의 공이 굴러 나오는 기계가 있다.



어느 상점에서 이 기계를 이용한 사람에게 굴러 나온 세 개의 공 중 두 개를 선택하게 하여 적힌 수의 곱이 자연수가 될 때, 그 자연수만큼 사탕으로 교환해 준다고 한다.
한 학생이 버튼을 한 번 눌렀더니 세 복소수 $2-3i$, $1+2i$, $6+9i$가 각각 적힌 세 개의 공이 굴러 나왔다.
이 학생이 a개의 사탕으로 교환해 갔을 때, 자연수 a의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]



① 37　② 38　③ 39　④ 40　⑤ 41

$(6+9i)\times(2-3i)$

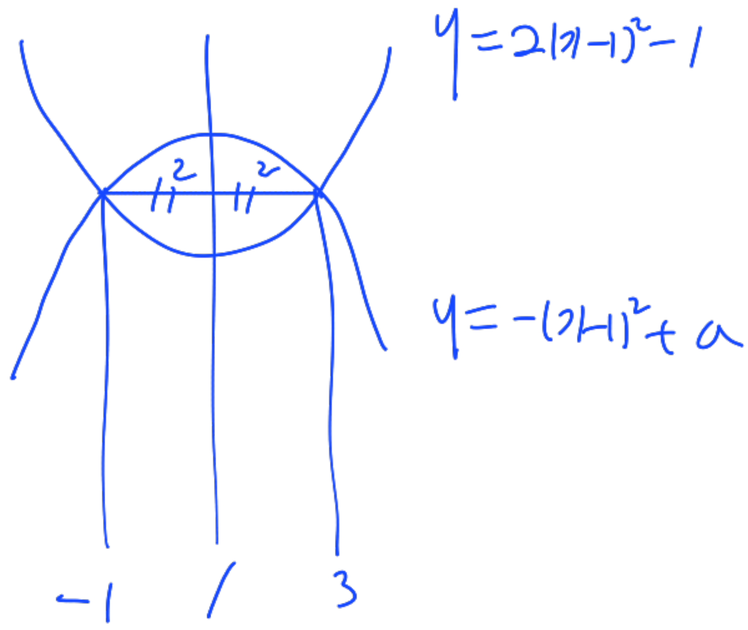
$=3(2+3i)(2-3i)$

$=3(4+9)=39$

12. 두 이차함수 $y=-(x-1)^2+a$, $y=2(x-1)^2-1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리가 4일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

대칭축 일치



$x=3$ 교점 $\Rightarrow$ $-4+a=8-1$

y좌표 일치　$a=11$

13. 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ 2x^2-y^2=2 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$(x-y)(x-2y)=0$

i) $x=y$

$2y^2-y^2=2$, $y^2=2$, $x^2=2$

$\underline{\alpha^2+\beta^2=4}$

ii) $x=2y$

$2\times(2y)^2-y^2=2$

$7y^2=2$, $y^2=\frac{2}{7}$

$x^2=4y^2=\frac{8}{7}$ $\underline{\alpha^2+\beta^2=\frac{10}{7}}$

$\alpha^2+\beta^2$ 최대: 4

14. x에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 접할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

$x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$

$x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$

$D/4=(2k+a)^2-(4k^2+k-b)=0$

$4ak+a^2-k+b=0$

$k\underbrace{(4a-1)}_{0}+\underbrace{a^2+b}_{0}=0$

$a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{16}$

$a+b=\frac{3}{16}$

15. 직선 $3x+4y-12=0$ 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 P 라 할 때, 점 P 를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 Q, R 라 하자. 삼각형 RQP 의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

$A(4,0)$, $B(0,3)$

$2:1$

$P\left(\frac{4}{3}, \frac{6}{3}\right)$, $P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

$Q\left(\frac{4}{3}, -2\right)$

$R\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

$(a,b) = \left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{3}, \frac{2-2+2}{3}\right)$

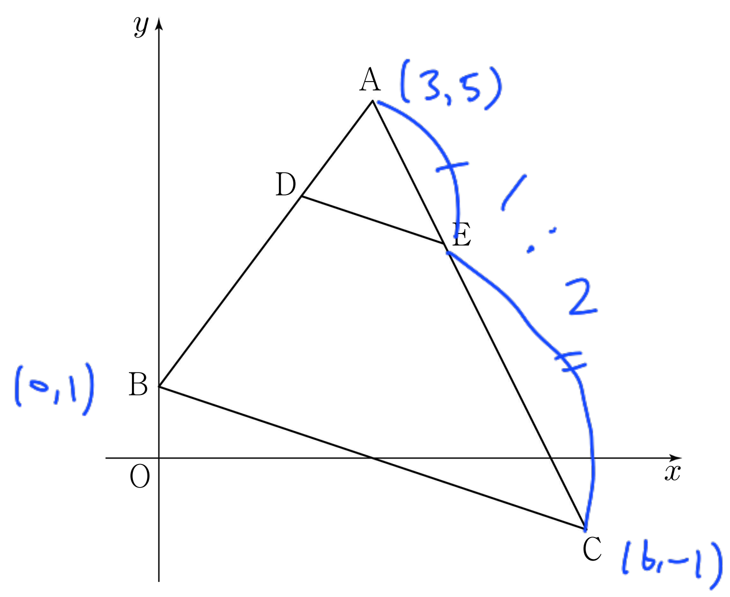
$= \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$

$a+b = \frac{4}{9}+\frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

16. 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(3,\ 5)$, $B(0,\ 1)$, $C(6,\ -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에 대하여 선분 AB 위의 한 점 D 와 선분 AC 위의 한 점 E 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 DE 와 선분 BC 는 평행하다.
(나) 삼각형 ADE 와 삼각형 ABC 의 넓이의 비는 $1:9$ 이다.

직선 BE 의 방정식이 $y=kx+1$ 일 때, 상수 k 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

넓이비 $1:9$ ⇒ 길이비 $1:3$

$AE:AC=1:3$, $\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$

E는 AC를 $1:2$ 내분점

$E\left(\frac{6+6}{3}, \frac{-1+10}{3}\right)$

$E(4,3)$

BE 기울기 $\frac{3-1}{4-0} = \frac{1}{2}$

k는 직선 BE의 기울기 $= \frac{1}{2}$

17. 이차식 $f(x)$와 일차식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 중근 1을 갖는다. (나) 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각 2, 5이다.

다항식 $f(x)-g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는? [4점]

① -16 ② -14 ③ -12 ④ -10 ⑤ -8

(나) $f(2)=2$, $g(2)=5$) $f(2)-g(2)=-3$

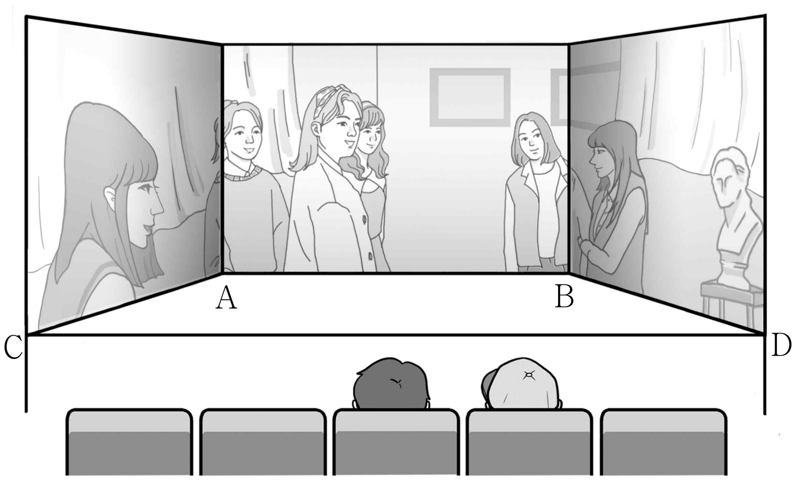
(가) $f(x)-g(x)=a(x-1)^2$

$x=2 \to f(2)-g(2)=a=-3$

$f(x)-g(x)=-3(x-1)^2$

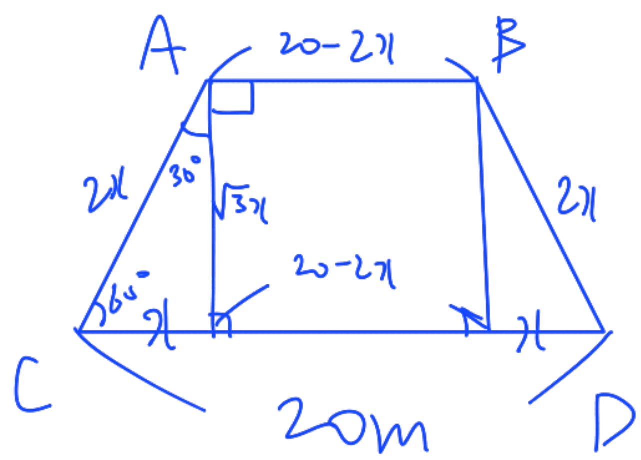
$x=-1 \Rightarrow f(-1)-g(-1)=-12$

18. 그림과 같이 어느 행사장에서 바닥면이 등변사다리꼴이 되도록 무대 위에 3개의 직사각형 모양의 스크린을 설치하려고 한다.



양옆 스크린의 하단과 중앙 스크린의 하단이 만나는 지점을 각각 A, B라 하고, 만나지 않는 하단의 끝 지점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB는 $\overline{AC}=\overline{BD}$인 등변사다리꼴이고 $\overline{CD}=20\text{m}$, $\angle BAC=120^\circ$이다. 선분 AB의 길이는 선분 AC의 길이의 4배보다 크지 않고, 사다리꼴 ACDB의 넓이는 $75\sqrt{3}\,\text{m}^2$ 이하이다. 중앙 스크린의 가로인 선분 AB의 길이를 $d(\text{m})$라 할 때, d의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, 스크린의 두께는 무시한다.) [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29



$20-2x \le 4\times 2x$

$S=\frac{1}{2}(20+20-2x)\times\sqrt{3}x \le 75\sqrt{3}$

$x \ge 2$

$(20-x)x \le 75 \to x^2-20x+75 \ge 0$

$(x-5)(x-15) \ge 0$

$x \le 5,\ x \ge 15$

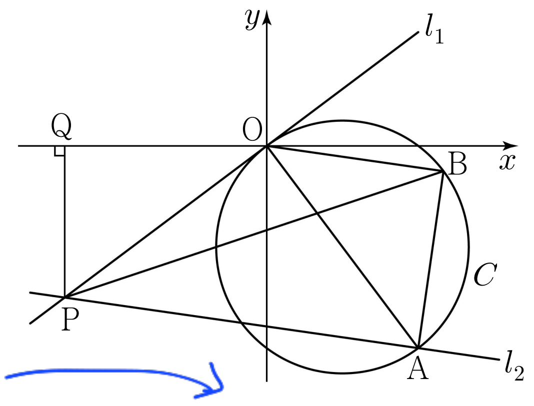
$\therefore\ 2 \le x \le 5$

$-10 \le -2x \le -4$

$10 \le 20-2x \le 16$

$10+16=26$

19. 좌표평면 위의 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(6,\ -8)$, B$(7,\ -1)$을 지나는 원 C에 대하여 원 C 위의 점 O에서의 접선을 l_1이라 하자. 두 삼각형 OAB와 OPB의 넓이가 같게 되는 직선 l_1 위의 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음은 선분 QO의 길이를 구하는 과정이다. (단, 점 P는 제3사분면 위의 점이다.)

> 그림과 같이 세 점 O, A, B를 지나는 원 C의 방정식은 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$이므로
> 선분 OA는 원 C의 지름이다.
> 직선 l_1은 직선 OA와 수직이고 점 O를 지나므로
> 직선 l_1의 방정식은 $y=$ (가) 이다.
> 점 A를 지나고 직선 OB와 평행한 직선을 l_2라 하면, 두 직선 l_1, l_2가 만나는 점이 두 삼각형 OAB와 OPB의 넓이가 같게 되는 점 P이다.
>
> 
>
>
> 직선 l_2의 방정식은 $y=$ (나) 이다.
> 점 P는 두 직선 l_1, l_2가 만나는 점이므로
> 점 P의 x좌표는 (다) 이다.
> 따라서 선분 QO의 길이는 $|$(다)$|$이다.

OA 기울기 $\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$

l_1 기울기 $=\frac{3}{4}$

$y=\frac{3}{4}x$

OB 기울기 $-\frac{1}{7}$

$l_2: y=-\frac{1}{7}(x-6)-8$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(2k)+g(-1)$의 값은? [4점]

① -20 ② -19 ③ -18 ④ -17 ⑤ -16

(다) $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ y=-\frac{1}{7}x-\frac{50}{7} \end{cases}$

$\frac{3}{4}x=-\frac{1}{7}x-\frac{50}{7}$

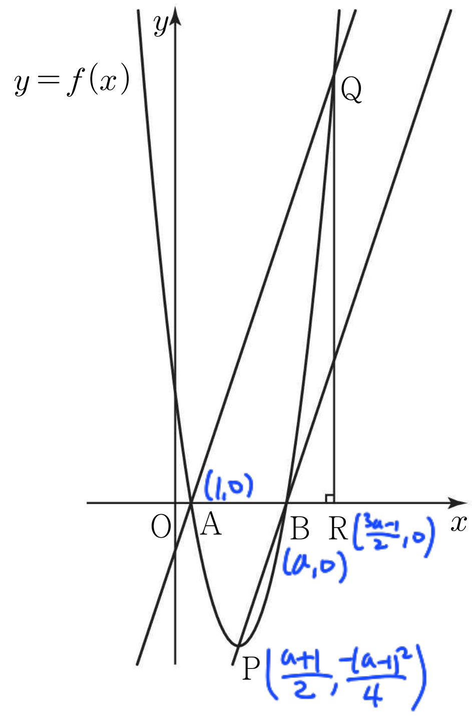
$21x=-4x-200$

$25x=-200$, $x=-8=k$

$f(2k)+g(-1)=f(-16)+g(-1)$

$=-12+(1-8)=-19$

20. 그림과 같이 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(a,\ 0)$을 지난다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 P, 점 A를 지나고 직선 PB에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 Q, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자.
직선 PB의 기울기를 m이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(2)=2-a$
ㄴ. $\overline{\mathrm{AR}}=3m$
ㄷ. 삼각형 BRQ의 넓이가 $\frac{81}{2}$일 때, $a+m=10$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=(x-1)(x-a)$, $P\left(\frac{a+1}{2}, -\frac{(a-1)^2}{4}\right)$

ㄱ. $f(2)=1\times(2-a)=2-a$

ㄴ. BP 기울기 $=\dfrac{\frac{(a-1)^2}{4}}{a-\frac{a+1}{2}}=\frac{a-1}{2}=m$

AQ $\Rightarrow y=\frac{a-1}{2}(x-1)$, $(x-1)(x-a)=\frac{a-1}{2}(x-1)$

$(x-1)\left(x-a-\frac{a-1}{2}\right)=0$

$x=a+\frac{a-1}{2}=\frac{3a-1}{2}$

$Q\left(\frac{3a-1}{2}, \frac{3}{4}(a-1)^2\right)$, $R\left(\frac{3a-1}{2}, 0\right)$, $AR=\frac{3a-3}{2}=3m$

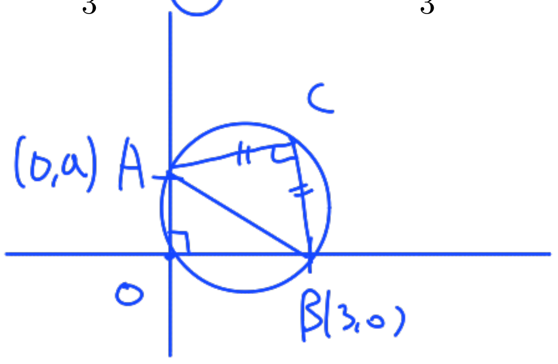
ㄷ. $\triangle BRQ=\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{2}\right)\times\frac{3}{4}(a-1)^2=\frac{3}{16}(a-1)^3=\frac{81}{2}$

$(a-1)^3=27\times8$, $a-1=6$, $a=7$

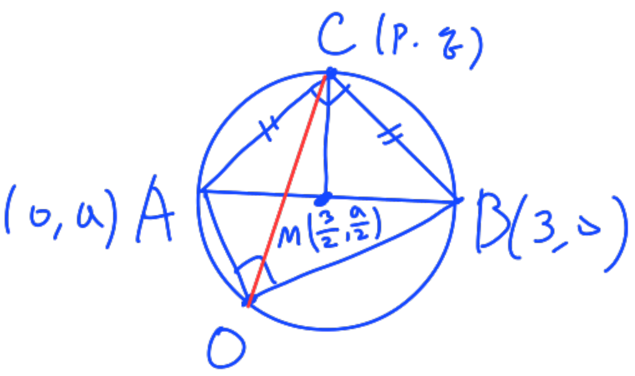
$a+m=a+\frac{a-1}{2}=7+3=10$

21. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C 에 대하여 두 점 A, B 의 좌표는 각각 $(0,\ a)$, $(3,\ 0)$ 이고, 삼각형 ABC 는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 인 직각이등변삼각형이다. $-1 \le a \le 2$ 일 때, 선분 OC 의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $\frac{M}{m}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4 점]

① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6



$\angle ACB = \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow$ A, O, B, C 한 원위의 점



$r = \frac{\sqrt{a^2+9}}{2}$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2+9}{4}$

AB 기울기 $= -\frac{a}{3}$, CM 기울기 $\frac{3}{a}$, CM: $y=\frac{3}{a}(x-\frac{3}{2})+\frac{a}{2}$

$y=\frac{3}{a}x+\frac{a}{2}-\frac{9}{2a}$

$C(p,q) \Rightarrow (p,\ \frac{3}{a}p+\frac{a}{2}-\frac{9}{2a})$

$CM=AM \Rightarrow \sqrt{(p-\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{a}p-\frac{9}{2a})^2}=\frac{\sqrt{a^2+9}}{2}$

$(p-\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{a}(p-\frac{3}{2}))^2=\frac{a^2+9}{4}$

$(1+\frac{9}{a^2})(p-\frac{3}{2})^2=\frac{a^2+9}{4}$

$(p-\frac{3}{2})^2=\frac{a^2+9}{4}\times\frac{a^2}{a^2+9}=\frac{a^2}{4}$

$p-\frac{3}{2}=\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}$

$p=\frac{3+a}{2},\ \frac{3-a}{2}$

$q=\frac{3+a}{2},\ \frac{-3+a}{2}$

$C\begin{cases}(\frac{3+a}{2},\ \frac{3+a}{2})\\(\frac{3-a}{2},\ \frac{a-3}{2})\end{cases}$

단 답 형

22. 다항식 $(x+6)(2x^2+3x+1)$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오. [3 점]

$\boxed{15}$

$3x^2+12x^2$

23. x 에 대한 다항식 x^3-2x-a 가 $x-2$ 로 나누어떨어지도록 하는 상수 a 의 값을 구하시오. [3 점]

$\boxed{4}$

$x=2 \Rightarrow 8-4-a=0$

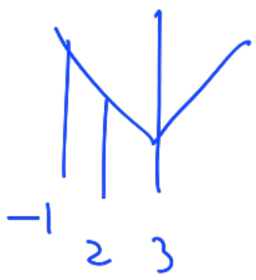
① $C(\frac{3+a}{2},\ \frac{3+a}{2})$

$\overline{OC}=\sqrt{2}\left|\frac{a+3}{2}\right|,\ -1\le a\le 2$

$-1 \to \sqrt{2}$
$2 \to \frac{5}{2}\sqrt{2}$
$\sqrt{2}\le\overline{OC}\le\frac{5\sqrt{2}}{2}$

② $C(\frac{3-a}{2},\ \frac{a-3}{2})$

$\overline{OC}=\sqrt{2}\left|\frac{a-3}{2}\right|,\ -1\le a\le 2$



$-1 \to 2\sqrt{2}$
$2 \to \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\overline{OC}\le 2\sqrt{2}$

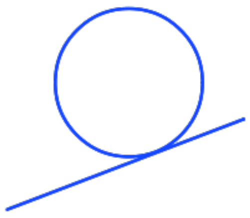
$\therefore M=\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{M}{m}=5$

24. 직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선이 원 $x^2+y^2=5$와 한 점에서 만날 때, 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{14}$

$y=2(x-2)+k-3$

$y=2x+k-7$



$(0,0) \sim 2x-y+k-7=0$

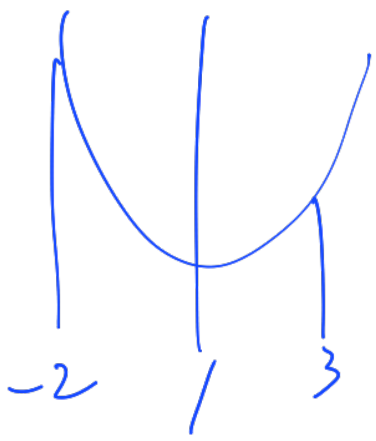
$\frac{|k-7|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$|k-7|=5,\ k=2,\ 12$

25. $-2 \le x \le 3$일 때, 이차함수 $f(x)=2x^2-4x+k$의 최솟값은 1이고 최댓값은 M이다. $k+M$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$\boxed{22}$

$f(x)=2(x-1)^2+k-2$



$x=1 \rightarrow k-2=1,\ k=3$

$x=-2 \rightarrow 18+k-2$

$=19=M$

$k+M=22$

26. x에 대한 연립부등식

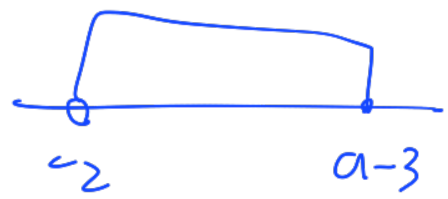
$$3x-1<5x+3 \le 4x+a$$

를 만족시키는 정수 x의 개수가 8이 되도록 하는 자연수 a의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{9}$

$\begin{cases} 3x-1<5x+3 \\ 5x+3 \le 4x+a \end{cases}$

$\begin{cases} x>-2 \\ x \le a-3 \end{cases}$

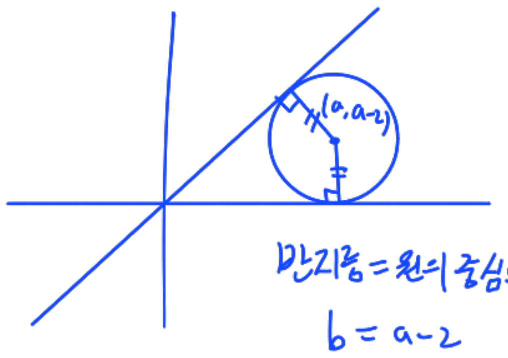


$(a-3)-(-2)=8$

$a=9$

27. 원 $(x-a)^2+(y-a)^2=b^2$을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형이 직선 $y=x$와 x축에 동시에 접할 때, a^2-4b의 값을 구하시오. (단, $a>2$, $b>0$) [4점]

$(a, a) \Rightarrow (a, a-2)$ $\boxed{6}$



반지름 = 원의 중심의 y좌표

$b=a-2$

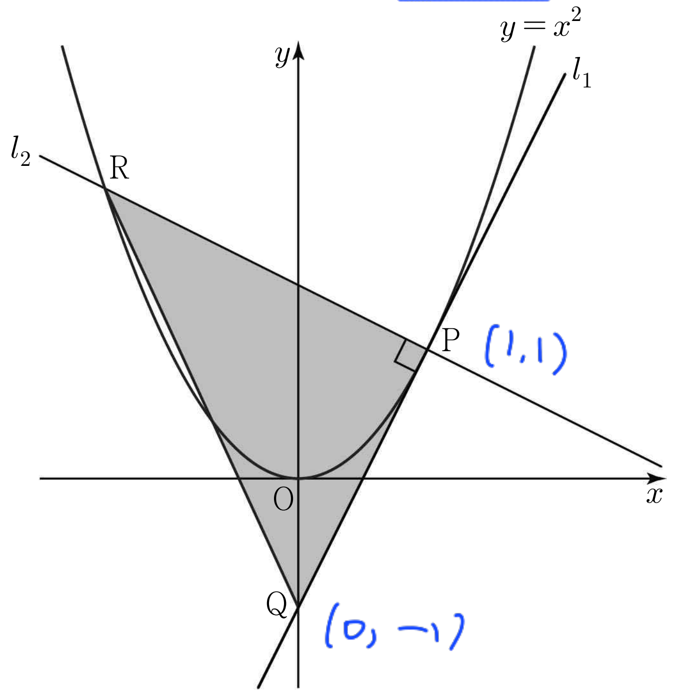
$(a, a-2) \sim y=x$ 거리 $=b$.
$(x-y=0)$

$\frac{|a-a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=b$

$a^2-4b=(b+2)^2-4b$
$=b^2+4=2+4=6$

28. 그림과 같이 좌표평면에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$에서의 접선을 l_1, 점 P를 지나고 직선 l_1과 수직인 직선을 l_2라 하자. 직선 l_1이 y축과 만나는 점을 Q, 직선 l_2가 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 R라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 S라 할 때, $40S$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{125}$



$y=m(x-1)+1$

$x^2=mx-m+1$

$x^2-mx+m-1=0$

$D=m^2-4(m-1)=0$

$m^2-4m+4=0$, $m=2$

$l_1: y=2x-1$

$l_2: y=-\frac{1}{2}(x-1)+1$) 수직 $Q(0,-1)$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \rightarrow 2x^2+x-3=0$

$(2x+3)(x-1)=0$

$x=-\frac{3}{2}$, $R\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$P(1,1)$, $Q(0,-1)$, $R\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$\overline{PR}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{16}}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\overline{PQ}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

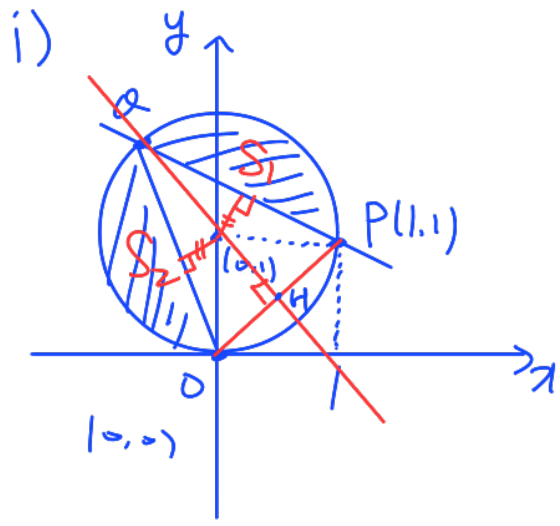
$S=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}\times\sqrt{5}=\frac{25}{8}$

$40S=40\times\frac{25}{8}=125$

29. 좌표평면에서 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 직선 $y=mx-m+1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_1, 선분 OQ와 호 OQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$를 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]

2

i)



$y=m(x-1)+1$

(1,1) 반드시 지남

$S_1=S_2 \Rightarrow \overline{OQ}=\overline{PQ}$

△OPQ: 이등변△

OP 기울기: 1

QH 기울기: −1, $H(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$y=-(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$

$y=-x+1$ & $x^2+(y-1)^2=1$

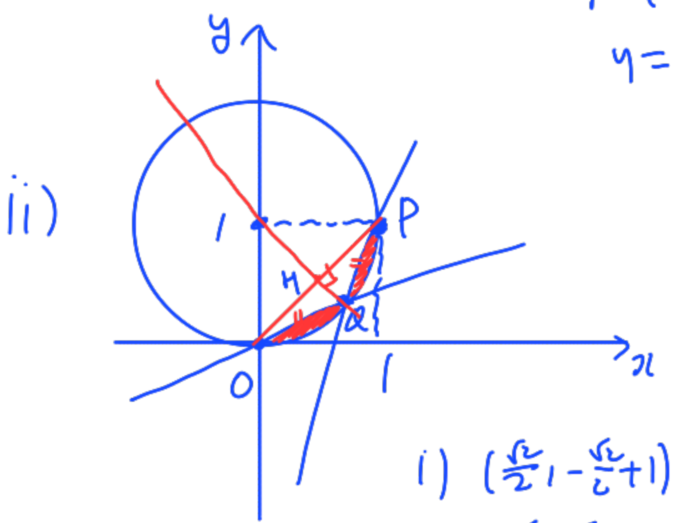
$2x^2=1$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

ii)



i) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1), (1,1) \Rightarrow m=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}+1$

ii) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+1), (1,1) \Rightarrow m=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=1-\sqrt{2}$

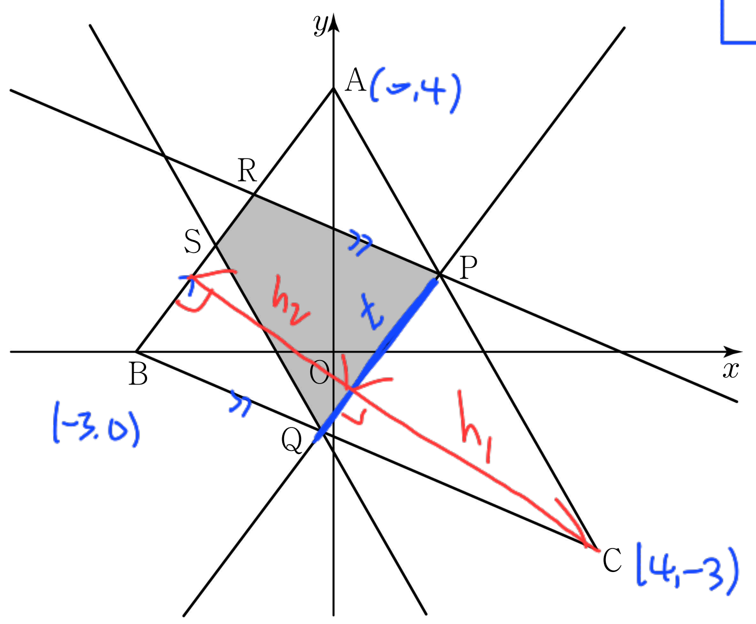
$(\sqrt{2}+1)+(1-\sqrt{2})=2$

30. 그림과 같이 세 점 A(0, 4), B(−3, 0), C(4, −3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위를 움직이는 점 P를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 Q, 점 P를 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 R, 점 Q를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 S라 하자.

사다리꼴 PRSQ의 넓이의 최댓값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{AP}<\overline{PC}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

43



□SQPR: 사다리꼴 ⇒ SR // QP, $\overline{AB}=5$, AB직선 $y=\frac{4}{3}x+4$

□BQPR: 평행사변형 BP//BQ, BR//QP

PQ=t, △CPQ ∽ △CAB (t:5)

(4,−3) ~ $4x-3y+12=0$ $\frac{|16+9+12|}{5}=\frac{37}{5}$

$h_1: \frac{37}{5}=t:5$, $h_1=\frac{37}{25}t$, ∴ $h_2=\frac{37}{5}-\frac{37}{25}t$

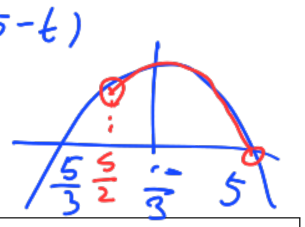
□BQPR, □ASQP: 평행사변형

PQ=BR=AS=t, BR+SA−AB=SR, SR=2t−5

AP<PC이므로 $\frac{1}{2}$AB<t<AB, $\frac{5}{2}<t<5$

∴ □SQPR $=\frac{1}{2}(t+2t-5)\times\frac{37}{25}(5-t)$

$S(t)=-\frac{37}{50}(3t-5)(t-5)$



$t=\frac{10}{3} \Rightarrow -\frac{37}{50}\times5\times(-\frac{5}{3})=\frac{37}{6}$

(최대)

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.