$0 \leq a \leq b \leq c$ 인 경우 $f'(0) = ab + bc + ac = 0$ 임으로

a,b,c중 최소 2개가 0이어야 한다. $f(0) = -abc$ 임으로 $f(x) = x^2(x-p)$ $f(1)f(2) \leq 0$에 의해 $1 \leq p \leq 2$ 이다. $f(4) = 16(4-p)$

$32 \leq f(4) \leq 48$ $10f(4)$의 최솟값은 320

$a < 0 < b \leq c$ 인 경우 $f(0) = -abc > 0$ 임으로 $k < 0$이다. $-2 < k < 0$ 임으로 $m \geq 0$에선 $f(m) \geq 0$이다. 즉 구간 (b,c)에선 정수가 존재하지 않는다. $f(1)f(2) = 0$ 이다.

$f(1) = 0, f(2) \geq 0$인 경우

$f(x) = (x-a)(x-1)(x-c)\,(1 < c \leq 2, a < 0)$ $f'(0) = a + c + ac = 0$ 임으로 $(a+1)(c+1) = 1$ 이다. $c = \dfrac{1}{a+1} - 1$ $1 < c \leq 2$ 임으로

$\dfrac{1}{a+1} - 1 > 1$, $\dfrac{1}{a+1} - 1 \leq 2$에서 $-\dfrac{2}{3} \leq a < -\dfrac{1}{2}$ $f(-1) = -2(a+1)(c+1) < 0$ 이다. $-1 < k < 0$

$f(4) = 3(4-a)(5 - \dfrac{1}{a+1}) = 3 \times (\dfrac{-5a^2 + 16a + 16}{a+1})$ 이 식을 미분하면 $\dfrac{-5a(a+2)}{(a+1)^2}$은 $-\dfrac{2}{3} \leq a < -\dfrac{1}{2}$에서 양수임으로 증가한다.

$f(4)$는 $a = -\dfrac{2}{3}$ 일때

최소이다. $f(4) = 3(\dfrac{14}{3})(2)$ 임으로 $10f(4)$의 최솟값은 280

$f(2) = 0, f(1) > 0$인 경우

$f(x) = (x-a)(x-2)(x-c)\,(2 < c \leq 3, a < 0)$ $f'(0) = 2a + 2c + ac = 0$ 임으로 $(a+2)(c+2) = 4$ 에서 $a = \dfrac{4}{c+2} - 2$ 이다.

$f(4) = 2(4-a)(4-c) = 2(6 - \dfrac{4}{c+2})(4-c) = \dfrac{4(3c+4)(4-c)}{c+2}$이다. 식을 미분하면 $-\dfrac{12c(c+4)}{(c+2)^2}$이디. $2 < c \leq 3$ 에서 음수임으로 감소한다. $c = 3$에서 최소이다. $f(4) = 2(\dfrac{26}{5}) = \dfrac{52}{5}$이다. $-2 < k < -1$ $10f(4)$의 최솟값은 104

$f(x)=(x-a)((x-p)^2+q)$인 경우 $q \geq 0$ $f(4)$가 최소이기 위해선 근이 최대한 4와 가까워야 함으로 $f(1)f(2) \leq 0$에서 $f(2)=0$

$f(x)=(x-2)((x-p)^2+q)$ $f'(0)=p^2+4p+q=0$ 임으로 $q=4-(p+2)^2$, $(p+2)^2 \leq 4$ $-4 \leq p \leq 0$ 에서

$f(4)=2(16-12p)=32-24p$ 은 $32 \leq f(4) \leq 128$ $1<k \leq 2$ $10f(4)$의 최솟값은 320

$a \leq b<0<1 \leq c \leq 2$ 인 경우 근이 최대한 4와 가까워야 함으로 $f(x)=(x-2)(x-a)(x-b)$에서 $f(4)=2(4-a)(4-b)$ $f'(0)=2b+2a+ab=0$

$(a+2)(b+2)=4$ 이 경우는 $f(2)=0, f(1)>0$인 경우와 식이 동치임으로 $f(4)=\dfrac{4(3a+4)(4-a)}{a+2}$이다. $b=\dfrac{4}{a+2}-2<0$ 에서 $a<-2$

$f(4)=\dfrac{4(3a+4)(4-a)}{a+2}$의 미분값 $\dfrac{-12a(a+4)}{(a+2)^2}$은 $a=-4$에서 극소임으로 최솟값은 $f(4)=128$ $1<k \leq 2$ $10f(4)=1280$

모든 $f(4)$에 대하여 $10f(4)$의 최솟값은 104임으로 답은 104이다.