20. 서로 다른 세 실근을 갖는 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{-1}^{x} f(t)dt+\int_{1}^{x} g(t)dt=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{33}{4}$

(나) $f(1)=0,\ g(-1)=0$

함수 $f(x)$의 서로 다른 세 실근을 각각 α, β, γ(단, $\alpha<\beta<\gamma$)라 할 때, $\left|\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx\right|=\frac{q}{p}\times\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|$이다. $p+q$의 값은? [4점]

<풀이>

조건 (가)에 의하여,

$x=-1$일 때, $\int_{1}^{-1} g(t)dt=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{33}{4}=8$, $\int_{-1}^{1} g(t)dt=-8$

$x=1$일 때, $\int_{-1}^{1} f(t)dt=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{33}{4}=8$

양변을 미분하면, $f(x)+g(x)=x^3-x$

$g(x)$는 이차함수이므로, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

조건 (나)에 의하여,

$f(1)=0$이므로, $f(1)+g(1)=1-1=0$, $\therefore g(1)=0$이다.

$g(-1)=0$이므로, $f(-1)+g(-1)=(-1)-(-1)=0$, $\therefore f(-1)=0$

이차함수 $g(x)$의 실근이 -1과 1이므로, 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면, $g(x)=k(x+1)(x-1)=kx^2-k$이다.

$\int_{-1}^{1} g(t)dt=\int_{-1}^{1}(kx^2-k)dx=[\frac{1}{3}kx^3-kx]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}k-2k=-\frac{4}{3}k=8$

$\therefore k=6$, $g(x)=6x^2-6$이다.

$f(x)+g(x)=f(x)+6x^2-6=x^3-x$, $\therefore f(x)=x^3-6x^2-x+6$이다.

$f(x)=x^3-6x^2-x+6=(x+1)(x-1)(x-6)$이므로, 삼차함수 $f(x)$의 세 실근은 -1, 1, 6이다. 따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=6$이다.

$|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx|=|\int_{-1}^{1} f(x)dx|=8$이다.

$\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx=\int_{1}^{6}(x^3-6x^2-x+6)dx=[\frac{1}{4}x^4-2x^3-\frac{1}{2}x^2+6x]_{1}^{6}$

$=(\frac{1}{4}\times 6^4-2\times 6^3-\frac{1}{2}\times 6^2+36)-(\frac{1}{4}-2-\frac{1}{2}+6)=-90-\frac{15}{4}=-\frac{375}{4}$

따라서 $|\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx|=|\int_{1}^{6} f(x)dx|=\frac{375}{4}$이다.

$\frac{375}{4}=\frac{375}{32}\times 8$이므로, $p+q=32+375=407$이다.

<u>답: 407</u>

inspired by 250915