물리학의 본질 파악

<역학> Part.

도망친 곳에 낙원은 없다
과탐과 물리는 승리할 것이다

교재 구성

스킬 및 개념

↓

기출 적용 사례

↓

예제

↓

해설과 손풀이

[작성자 약력 : 독학 6평 44 9평 48 수능 47, K대 합격]

comment)

안녕하세요. 이 칼럼을 쓴 사람입니다

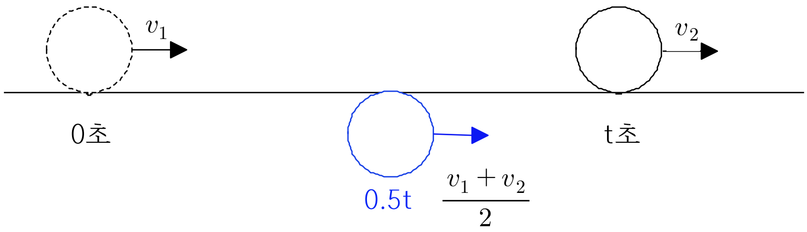
이 교재에는 제가 알고 있었던 내용, 그리고 오르비, 물1갤 등의
커뮤니티에서 알려진 스킬과 팁을 다 모았습니다.
기출문제를 다루는 것은 좋지만 문제가 외워지면 안되고
새 문제에 기존 개념이 오버랩되는게 가장 이상적이라고 생각합니다.
너무 기출만 풀지 마시고 N제 등에 익힌 스킬을 적용해 보시는걸 추천합니다.
2편은 열역학과 특수상대성, 3편은 전자기학과 파동 생각중입니다.
+ 2025년 1월 제작이라 26학년도 기출은 없습니다

| CONTENTS |

I. 등가속도 직선 운동

- 평균속도 매우 중요

평균속도는 **등가속도 운동을 등속도 운동으로 해석**할 수 있게 해주는 가장 강력하면서도 필수적인 도구다.



평균속도 : 등가속 구간에서의 **중간시점**의 속력,
구간의 양끝 지점의 속력의 평균

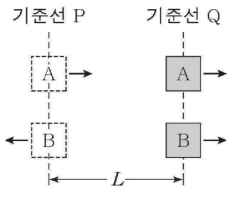
평균속도는 구간의 변위를 걸린 시간으로 나눈 개념이다. $\overline{v} = \frac{s}{t}$

따라서 평균속도에 시간을 곱하면 변위를 알 수 있다. $\overline{v} \times t = s$
항상 그렇지만 개념이 어려운 게 아니다. 직각삼각형 하면 피타고라스를 사용하듯이 물 흐르듯 나와야 한다.

추가로 두 물체가 **같은 시간동안 같은 변위를 가지면 평균속도가 같다**로 바로 해석 할 수 있어야 한다.
이를 활용한 예제를 살펴보자.

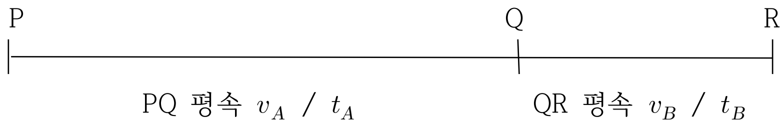
예제 1

그림과 같이 0초일 때 기준선 P를 서로 반대 방향의 같은 속력으로 통과한 물체 A와 B가 각각 등가속도 직선 운동하여 기준선 Q를 동시에 지난다. P에서 Q까지 A의 이동 거리는 L이다. 가속도의 방향은 A와 B가 서로 반대이고, 가속도의 크기는 B가 A의 7배이다. t_0초일 때 A와 B의 속도는 같다. 0초에서 t_0초까지 A의 이동 거리는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)



① $\frac{5}{13}L$ ② $\frac{7}{16}L$ ③ $\frac{1}{2}L$ ④ $\frac{7}{12}L$ ⑤ $\frac{5}{7}L$

- 전체평균속도(평속분배) : 서로 다른 가속 구간이 섞였을 때 전체 구간의 평균속도를 구해보자.



위와 같은 상황이 있을 때 PR 구간의 평균속도를 구해보자.

평균속도 정의대로 하면 $\dfrac{PQ}{\text{전체시간}}$이므로 $\dfrac{v_A t_A + v_B t_B}{t_A + t_B}$ = $v_A \dfrac{t_A}{t_{\text{전체}}} + v_B \dfrac{t_B}{t_{\text{전체}}}$ 이다.

즉, 등가속도 구간으로 쪼개서 **각 평균속도에 구간별 시간이 차지하는 비율의 곱의 총합**이다.

유형이 다양하지 않고 식 자체가 유도하기 쉬워서 외우는걸 강제하진 않지만, 알고 있으면 꽤나 도움된다.

추가로 **평균속력**을 구할때 사용해볼 수 있다. 가속도가 일정한 아래 상황을 보자.

$2v$로 오른쪽 지점을 통과하고 $-x$방향으로 가속되어 $-4v$로 왼쪽을 통과할때 평균속력은 얼마일까?

평균속도면 $\dfrac{2v+(-4v)}{2}=-v$하면 되지만 평균속력은 속력과 마찬가지로 **스칼라다.** (부호 없이 크기만)

(굳이굳이 비유를 들자면 평균속도 구하는 과정이 $\int_a^x f(x)dx$, 평균속력은 $\int_a^x |f(x)|dx$다.)

따라서 $v=0$을 기준으로 나눠줘야 한다.

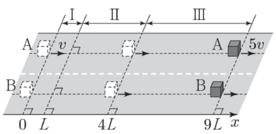
$2v$~0구간의 평속은 v, 0~$4v$에서는 $2v$ / 가속도가 일정 -> 속력변화 $\propto$ 시간이므로 시간비 $1:2$이다.

따라서 평속분배 공식을 적용하면 전체평균속력은 $v\times\dfrac{1}{3}+2v\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}v$가 된다.

예제를 풀어보고, 본인에게 맞는 쪽 풀이를 사용해보자.

예제 2

그림과 같이 직선 경로에서 물체 A가 속력 v로 $x=0$을 지나는 순간 $x=0$에 정지해 있던 물체 B가 출발하여, A와 B는 $x=4L$을 동시에 지나고, $x=9L$을 동시에 지난다. A가 $x=9L$을 지나는 순간 A의 속력은 $5v$이다. 표는 구간 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에서 A, B의 운동을 나타낸 것이다. Ⅰ에서 B의 가속도의 크기는 a이다.



구간 / 물체	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	등속도	등가속도	등속도
B	등가속도	등속도	등가속도

Ⅲ에서 B의 가속도의 크기는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

① $\frac{11}{5}a$ ② $2a$ ③ $\frac{9}{5}a$ ④ $\frac{8}{5}a$ ⑤ $\frac{7}{5}a$

- 동일 가속도에서 매우 중요

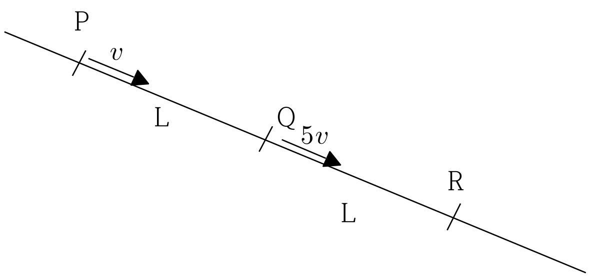
여기부터 <동일 위치 반환>, <상대속도>, <t초 후> 파트까지 상당히 밀접하기에 한번에 다루겠다.

가속도가 동일할때는 운동 상황을 파악할 때 이 3가지를 중심으로 확인하자.

> **① 동일 빗면 = 동일 가속도**
>
> **② 변위 $\propto$ 속력^2 변화량**
>
> **③ 시간 $\propto$ 속력 변화량**

②는 $2as = v^2 - v_0^2$, ③는 $v - v_0 = at$에서 유도할 수 있다.
이 내용 또한 평속처럼 하나의 스킬로서 받아들이기보다 바로바로 나와야 한다.

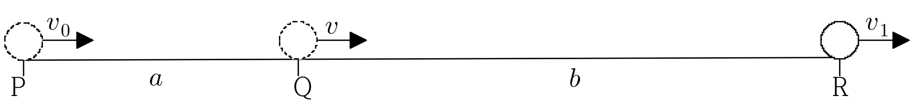
다음 상황에 적용해보자.



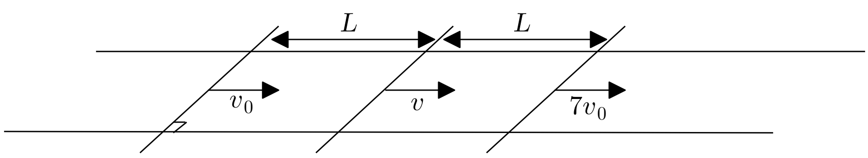
P에서 v, Q에서 $5v$의 속력으로 통과하고 PQ 구간에서 t초가 걸렸을 때 R 통과속도와 QR 통과시간은?

다 같은 빗면 -> 동일가속도 상황이고, R 통과속도 v'라 했을 때 PQ 거리 = QR 거리
$\therefore$ 속도의 제곱 변화량이 같다. 따라서 $(v')^2 - (5v)^2 = (5v)^2 - (v)^2$, $v' = 7v$
동일 가속도에서 시간 $\propto$ 속력 변화량, $\therefore \frac{t}{2}$초

또 시간 단축용 **속도제곱내분** 공식이 있다. 일정한 가속도에서 속도 제곱 계산을 내분식으로 일반화한것이다.

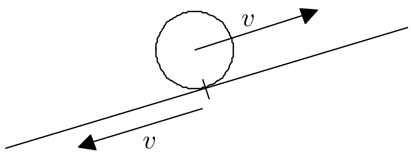


속력 v_0~v_1 등가속 구간 PQ를 $a:b$로 내분하는 점 Q가 있을 때, Q통과속력 $v = \sqrt{\frac{av_1^2 + bv_0^2}{a+b}}$ 로 나타내어진다.



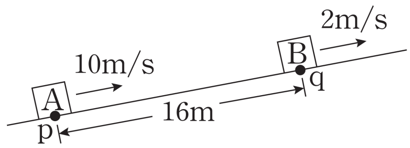
이러한 예시상황이 있다면 1:1 내분이기에 $v = \sqrt{\frac{v_0^2 + (7v_0)^2}{1+1}} = 5v_0$로 바로 구할 수 있다.

- 동일 위치 반환



등가속도 직선운동에서 **같은 위치로 되돌아 온 경우 속도는 크기는 같고 방향은 반대**이다.
역도 성립하므로 속도의 크기가 같고 방향이 반대라면 같은 위치로 돌아왔음을 알 수 있다.

유도는 $2as = v^2 - v_0^2$에서 $s = 0$ 혹은 $v = -v_0$를 대입해보면 된다.



A, B가 q에서 충돌한다고 할 때, 빗면의 가속도는 얼마일까? (단, 빗면 아래 방향이 음의 방향이다.)

동일 빗면이므로 상대속도가 8m/s로 일정하다, 따라서 충돌까지 2초 걸린다.
q에서 B는 반환되어 -2m/s가 되는데 2-> -2 까지 -4m/s가 2초에 일어났으므로 가속도 = -2m/s^2

- 상대속도 매우 중요

상대속도는 두 물체의 속도의 차이이다. 보통 **같은 빗면에서 두 물체 사이의 거리**를 구하는데에 사용된다.
여기서 안쓴다고 해도 <운동량 보존> 파트에서 유연하게 다뤄야 하니 숙지하는 편이 좋다.

A가 본 B의 속도 $v_{AB} = v_B - v_A$

상대속도의 가장 큰 장점은 **같은 빗면에서 가속도에 의한 변위를 고려하지 않아도 된다**는 점이다.

같은 빗면이면 상대가속도가 0이다. 즉 상대속도 측면에서 상대가속도가 없으므로 **상대속도가 유지된다.**
이 장점을 보여주는 예시 하나를 같이 살펴보자.

(가) (나)

(가)의 p에 가만히 둔 A의 속력이 v가 될때 B가 p를 $2v$로 통과했고 둘은 각 속력 v_A,v_B일때 충돌한다, $\frac{v_B}{v_A}$는?

(가)에서 A는 0~v, B는 p점에 정지해 있는것과 같으므로 평균상대속도는 $\frac{v}{2}$이다.

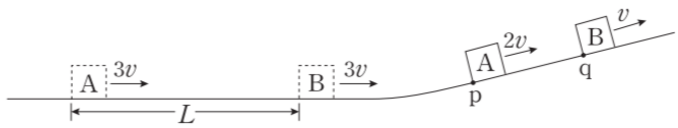
(나)에서는 상대속도가 유지되므로 초기 상대속도인 $-v$이다.
충돌하려면 (가), (나)의 상대변위의 합이 0이어야 하므로 시간의 비는 (가):(나)=2:1이다.

동일 가속도에서 속력변화량 $\propto$ 시간이므로 (나) 동안 총 속력 변화량은 $\frac{v}{2}$이다.

따라서 $v_A = \frac{3}{2}v$, $v_B = \frac{5}{2}v$가 되어 $\frac{v_B}{v_A} = \frac{5}{3}$이다.

- t초 후

상대속도의 시간적 해석이다. 특정 상황에서의 **두 물체의 운동을 한 물체의 몇초 뒤 상태로 해석**하는 것이다.
이를 판단하는 팁은 **가속 구간에 들어갈 때의 속력이 같은 지** 확인하는 것이다.
상황으로 보는게 이해가 빠를 것이다. <t초 후> 유형의 대표적인 예시이다.



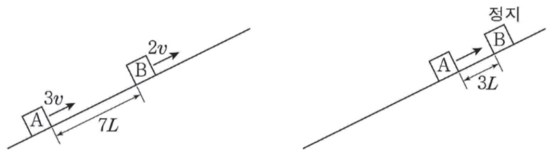
A, B가 거리 L을 유지하며 $3v$로 진행하다가 A가 $2v$, B가 v가 될 때 pq 거리를 L로 나타내어 보자.

A, B는 모두 빗면 진입 시점의 속력이 $3v$이므로 같은 물체의 시간차라고 해석이 가능하다.
$3v$의 속도로 L 거리차가 나기 위해서는 둘의 시간 차는 $\dfrac{L}{3v}$일 것이다.
A, B가 같은 물체이기에 pq는 속력이 $2v$~v 동안의 변위로 해석 가능하고 평속은 $\dfrac{3}{2}v$이다.
즉 p점에서 $\dfrac{3}{2}v$로 $\dfrac{L}{3v}$동안 이동한 것이 q점이므로 그 거리는 $\dfrac{3}{2}v\times\dfrac{L}{3v}=\dfrac{L}{2}$이다.

몇몇 유형에서 시간을 대폭 줄여주기에 숙지하는 것을 권장한다.
이제 예제들로 적용해보자.

예제 3

그림 (가)는 마찰이 없는 빗면에서 등가속도 직선 운동하는 물체 A, B의 속력이 각각 $3v$, $2v$일 때 A와 B 사이의 거리가 $7L$인 순간을, (나)는 B가 최고점에 도달한 순간 A와 B 사이의 거리가 $3L$인 것을 나타낸 것이다. 이후 A와 B는 A의 속력이 v_A일 때 만난다.



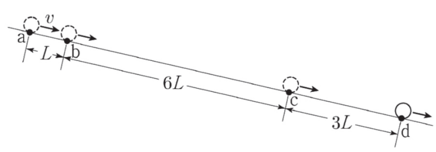
(가) (나)

v_A는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\dfrac{1}{5}v$ ② $\dfrac{1}{4}v$ ③ $\dfrac{1}{3}v$ ④ $\dfrac{1}{2}v$ ⑤ v

예제 4

그림과 같이 빗면에서 물체가 등가속도 직선 운동을 하여 점 a, b, c, d를 지난다. a에서 물체의 속력은 v이고, 이웃한 점 사이의 거리는 각각 L, $6L$, $3L$이다. 물체가 a에서 b까지, c에서 d까지 운동하는 데 걸린 시간은 같고, a와 d 사이의 평균 속력은 b와 c 사이의 평균 속력과 같다.

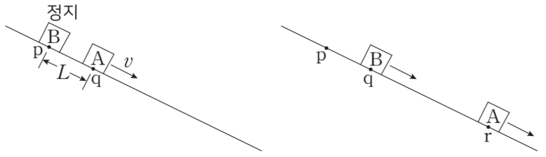


물체의 가속도의 크기는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\dfrac{5v^2}{9L}$ ② $\dfrac{2v^2}{3L}$ ③ $\dfrac{7v^2}{9L}$ ④ $\dfrac{8v^2}{9L}$ ⑤ $\dfrac{v^2}{L}$

예제 5

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 빗면에서 가만히 놓은 물체 A가 점 p를 지나 점 q를 v의 속력으로 통과하는 순간, 물체 B를 p에 가만히 놓았다. p와 q 사이의 거리는 L이고, A가 p에서 q까지 운동하는 동안 A의 평균 속력은 $\frac{4}{5}v$이다. 그림 (나)는 (가)의 A, B가 운동하여 B가 q를 지나는 순간 A가 점 r를 지나는 모습을 나타낸 것이다.



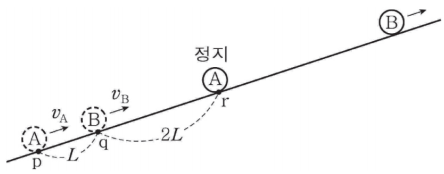
(가) (나)

q와 r 사이의 거리는? (단, 물체의 크기, 공기 저항은 무시한다.)

① $\frac{5}{2}L$ ② $3L$ ③ $\frac{7}{2}L$ ④ $4L$ ⑤ $\frac{9}{2}L$

예제 6

그림과 같이 동일 직선상에서 등가속도 운동하는 물체 A, B가 시간 $t=0$일 때 각각 점 p, q를 속력 v_A, v_B로 지난 후, $t=t_0$일 때 A는 점 r에서 정지하고 B는 빗면 위로 운동한다. p와 q, q와 r 사이의 거리는 각각 L, $2L$이다. A가 다시 p를 지나는 순간 B는 빗면 아래 방향으로 속력 $\frac{v_B}{2}$로 운동한다.



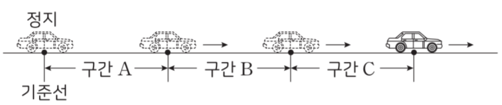
이에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. $v_B=4v_A$이다.
ㄴ. $t=\frac{8}{3}t_0$일 때 B가 q를 지난다.
ㄷ. $t=t_0$부터 $t=2t_0$까지 평균 속력은 A가 B의 3배이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 7

그림과 같이 기준선에 정지해 있던 자동차가 출발하여 직선 경로를 따라 운동한다. 자동차는 구간 A에서 등가속도, 구간 B에서 등속도, 구간 C에서 등가속도 운동한다. A, B, C의 길이는 모두 같고, 자동차가 구간을 지나는 데 걸린 시간은 A에서가 C에서의 4배이다.



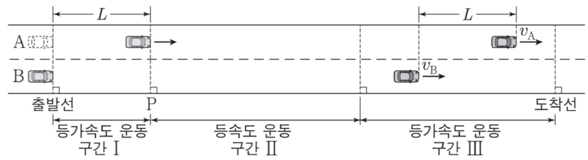
자동차의 운동에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 자동차의 크기는 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. 평균 속력은 B에서가 A에서의 2배이다.
ㄴ. 구간을 지나는 데 걸린 시간은 B에서가 C에서의 2배이다.
ㄷ. 가속도의 크기는 C에서가 A에서의 8배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 8

그림과 같이 직선 도로에서 출발선에 정지해 있던 자동차 A, B가 구간 Ⅰ에서는 가속도의 크기가 $2a$인 등가속도 운동을, 구간 Ⅱ에서는 등속도 운동을, 구간 Ⅲ에서는 가속도의 크기가 a인 등가속도 운동을 하여 도착선에서 정지한다. A가 출발선에서 L만큼 떨어진 기준선 P를 지나는 순간 B가 출발하였다. 구간 Ⅲ에서 A, B 사이의 거리가 L인 순간 A, B의 속력은 각각 v_A, v_B이다.



$\frac{v_A}{v_B}$는? 3점

- 가속도 끄기

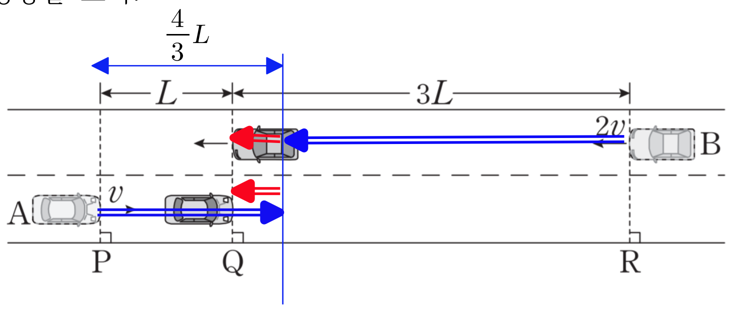
정식 명칭은 '변위 벡터 분리'이다.

등가속도 직선운동의 변위 s를 초속도에 의한 변위벡터(v_0t) / 가속도에 의한 변위벡터($\frac{1}{2}at^2$)로 나눠 해석한다.

물리학 II에서 나오는 중력끄기의 물I 버전으로 물리학 I에서는 1차원운동만 고려하기에 활용도는 높진 않으나 특정 유형에서 조건을 몇개 안쓰고도 매우 빠르게 풀 수 있는 조커픽이다. (2026.1.29 : 아직 실전에선 안써봄)

주로 **두 물체가 동일가속도에서 동일시간 운동하여 만나는 경우**에서 사용된다.
이 경우는 두 물체의 가속도에 의한 변위벡터가 같기 때문에 초속도 비가 바로 나오고 가속도도 구할 수 있다.

예시로 2022 6월 12번의 상황을 보자.



A가 P를 v,B가 R을 $-2v$로 동시에 통과하여 Q에서 만난다. A,B의 가속도가 같을 때 가속도를 v,L로 나타내자.
고전적인 방식으로 접근하면 $2as = v^2 - v_0^2$, $v = v_0 + at$를 사용하여 풀어낼 수 있으나 시간 소모가 꽤 있다.

하지만 가속도 끄기로 접근하면 둘은 초속도에 의한 변위벡터로 $\frac{4}{3}L$지점에서 만났을 것이고,

가속도에 의한 변위벡터로 왼쪽으로 $\frac{1}{3}L$ 이동했음을 알 수 있다. 초속도에 의한 변위벡터로 보면

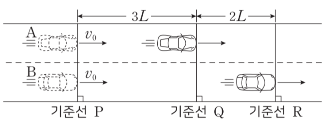
상대속도 $3v$로 $4L$왔으니까 운동 시간이 $\frac{4L}{3v}$이기 때문에 가속도에 의한 변위벡터 $\frac{1}{3}L = \frac{1}{2}a(\frac{4L}{3v})^2$, $\therefore a = \frac{3v^2}{8L}$

예제를 풀어보자.

예제 9

* 조건이 남는 문제다.

그림과 같이 직선 도로에서 기준선 P를 속력 v_0으로 동시에 통과한 자동차 A, B가 각각 등가속도 운동하여 A가 기준선 Q를 통과하는 순간 B는 기준선 R을 통과한다. A, B의 가속도는 방향이 반대이고 크기가 a로 같다. A, B가 각각 Q, R를 통과하는 순간, 속력은 B가 A의 3배이다. P와 Q 사이, Q와 R 사이의 거리는 각각 $3L$, $2L$이다.

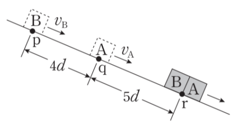


a는? (단, A, B는 도로와 나란하게 운동하며, A, B의 크기는 무시한다.) 3점

① $\frac{v_0^2}{10L}$ ② $\frac{v_0^2}{8L}$ ③ $\frac{v_0^2}{6L}$ ④ $\frac{v_0^2}{4L}$ ⑤ $\frac{v_0^2}{2L}$

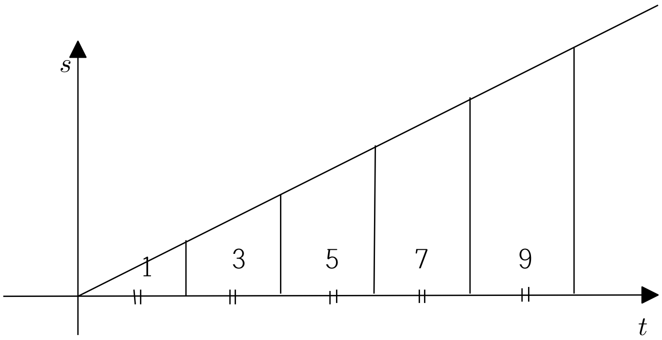
예제10

그림과 같이 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체 A가 점 q를 v_A의 속력으로 지나는 순간 물체 B는 p를 v_B의 속력으로 지났으며, A와 B는 점 r에서 만난다. p, q, r는 동일 직선상에 있고, p와 q 사이의 거리는 $4d$, q와 r 사이의 거리는 $5d$이다.



$\frac{v_A}{v_B}$는? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

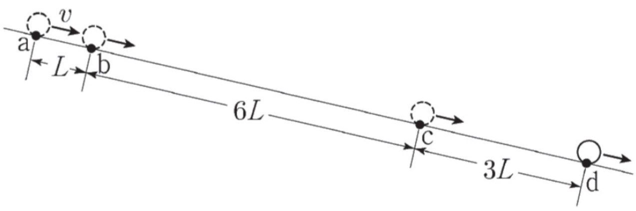
- t-s 그래프의 비율



등가속도 직선운동에서 시간 - 변위 그래프는 위와 같은 변위의 비율을 갖는다.
몰론 이는 초속도가 0일때의 변위, 즉 가속도에 의한 변위벡터의 비율이다.
이 비율이 유용한 경우는 시간에 따라 거리를 쪼개는 것이다.
정시상태에서 t초동안 등가속도 운동을 해서 L 이동했다고 하면
0.5t 동안이면 $\frac{L}{4}$, 2t 동안이면 $4L$ .. 이런식으로 간단하게 판단할 수 있다.

사실 이 비율의 활용도는 이 그래프를 **평행이동** 했을 때 나타난다.
초속도에 의한 변위벡터는 $v_0 t$, 직사각형이기 때문에 이 경우에는 비율이
1+k : 3+k : 5+k : 7+k... 와 같이 나온다.
또한 한 구간동안 속력의 증가량은 $\frac{2v_0}{k}$이다. (v_0 : 초속도)

그래서 이걸 어떻게 쓰냐? 아래 상황으로 봐보자.



예제 4번에서 다뤘던 문제이다. ad,bc의 평속이 같고 ab시간과 cd시간이 같을 때 가속도를 v,L로 나타내자.

ab가 $10L$이고 bc가 $6L$로 5:3이고 평속 같으므로 시간도 5:3이다. ab 시간 = cd 시간이므로
시간 비는 ab:bc:cd = 1:3:1이라고 할 수 있다.
bc가 ab 시간 3배이므로 3개로 쪼개어서 ab를 한 구간의 단위로 하고 여기서 ab, bc 비율관계를 쓰면
1+k : (3+k)+(5+k)+(7+k) = $L:6L$ = 1:6, $k=3$이다.
ab가 한 구간의 단위이고, 한 구간당 속력증가는 $\frac{2v_0}{k}=\frac{2v}{3}$,
따라서 v~$\frac{5}{3}v$동안 L 이동했으므로 $2aL=(\frac{5}{3}v)^2-v^2$에서 $a=\frac{8v^2}{9L}$

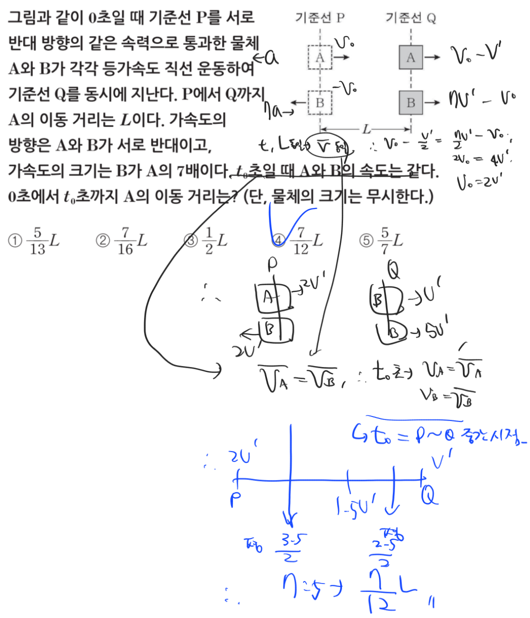
이렇게만 보면 나쁘진 않지만 뒷 파트와의 연계성이 떨어지기 때문에
가능하면 평균속도/상대속도를 마스터 할 것을 추천한다.
잘만 쓰면 시간을 바로 알 수 있어서 예제 10의 해설 풀이처럼 매우 간단히 풀 수 있다.

I. 등가속도 직선 운동

- 예제 1~10 해설 + 손풀이

<빠른 정답>				
4	4	4	4	3
2	5	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{2}$

예제 1 ④ // [아이디어] a,t,L 같으면 $\bar{v}$같음 / $\bar{v}$는 중간 시점 속력 <2023 3월 #17> 정답률 38.2%



그림과 같이 0초일 때 기준선 P를 서로 반대 방향의 같은 속력으로 통과한 물체 A와 B가 각각 등가속도 직선 운동하여 기준선 Q를 동시에 지난다. P에서 Q까지 A의 이동 거리는 L이다. 가속도의 방향은 A와 B가 서로 반대이고, 가속도의 크기는 B가 A의 7배이다. t_0초일 때 A와 B의 속도는 같다. 0초에서 t_0초까지 A의 이동 거리는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

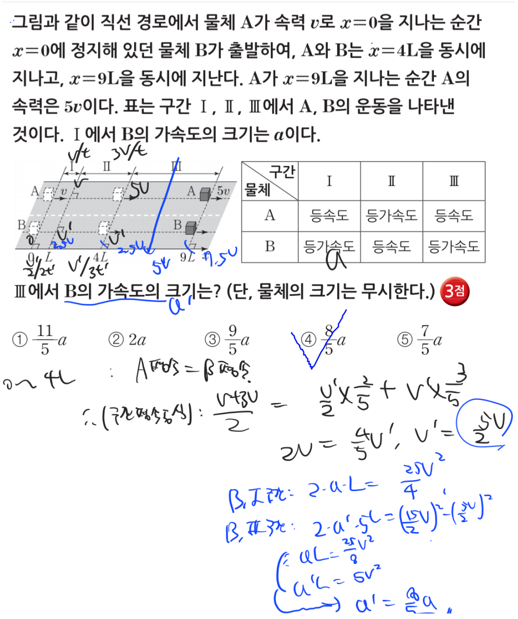
① $\frac{5}{13}L$ ② $\frac{7}{16}L$ ③ $\frac{1}{2}L$ ④ $\frac{7}{12}L$ ⑤ $\frac{5}{7}L$

초속도 v_0이고 A,B의 시간은 같으므로 속력 변화는 가속도 비를 따른다.
가속도에 따른 속도 변화량을 각 $v',7v'$라 하면
PQ구간에서 A,B는 시간, 변위 모두 같으므로 평균속도가 같다.

가속도 방향 반대이므로 $\dfrac{v_0+(v_0-v')}{2}=\dfrac{-v_0+(7v'-v_0)}{2}$, $v_0=2v'$

A와 B는 평균속도가 같고 t_0에서 속력이 같다.
평균속도는 PQ의 중간 시점에서의 속력이다. t_0는 PQ의 중간시점이다.
P $2v'$에서 Q v'이 되므로 t_0때는 $1.5v_0$가 되고,
따라서 P~t_0, t_0~Q의 평속의 비는 7:5가 된다.
둘의 시간이 같기 때문에 길이도 7:5가 된다. PQ가 L이므로
P~t_0의 거리는 $\dfrac{7}{12}L$이다.

예제 2 ④ // [아이디어] 동시출발 동시도착 -> 평속 같다 <2025 수능 #16> 정답률 43.3%



그림과 같이 직선 경로에서 물체 A가 속력 v로 $x=0$을 지나는 순간 $x=0$에 정지해 있던 물체 B가 출발하여, A와 B는 $x=4L$을 동시에 지나고, $x=9L$을 동시에 지난다. A가 $x=9L$을 지나는 순간 A의 속력은 $5v$이다. 표는 구간 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에서 A, B의 운동을 나타낸 것이다. Ⅰ에서 B의 가속도의 크기는 a이다.

물체 \ 구간	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	등속도	등가속도	등속도
B	등가속도	등속도	등가속도

Ⅲ에서 B의 가속도의 크기는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{11}{5}a$ ② $2a$ ③ $\frac{9}{5}a$ ④ $\frac{8}{5}a$ ⑤ $\frac{7}{5}a$

구간 I+II에서 A, B는 이동거리, 시간이 같다. 즉, 평균속도가 같다.
A는 I구간 평속 v, II구간 평속 $3v$로 가는데 I:II 길이비 1:3이므로
I구간과 II구간을 통과하는 시간이 같을 것이다.

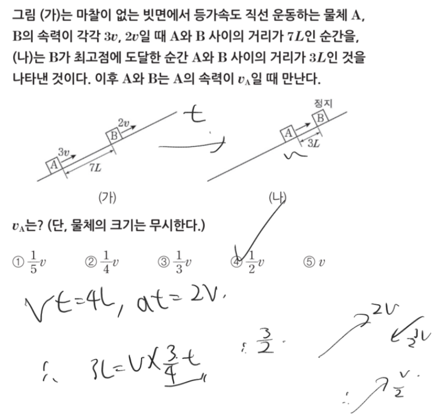
B는 L에서 속력 v'라 하면 I구간 평속 $\dfrac{v'}{2}$, II구간 평속 v'로
I구간 : II구간 통과시간이 2:3일 것이다.
따라서 A, B의 I+II구간 평균속력이 같음을 이용하여 식을 쓰면

$\dfrac{v+3v}{2}=\dfrac{\frac{v'}{2}\times 2+v'\times 3}{5}$, $v'=\dfrac{5}{2}v$, III구간 평속 $5v$ -> B $9L$ $\dfrac{15}{2}v$

B I구간에서 $2as=v^2-v_0^2$을 사용하면 $2aL=\dfrac{25}{4}v^2$

B III구간에서 가속도 a'라 하면 $2a5L=(\dfrac{15}{2}v)^2-(\dfrac{5}{2}v)^2$, $\therefore a'=\dfrac{8}{5}a$

<2024 5월 #17> 정답률 37.7%



예제 3 ④ // [아이디어] 상대속도

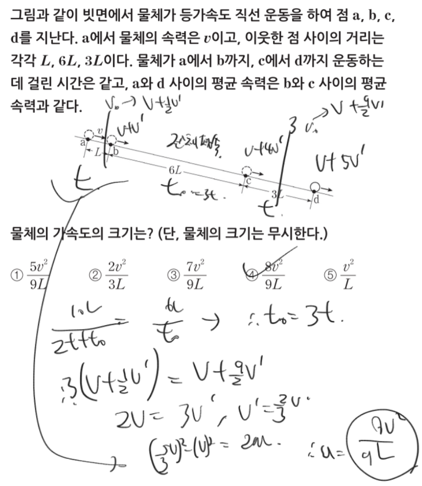
동일 빗면이라 상대속도 v가 유지되고
(가)->(나) 의 시간을 t라 하면 $vt=4L$이다.

A,B가 만나려면 $3L$만큼 더 줄어야 하므로 (나)에서 $\frac{3}{4}t$가 지나야 한다.

A의 속력은 t동안 $4v$에서 $2v$로 $2v$ 줄었으니

$\frac{3}{4}t$ 동안은 $\frac{3}{2}v$가 더 줄어 $v_A=2v-\frac{3}{2}v=\frac{v}{2}$이다.

<2024 9월 #20> 정답률 32.1%



예제 4 ④ // [아이디어] 변위 = 평속 x 시간

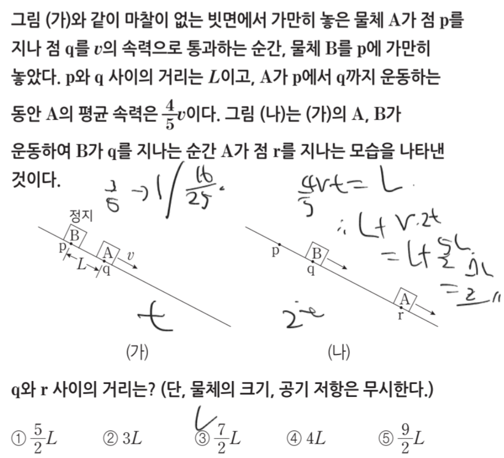
ad와 bc의 평속이 같기 때문에 시간은 거리에 비례한다.
$10L:6L$이므로 각 $5t$,$3t$라 할 수 있고,
나머지 $2t$는 ab와 cd 시간이 같기 때문에 시간이 t,$3t$,t로 나눠진다.
동일 빗면에서 속도 변화량 $\propto$ 시간이기 때문에 t당 v' 증가한다고 하면
b점에서는 $v+v'$, c에서는 $v+4v'$, d에서는 $v+5v'$가 된다.
ab, cd 구간은 시간이 같지만 거리가 3배차이 이므로 평속도 3배차이다.
따라서 3(ab평속)=(cd평속)을 이용하여 식을 쓸 수 있다.

$3(\frac{v+(v+v')}{2})=\frac{(v+4v')+(v+5v')}{2}$, $\therefore v'=\frac{2}{3}v$

ab 구간을 다시 보면 v~$\frac{5}{3}v$ 동안 L 간것이므로 $2aL=(\frac{5}{3}v)^2-v^2$, $a=\frac{8v^2}{9L}$

예제 5 ③ // [아이디어] a,L같으면 Δv^2 같다

<2021 4월 #18> 정답률 36.4%



A가 q를 v로 통과했는데 pq구간 평속이 $\frac{4}{5}v$이므로 p를 $\frac{3}{5}v$로 통과했다.

모든 상황이 동일한 빗면에서 일어나므로 속력^2 변화량 $\propto$ 변위이다.

따라서 L당 $\frac{16v^2}{25}$이 변함을 알 수 있다.

B는 p에서 초속도 0이므로 $\frac{4}{5}v$로 q를 통과하게 된다.

(가)에서 평속 $\frac{4}{5}v$로 L 오는 시간을 t라 하면 $\frac{4vt}{5}=L$,

(나)에서는 B가 0~$\frac{4}{5}v$, 평속 $\frac{2}{5}v$로 L 오므로 $2t$ 걸린다.

(가)에서 A,B 사이 거리가 L이었고

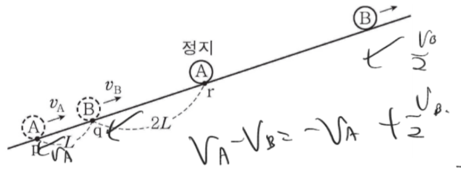
(나)에서 상대속도 v가 유지된 채로 $2t$동안 가서 $2vt=\frac{5}{2}L$ 더 벌어진다.

따라서 qr은 $L+\frac{5}{2}L=\frac{7}{2}L$

예제 6 ② // [아이디어] 동일 위치 반환, 동일빗면 v_{AB} 유지

<2023 10월 #17> 정답률 28.2%
- 오답률 1위

그림과 같이 동일 직선상에서 등가속도 운동하는 물체 A, B가 시간 $t=0$일 때 각각 점 p, q를 속력 v_A, v_B로 지난 후, $t=t_0$일 때 A는 점 r에서 정지하고 B는 빗면 위로 운동한다. p와 q, q와 r 사이의 거리는 각각 L, $2L$이다. A가 다시 p를 지나는 순간 B는 빗면 아래 방향으로 속력 $\frac{v_B}{2}$로 운동한다.



$V_A - V_B = -V_A + \frac{V_B}{2}$
$\frac{3V_B}{2} = 2V_A$
$4V_A = 3V_B$

이에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. $v_B=4v_A$이다.
ㄴ. $t=\frac{8}{3}t_0$일 때 B가 q를 지난다.
ㄷ. $t=t_0$부터 $t=2t_0$까지 평균 속력은 A가 B의 3배이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

동일 빗면이기에 상대속도가 $t=0$에서의 $v_A - v_B$가 유지된다.
A가 다시 p를 지날 때는 동일 위치 반환이므로 속도가 $-v_A$이다.
동시에 그 때 B는 $-\frac{v_B}{2}$로 내려온다. 상대속도 유지로 식을 쓰면
$v_A - v_B = -v_A + \frac{v_B}{2}$, $4v_A = 3v_B$이다.

ㄱ. $v_B = \frac{4}{3}v_A$이므로 (X)

ㄴ. $t=t_0$일 때 A는 v_A만큼 감속되었다.

$t=\frac{8}{3}t_0$면 $\frac{8}{3}v_A = 2v_B$이다.

B는 q에서 v_B였고 $2v_B$ 감속되면 $-v_B$가 된다.

속력이 같으므로 동일 위치 q로 반환됨을 알 수 있다 (O)

ㄷ. $t=t_0$ ~ $t=2t_0$동안 A는 0 ~ $-v_A$여서 평균속력은 $\frac{v_A}{2}$이고

B는 $\frac{1}{4}v_B$ ~ 0 ~ $-\frac{v_B}{2}$이기 때문에

평균속력을 구하려면 따로 계산해야한다.

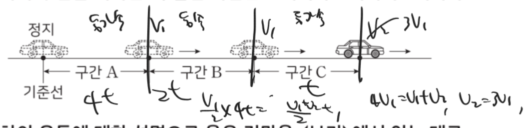
동일 가속도이기에 평균속력 $\frac{v_B}{8}$와 $\frac{v_B}{4}$의 시간 비율이 1:2다.

따라서 평속분배를 쓰면 $\dfrac{\frac{v_B}{8}+\frac{v_B}{4}\times 2}{3} = \frac{5}{24}v_B = \frac{5}{18}v_A$로 A가 B의 $\frac{9}{5}$배다. (X)

예제 7 ⑤

<2019 수능 #11> 정답률 48.2%

그림과 같이 기준선에 정지해 있던 자동차가 출발하여 직선 경로를 따라 운동한다. 자동차는 구간 A에서 등가속도, 구간 B에서 등속도, 구간 C에서 등가속도 운동한다. A, B, C의 길이는 모두 같고, 자동차가 구간을 지나는 데 걸린 시간은 A에서가 C에서의 4배이다.



$4t$ $2t$ $4v_1 = v_1 + v_2$, $v_2 = 3v_1$,

자동차의 운동에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 자동차의 크기는 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. 평균 속력은 B에서가 A에서의 2배이다.
ㄴ. 구간을 지나는 데 걸린 시간은 B에서가 C에서의 2배이다.
ㄷ. 가속도의 크기는 C에서가 A에서의 8배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

구간 A 끝났을 때 속도 v_1, 구간 C 끝났을 때 속도 v_2라 하자.
같은 거리 지나는데 A에서가 C에서보다 시간이 4배 걸렸으므로
평균속도는 C에서가 A에서의 4배임을 알 수 있다.

$\therefore 4\times\frac{v_1}{2} = \frac{v_1+v_2}{2}$, $v_2 = 3v_1$이다.

ㄱ. A는 평속 $\frac{v_1}{2}$, B는 평속 v_1이므로 B에서가 A 2배이다. (O)

ㄴ. 같은 거리이고 평속이 B v_1, C $\frac{v_1+3v_1}{2} = 2v_1$이므로

B에서가 C의 2배만큼 더 걸린다. (O)

ㄷ. $\Delta v^2 = 2as$인데 s가 A,B,C 모두 같으므로

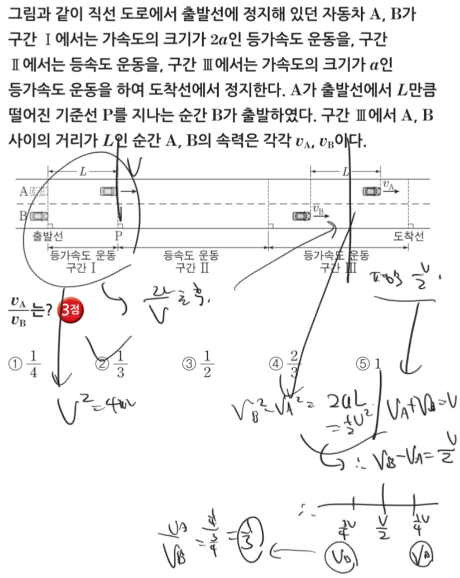
속력^2 $\propto$ 가속도이다.

A에서 v_1^2, C에서 $(3v_1)^2 - v_1^2 = 8v_1^2$이므로

C 가속도가 A 가속도의 8배이다 (O)

예제 8 $\frac{1}{3}$ // [아이디어] 동일 운동 자취이므로 A는 B의 t초 후

<2024 6월 #18> 정답률 35.9%


그림과 같이 직선 도로에서 출발선에 정지해 있던 자동차 A, B가 구간 Ⅰ에서는 가속도의 크기가 $2a$인 등가속도 운동을, 구간 Ⅱ에서는 등속도 운동을, 구간 Ⅲ에서는 가속도의 크기가 a인 등가속도 운동을 하여 도착선에서 정지한다. A가 출발선에서 L만큼 떨어진 기준선 P를 지나는 순간 B가 출발하였다. 구간 Ⅲ에서 A, B 사이의 거리가 L인 순간 A, B의 속력은 각각 v_A, v_B이다.

$\frac{v_A}{v_B}$는? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

A가 정지상태에서 가속도 $2a$로 L만큼 갔을 때 B는 가속도 $2a$로 출발한다.
즉, A가 L 갔을 때만큼의 시간 차를 둔 운동이다.

L 갔을 때 속력을 v라 하면 평속이 $\frac{v}{2}$이므로 A, B의 시간차는 $\frac{2L}{v}$이다.

또한 등가속도 공식을 써서 $v^2 = 4aL$임을 알 수 있다.

구간 III에서 시간차 $\frac{2L}{v}$로 L 차이나므로 평속이 $\frac{v}{2}$이다.

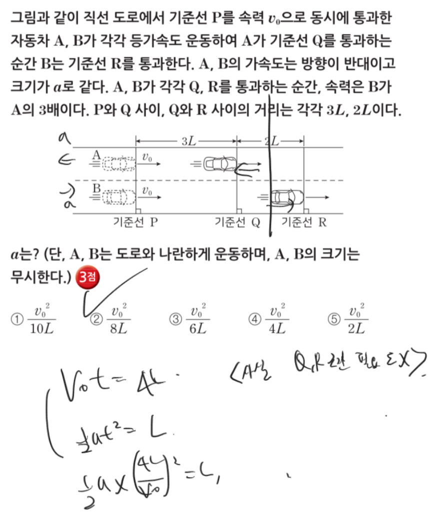
또한 가속도 방향이 $-x$방향이므로 $v_B - v_A = a(\frac{2L}{v}) = \frac{2aL}{v} = \frac{\frac{v^2}{2}}{v} = \frac{v}{2}$이다.

평속이 $\frac{v}{2}$인 것은 $v_A + v_B = v$로 나타낼 수 있으므로 연립하여

$v_B = \frac{3}{4}v$, $v_A = \frac{1}{4}v$임을 구할 수 있다. 따라서 $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{3}$

예제 9 ② // [아이디어] 초속도 같고 가속도만 반대이므로 가속도 끄기

<2020 4월 #16> 정답률 47.7%


그림과 같이 직선 도로에서 기준선 P를 속력 v_0으로 동시에 통과한 자동차 A, B가 각각 등가속도 운동하여 A가 기준선 Q를 통과하는 순간 B는 기준선 R를 통과한다. A, B의 가속도는 방향이 반대이고 크기가 a로 같다. A, B가 각각 Q, R를 통과하는 순간, 속력은 B가 A의 3배이다. P와 Q 사이, Q와 R 사이의 거리는 각각 $3L$, $2L$이다.

a는? (단, A, B는 도로와 나란하게 운동하며, A, B의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{v_0^2}{10L}$ ② $\frac{v_0^2}{8L}$ ③ $\frac{v_0^2}{6L}$ ④ $\frac{v_0^2}{4L}$ ⑤ $\frac{v_0^2}{2L}$

A, B는 초속도가 같고 가속도 방향만 반대이다.
즉, 가속도가 없었다면 $4L$지점까지 같이 갔을 텐데
가속도 벡터로 인해 $2L$이 차이나게 된 것이다.
정확히는 A는 가속도 벡터가 $-L$, B는 $+L$이 된 것이다.

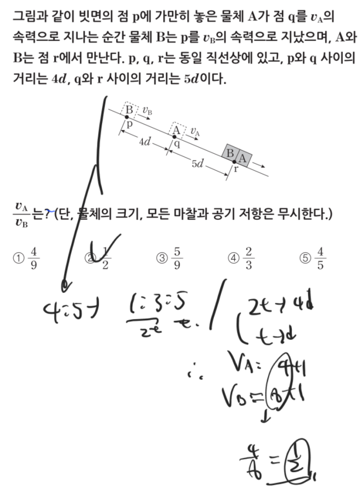
초속도에 의한 벡터 $v_0 t = 4L$ / 가속도에 의한 벡터 $\frac{1}{2}at^2 = L$

이를 연립하여 t를 소거하면 $a = \frac{9v^2}{8L}$이다.

Q, R에서 B가 A 3배라는 조건을 안써도 풀 수 있었다.

<2021 10월 #18> 정답률 31.9%

예제10 $\frac{1}{2}$ // [아이디어] 비율관계 시간파악, 동일빗면 v_{AB} 유지


그림과 같이 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체 A가 점 q를 v_A의 속력으로 지나는 순간 물체 B는 p를 v_B의 속력으로 지났으며, A와 B는 점 r에서 만난다. p, q, r는 동일 직선상에 있고, p와 q 사이의 거리는 $4d$, q와 r 사이의 거리는 $5d$이다.

$\frac{v_A}{v_B}$는? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

4:5를 1:3:5로 해석하는게 중요했다! A가 정지상태에서 내려오는데
그 거리비가 1+3:5이므로 pq:qr 시간 비는 2:1임을 파악할 수 있다.
전체를 $3t$라 두면 t당 $d:3d:5d:..$로 진행된다.
여기서 A가 q->r 가는 시간은 $5d$일때에 해당하므로 t이고 이에 따라
B가 p에서 r 가는 시간도 t가 된다. t당 $d:3d:5d:..$로 진행되고 q가 0이다.
따라서 이 시간(0~t)동안 가속도에 의한 변위벡터는 d이다.
그렇다면 v_A, v_B의 같은 시간동안의 변위벡터가 $4d$, $8d$이므로

$v_B = 2v_A$, $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{2}$이다.

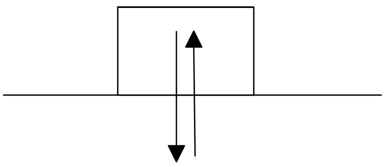
II. 운동 방정식

전체적으로 운동방정식 파트가 분량이 적은 이유는 <변화량 추적>, <힘의 내분> 외에 스킬이랄 게 없고
개인의 상황 해석 능력과 직관이 거의 전부이기 때문이다. 나도 등가속도는 평속으로 풀지만
운동방정식은 저 둘 제외하면 대부분의 상황에 $F=ma$식 세워서 푸는게 가장 빠르고 정확하다고 생각한다.

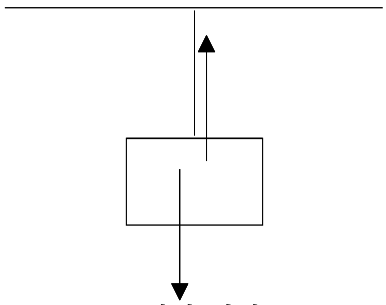
- 힘의 평형 vs 작용 반작용

간혹 그때그때 판단하면 헷갈릴 수도 있기 때문에 정리를 하자면
힘의 평형은 한 물체에서 보는 것이고 작용 반작용은 두 물체가 서로에게 영향을 주는 것이다.

그림으로 보면 이런 느낌이다.



<작용 반작용>

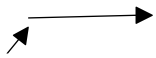


<힘의 평형>

작용 반작용의 상황에서는 물체가 땅에게 중력을, 땅이 물체에게 수직항력을 준다.
이처럼 작용 반작용 관계의 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 서로 **주어/목적어가 반대**이다.

힘의 평형 상황에서는 **같은 물체에 대해** 크기가 같고 방향이 반대인 힘이 작용한다.
물체에게 지구가 중력을, 물체에게 실이 장력을 작용해서 결론적으로 물체의 알짜힘이 0이 된다.

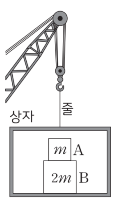
힘을 화살표로 나타냈을 때는 서로에게 향하면 작용 반작용, 시작점이 일치하면 힘의 평형이다.



예제로 확인해보자.

예제 1

그림과 같이 기중기에 줄로 연결된 상자가 연직 아래로 등속도 운동을 하고 있다. 상자 안에는 질량이 각각 m, $2m$인 물체 A, B가 놓여 있다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



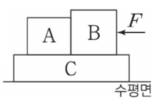
보기

ㄱ. A에 작용하는 알짜힘은 0이다.
ㄴ. 줄이 상자를 당기는 힘과 상자가 줄을 당기는 힘은 작용 반작용 관계이다.
ㄷ. 상자가 B를 떠받치는 힘의 크기는 A가 B를 누르는 힘의 크기의 2배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 2

그림은 수평면에서 정지해 있는 물체 C 위에 물체 A, B를 올려놓고 B에 크기가 F인 힘을 수평 방향으로 작용할 때 A, B, C가 정지해 있는 모습을 나타낸 것이다.
이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



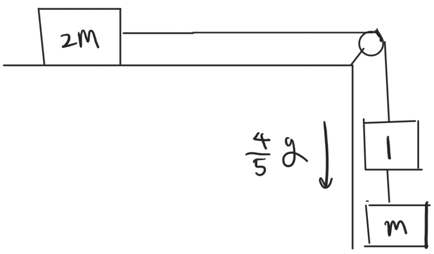
보기

ㄱ. B에 작용하는 알짜힘은 0이다.
ㄴ. 수평면이 C에 작용하는 수평 방향의 힘의 크기는 F이다.
ㄷ. A가 B에 작용하는 힘은 B가 A에 작용하는 힘과 작용 반작용 관계이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

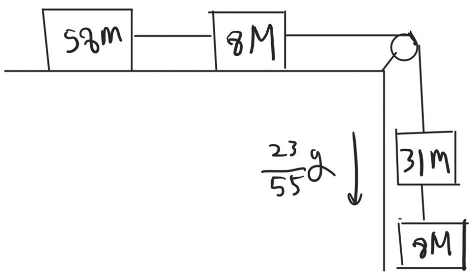
- 복잡한 비례식 대처법

$F=ma$를 풀 때, 가속도를 알기 위해 $a=\dfrac{F}{m}$꼴로 구하는 경우가 많다. 이때 쓸 수 있는 팁을 알아보자.



이런 상황에서 가속도로 식을 작성한 결험이 꽤 많을 것이다. $\dfrac{(1+m)g}{1+3m}=\dfrac{4}{5}g$이므로 m을 바로 얻어낼 수 있다.

그렇다면 이런 상황에서는 어떨까?



이 문제 비례식을 작성해보면 2022 수능 화학 18번과 동일한 문제임을 알 수 있다.
물론 물리에서 이런 문제는 사설에서나 나오겠지만 킬러문제가 바뀌는 추세인만큼 익혀둬서 나쁠건 없다.
$\dfrac{(31m+8M)g}{89m+16M}=\dfrac{23}{55}g$ 지금이야 질량이 다 주어졌지만 질량마저 미지수일 경우 이런 계산을 만나면 뇌가 굳는다.
그리고 화학에서 23년도에는 삼원일차 연립방정식을 내버렸기 때문에 저런 계산도 다룰 수 있어야 한다.
우리가 저런 숫자가 더러운 비례식을 만났을 때 해야 하는건 4가지이다.

> 1. 분모 분자가 다항식이라면 한쪽 항을 맞춘다.
> 2. 분모와 분자의 차를 양변에서 구구한다.
> 3. 차를 동일하게 맞추는 비례상수를 구하고 분자 or 분모에 곱한다.
> 4. 간단한 일차방정식을 푼다.

적용하면 아래와 같다.

1. 우선 M의 계수를 일치시키기 위해 양변에 2를 곱한다.

2. 그리고 양변에서 분모/ 분자의 차를 구한다.
$\dfrac{62m+16M}{89m+16M}=\dfrac{46}{55}$이므로 각 $27m$ / 9 이다.

3. 차를 동일하게 맞추려면 우변 $\times 3m$을 하면 된다.
분모에 곱하면 $31m+8M=23\times 3m$이 된다.

4. 이 일차방정식을 풀면 끝!

$\dfrac{31m+8M}{89m+16M}=\dfrac{23}{55}$

M계수일치 ↓

$\dfrac{62m+16M}{89m+16M}=\dfrac{46}{55}$

차 $27m$ 9

×3m
↳ 비례상수.

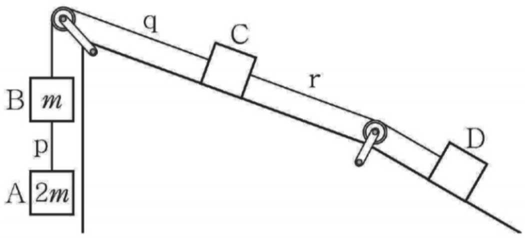
$\therefore 31m+8M=23\times 3m,$
$31m+8M=69m,$
$M=\dfrac{17}{2}m$

- 변화량 추적

대표 유형은 실끊기로 운동방정식 킬러의 50% 비율을 차지한다.
기존 실끊기 유형이 어려웠던 이유는

1. 빗면에서의 운동 : 가속도를 미지수로 둬야 함
2. 질량이 주어지지 않음 : 가속도를 이용한 운동방정식으로 질량을 역추적 해야함

이렇게 크게 두 가지로 살펴볼 수 있다. 안그래도 가속도 때문에 미지수가 많은데 거기에 운동방정식 세우려면 한 문제 푸는데 5~6분을 상회하는 시간을 소요할 수도 있다.
대표적으로 아래 문제를 보자.



정지해 있고 C, D의 질량이 같다. 실 p가 끊어지면 C는 가속도 $\frac{2}{9}g$로 운동하고 r의 장력은 $\frac{10}{9}mg$가 된다.
r을 끊었을 때 D의 가속도를 구하자.

이 문제의 정답률은 36.1%이다. 사실상 킬러급이 아닌 문제로, 빠르게 해결할 수 있어야 한다는 뜻이다.

변화량 추적은 말그대로 $\Delta F = m\Delta a$다. 운동상황의 변화는 힘의 변화가 원인이니 힘의 변화량을 보자는 것이다.
추가로 장력은 양 끝을 같은 힘으로 당기는 습성이 있다.
즉, **실을 끊으면 양쪽에서 같은 힘이 사라지기 때문에 실 양쪽의 $m\Delta a$는 크기가 같고 방향이 반대이다.**
더 나아가서는 가속도 변화량의 비는 질량의 역비라고 볼 수 있다.

여기서는 C,D 질량 M라 하면 A $2m$이 가속도 0 -> g // B C D $(m+2M)$이 가속도 0 -> $\frac{2}{9}g$ 이므로

$2mg = (m+2M)\frac{2}{9}g$, $M = 4m$임을 바로 구할 수 있다. A가 아래로 떨어지므로 B,C,D는 오른쪽으로 진행한다.

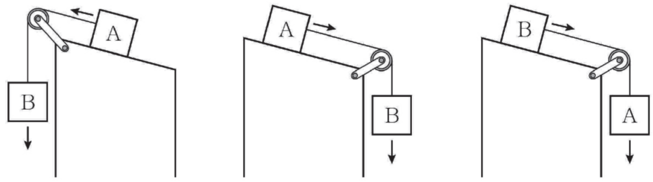
D는 오른쪽 알짜힘이 $4m \times \frac{2}{9}g = \frac{8}{9}mg$이고,

왼쪽으로 $\frac{10}{9}mg$ 당기던 r을 끊으면 상대적으로 오른쪽으로 $\frac{10}{9}mg$를 준것과 같으므로 총 알짜힘은 $2mg$이다.

$4m$ 짜리가 $2mg$의 알짜힘을 받으므로 가속도는 $\frac{1}{2}g$ 이다.

다만 유의해야 할 점이 있다. 실이 끊어져서 A,B로 분리가 되었다고 하면
A의 질량 / B의 질량 / A의 가속도 변화량 / B의 가속도 변화량
이 4개중에 1개를 모를 때에만 이 방법을 쓰는게 좋다.

그리고 실 끊기가 아니어도 변화량 추적을 사용하면 신속하게 문제를 풀 수 있다. 예시 문제를 같이 보자.



(가) (나) (다)

(가)에서는 등속도, (나):, (다)에서는 각 가속도 $8a$, $17a$로 등가속도 운동할 때 A와 B의 질량비는?

(가)와 (나)의 차이는 B의 방향이다. 즉, 2B가 $8a$의 가속도 변화량을 만든 것이다. B는 $4a$를 만든다.
따라서 (나)에서 빗면에 놓인 A도 $4a$를 만든다고 할 수 있다.

(나)와 (다)의 차이는 빗면에 누가 놓이냐 이다. 빗면의 가속도는 $g\sin\theta$로 g보다 작다. (자세한 내용은 33p.)
A는 $g\sin\theta$에 있을 때 $4a$, B는 g에 있을 때 $4a$를 만들었다.

그렇다면 A가 g에 놓이면 $\dfrac{4a}{\sin\theta}$를, B가 $g\sin\theta$에 놓이면 $4a\sin\theta$를 만들 것이다.

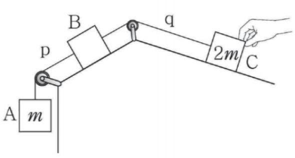
(다)의 가속도는 $17a$이므로 $4a(\dfrac{1}{\sin\theta}+\sin\theta)=17a$, $\sin\theta<1$이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$이다.

(가)에서 B가 g, A가 $\dfrac{1}{4}g$에 놓여있었을 때 힘의 평형을 이루었으므로 질량비는 $4:1$이다.

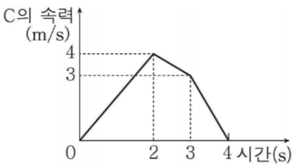
이제 실전에서 직접 적용해보자.

예제 3

그림 (가)는 물체 A, B, C를 실 p, q로 연결하고 C를 손으로 잡아 정지시킨 모습을, (나)는 (가)에서 C를 가만히 놓은 순간부터 C의 속력을 시간에 따라 나타낸 것이다. A, C의 질량은 각각 m, $2m$이고, p와 q는 각각 2초일 때와 3초일 때 끊어진다.



(가)



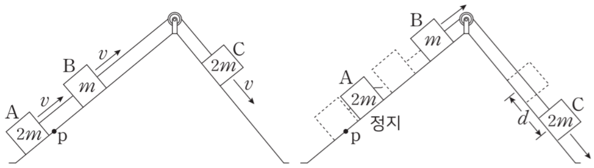
(나)

4초일 때 B의 속력은? (단, 중력 가속도는 $10m/s^2$이고, 실의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① 4m/s ② 5m/s ③ 6m/s ④ 7m/s ⑤ 8m/s

예제 4

그림 (가)와 같이 질량이 각각 $2m$, m, $2m$인 물체 A, B, C가 실로 연결된 채 각각 빗면에서 일정한 속력 v로 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 A가 점 p에 도달하는 순간, A와 B를 연결하고 있던 실이 끊어져 A, B, C가 각각 등가속도 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 실이 B에 작용하는 힘의 크기는 $\frac{5}{6}mg$이고, 실이 끊어진 순간부터 A가 최고점에 도달할 때까지 C는 d만큼 이동한다.



(가) (나)

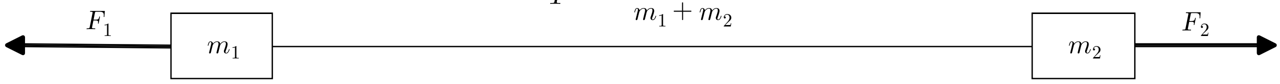
d는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 실의 질량과 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\dfrac{8v^2}{3g}$ ② $\dfrac{10v^2}{3g}$ ③ $\dfrac{4v^2}{g}$ ④ $\dfrac{14v^2}{3g}$ ⑤ $\dfrac{16v^2}{3g}$

- 힘의 내분

등가속도 직선운동 파트에서 평속제곱내분을 했던 것 처럼 힘에서도 내분을 적용할 수 있다.
그 중 가장 활용도가 높고 까다로운 장력을 힘의 내분으로 구하는 방법을 알아보자.

$$T=\frac{m_2F_1+m_1F_2}{m_1+m_2}$$



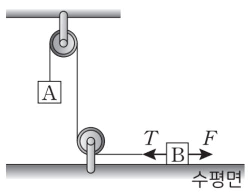
m_1 물체가 외력 F_1을, m_2 물체가 외력 F_2을 서로 반대 방향으로 받고 있을때

이 두 물체를 연결한 실의 장력 $T=\dfrac{m_2F_1+m_1F_2}{m_1+m_2}$ 이다.

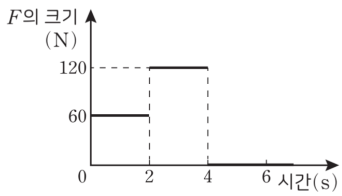
장력을 구할 때 따로 식을 세우지 않아도 된다는 점에서 꽤 유용하게 사용할 수 있다.

유도 과정은 복잡하지 않다. 실로 연결되어 가속도가 같기 때문에 $\dfrac{T-F_1}{m_1}=\dfrac{F_2-T}{m_2}$이고, 식을 정리하면 나온다.

그렇다면 이걸 적용해서 문제를 하나 풀어보자.



(가)

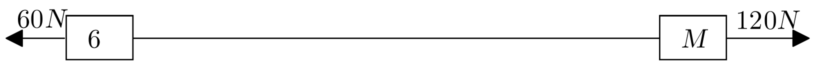


(나)

A,B는 0~2초는 정지, 2초부터는 등가속도 운동을 하고 T 크기는 3초일 때가 5초일 때의 4배일 때 B의 질량은?
(단, $g=10m/s^2$)

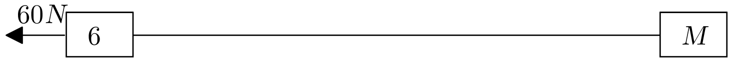
A 질량을 m, B 질량을 M이라 하면 0~2초 동안은 정지이므로 A의 중력=F이다. $\therefore mg=60,\ m=6$
그리고 T 4배 조건을 이용하기 위해 살펴보면

2~4초 :



$$T_1=\frac{120\times6+60\times M}{6+M}$$

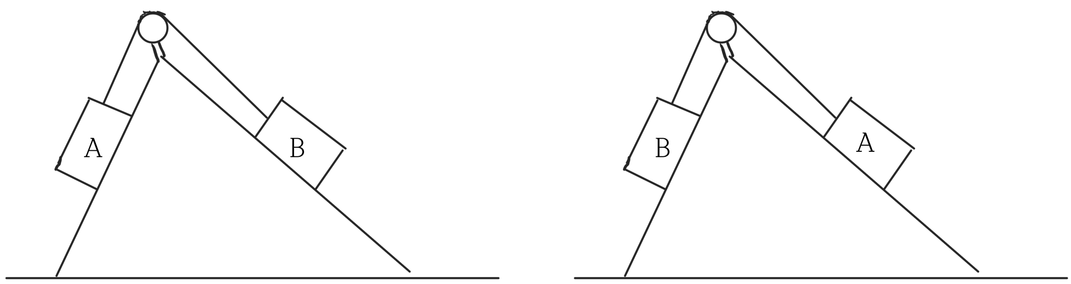
4초 ~ :



$$T_2=\frac{0\times6+60\times M}{6+M}$$

3초일때가 5초일때 4배이므로 $T_1=4T_2$, $\dfrac{720+60M}{6+M}=4\times\dfrac{60M}{6+M}$, $180M=720$, $M=4$ 이다.

또 장력에서의 힘의 내분을 이용한 특수한 상황이 있는데, 이를 알고 있다면 정말 빠르게 해결된다.
여백이 부족하기에 다음 페이지에서 같이 살펴보겠다.



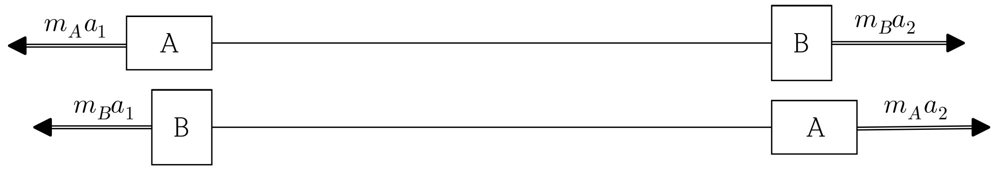
(가) (나)

(가) 상황에서 A, B 위치만 교환되어서 (나)가 되었을 때, 장력의 크기는 어떻게 될까?

왼쪽 경사면의 가속도를 a_1, 오른쪽을 a_2라 하고, A와 B의 질량을 각각 m_A, m_B라고 하면 상황을 아래와 같다.

(가) :

(나) :



(가)에서 장력은 $\dfrac{m_B \times m_A a_1 + m_A \times m_B a_2}{m_A + m_B} = \dfrac{m_A m_B (a_1 + a_2)}{m_A + m_B}$,

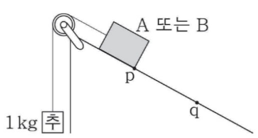
(나)의 장력은 $\dfrac{m_A \times m_B a_1 + m_B \times m_A a_2}{m_A + m_B} = \dfrac{m_A m_B (a_1 + a_2)}{m_A + m_B}$로 **(가), (나)의 장력이 같음을 확인할 수 있다.**

즉, 한 상황에서 경사로의 두 물체가 교환되더라도 장력이 바뀌지 않는다.

이것들을 이용한 예제를 풀어보자.

예제 5

그림과 같이 물체 A 또는 B와 추를 실로 연결하고 물체를 빗면의 점 p에 가만히 놓았더니, 물체가 등가속도 직선 운동하여 점 q를 통과하였다. 추의 질량은 1kg이다. 표는 물체의 질량, 물체가 p에서 q까지 운동하는 데 걸린 시간과 실이 물체에 작용한 힘의 크기 T를 나타낸 것이다.

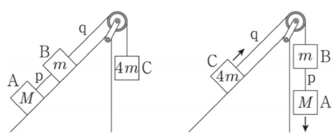


물체	질량	걸린 시간	T
A	3kg	4초	T_A
B	9kg	2초	T_B

$T_A : T_B$는? (단, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

예제 6

그림 (가)는 질량이 각각 M, m, $4m$인 물체 A, B, C가 빗면과 나란한 실 p, q로 연결되어 정지해 있는 것을, (나)는 (가)에서 물체의 위치를 바꾸었더니 물체가 등가속도 운동하는 것을 나타낸 것이다. (가)에서 p가 B를 당기는 힘의 크기는 $\frac{10}{3}mg$이다.



(가) (나)

(나)에서 q가 C를 당기는 힘의 크기는? (단, 중력 가속도는 g이고, 실의 질량 및 모든 마찰은 무시한다.)

① $\frac{13}{3}mg$ ② $4mg$ ③ $\frac{11}{3}mg$ ④ $\frac{10}{3}mg$ ⑤ $3mg$

II. 운동 방정식

- 예제 1~6 해설 + 손풀이

<빠른 정답>		
3	5	5
1	5	2

예제 1 ③

ㄱ. A : 정지상태이므로 가속도, 알짜힘 0이다. (O)

ㄴ. 줄 -> 상자 / 상자 -> 줄

주어와 목적어가 도치된 힘의 관계는 작용 반작용이다. (O)

ㄷ. A,B는 상자가 떠받치는 힘 때문에 떨어지지 않으므로

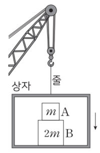
그 떠받치는 힘은 A,B의 중력의 합이므로 $3mg$이다.

A가 B를 누르는 힘은 A의 중력과 같으므로 mg이다.

따라서 B를 떠받치는 힘은 A가 누르는 힘의 3배이다. (X)

<2022 6월 #8> 정답률 70% 이상

그림과 같이 기중기에 줄로 연결된 상자가 연직 아래로 등속도 운동을 하고 있다. 상자 안에는 질량이 각각 m, $2m$인 물체 A, B가 놓여 있다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. A에 작용하는 알짜힘은 0이다. 등속 = ($a=0$) = ($F=0$)

ㄴ. 줄이 상자를 당기는 힘과 상자가 줄을 당기는 힘은 작용 반작용 관계이다. 주어 · 목적어가 서로 반대 → 작·반

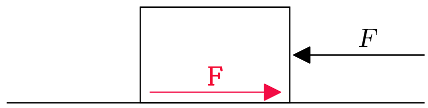
ㄷ. 상자가 B를 떠받치는 힘의 크기는 A가 B를 누르는 힘의 크기의 ~~2~~배이다. 3배 3mg mg

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 2 ⑤

ㄱ. B는 정지상태이므로 알짜힘이 0이다. (O)

ㄴ. A,B,C를 한 덩어리로 보면



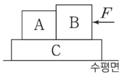
A,B,C가 정지해있기 위해서는 수평면이 F로 밀어줘야 한다. (O)

ㄷ. A -> B / B -> A

주어와 목적어가 도치된 힘의 관계는 작용 반작용이다. (O)

<2023 7월 #4> 정답률 38.9%

그림은 수평면에서 정지해 있는 물체 C 위에 물체 A, B를 올려놓고 B에 크기가 F인 힘을 수평 방향으로 작용할 때 A, B, C가 정지해 있는 모습을 나타낸 것이다.
이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 3점



보기

ㄱ. B에 작용하는 알짜힘은 0이다. 정지 → 0

ㄴ. 수평면이 C에 작용하는 수평 방향의 힘의 크기는 F이다. A,B,C 1개로 생각

ㄷ. A가 B에 작용하는 힘은 B가 A에 작용하는 힘과 작용 반작용 관계이다. 주어 목적어 도치 → 작·반

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 3 ⑤ // [아이디어] 실끊기

C는 0~2초 왼쪽으로 $2m/s^2$, 2~3초 오른쪽으로 $1m/s^2$ 가속도를 갖는다.

p가 끊어지면 B,C는 가속도가 2-> -1, A는 자유낙하하므로 2->10이다.

B 질량 M이라 하면 $3(M+2m)=8m$, $M=\dfrac{2}{3}m$이다.

q가 끊어지면 C는 가속도가 -1 -> -3, B는 -1 -> ? 이다.

C 질량이 B의 3배이므로 B의 가속도 변화량은 +6이다.

따라서 B는 3초까지는 C와 속력이 같은 $3m/s$로 왼쪽으로 움직인다.

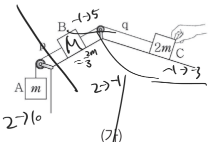
3~4초에는 가속도가 왼쪽으로 $5m/s$이므로

4초일 때 B의 속력은 $3+5=8m/s$이다.

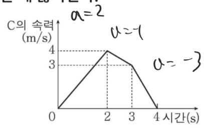
<2022 3월 #15> 정답률 25.9%

- 오답률 1위

그림 (가)는 물체 A, B, C를 실 p, q로 연결하고 C를 손으로 잡아 정지시킨 모습을, (나)는 (가)에서 C를 가만히 놓은 순간부터 C의 속력을 시간에 따라 나타낸 것이다. A, C의 질량은 각각 m, $2m$이고, p와 q는 각각 2초일 때와 3초일 때 끊어진다.



(가)



(나)

4초일 때 B의 속력은? (단, 중력 가속도는 $10m/s^2$이고, 실의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① 4m/s ② 5m/s ③ 6m/s ④ 7m/s ⑤ 8m/s

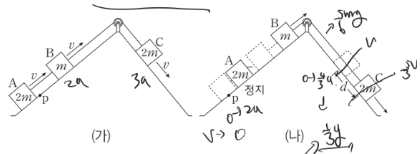
m : 2→10
M+2m : 2→-1.
∴ $3(M+2m)=8m$, $3M=2m$, $M=\frac{2}{3}m$

∴ 3+5=8

예제 4 ① // [아이디어] 실끊기

<2020 4월 #20> 정답률 35.1%

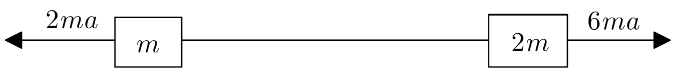
그림 (가)와 같이 질량이 각각 $2m$, m, $2m$인 물체 A, B, C가 실로 연결된 채 각각 빗면에서 일정한 속력 v로 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 A가 점 p에 도달하는 순간, A와 B를 연결하고 있던 실이 끊어져 A, B, C가 각각 등가속도 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 실이 B에 작용하는 힘의 크기는 $\frac{5}{6}mg$이고, 실이 끊어진 순간부터 A가 최고점에 도달할 때까지 C는 d만큼 이동한다.



d는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 실의 질량과 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\frac{8v^2}{3g}$ ② $\frac{10v^2}{3g}$ ③ $\frac{4v^2}{g}$ ④ $\frac{14v^2}{3g}$ ⑤ $\frac{16v^2}{3g}$

(가)에서 왼쪽은 A,B $3m$, 오른쪽은 C $2m$가 평행을 이룬다.
따라서 왼쪽 면과 오른쪽 면의 가속도 비는 $2:3$이다. 각 $2a$,$3a$라 하자.
(나)에서 B-C 선의 장력이 $\frac{5}{6}mg$임을 이용하여 식을 작성하여 보면,

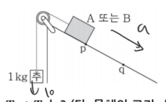


따라서 장력은 $\frac{5}{6}mg=\frac{2m\times 2ma+m\times 6ma}{3m}$이므로 $\frac{10}{3}ma=\frac{5}{6}mg$, $a=\frac{1}{4}g$
A : B+C 질량비는 2:3이고, 실이 끊어지며 A는 가속도가 0 -> $2a$가 되었다.
따라서 B,C는 가속도가 $\frac{4}{3}a=\frac{1}{3}g$이다.
A는 최고점이므로 속력이 v->0이고, 가속도는 B,C가 A의 3분의 2배이므로
d를 지난 시점의 속력은 $\frac{5}{3}v$이다. $\therefore 2\frac{1}{3}g\,d=(\frac{5}{3}v)^2-v^2$, $d=\frac{8v^2}{3g}$

예제 5 ⑤ // [아이디어] 힘 내분을 통한 장력 비교

<2022 10월 #13> 정답률 23.3%
- 오답률 1위

그림과 같이 물체 A 또는 B와 추를 실로 연결하고 물체를 빗면의 점 p에 가만히 놓았더니, 물체가 등가속도 직선 운동하여 점 q를 통과하였다. 추의 질량은 1kg이다. 표는 물체의 질량, 물체가 p에서 q까지 운동하는 데 걸린 시간과 실이 물체에 작용한 힘의 크기 T를 나타낸 것이다.



물체	질량	걸린 시간	T
A	3kg	4초	T_A
B	9kg	2초	T_B

$T_A : T_B$는? (단, 물체의 크기, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① 1 : 4 ② 2 : 3 ③ 3 : 4 ④ 4 : 5 ⑤ 5 : 6

같은 거리 pq를 A에서가 B 시간의 2배이므로 가속도 비는 $A:B=1:4$이다.
pq 빗면의 가속도를 a라 하면 A, B 상황의 이동 방향이 같으므로
$\frac{3a-10}{4}=4\times\frac{9a-10}{10}$, $a=\frac{30}{7}$이다. 이제 A, B 상황의 장력을 비교하자.

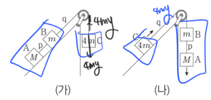
힘 내분 공식을 이용하면,

$T_A=\frac{\frac{90}{7}+30}{4}=\frac{75}{7}$, $T_B=\frac{\frac{270}{7}+90}{10}=\frac{90}{7}$이므로 $T_A:T_B=5:6$이다.

예제 6 ② // [아이디어] 물체 위치만 교환시 장력은 유지된다

<2023 9월 #14> 정답률 33.4%

그림 (가)는 질량이 각각 M, m, $4m$인 물체 A, B, C가 빗면과 나란한 실 p, q로 연결되어 정지해 있는 것을, (나)는 (가)에서 물체의 위치를 바꾸었더니 물체가 등가속도 운동하는 것을 나타낸 것이다. (가)에서 p가 B를 당기는 힘의 크기는 $\frac{10}{3}mg$이다.



(나)에서 q가 C를 당기는 힘의 크기는? (단, 중력 가속도는 g이고, 실의 질량 및 모든 마찰은 무시한다.)

① $\frac{13}{3}mg$ ② $4mg$ ③ $\frac{11}{3}mg$ ④ $\frac{10}{3}mg$ ⑤ $3mg$

(가)에서 C 정지 → q 장력 $4mg$
(나): (가)에서 AB / C 위치만 바꿈
∴ (나) q 장력 = (가) q 장력 = $4mg$

(가)에서 C는 $4m$의 물체로 정지해 있다. 즉 알짜힘이 0이다.
따라서 q의 장력은 C의 중력인 $4mg$와 크기가 같다.

우리는 앞서 19p. 에서 같은 상황에서 물체가 매달린 위치만 교환된다면 장력의 세기가 변하지 않음을 확인했다!

따라서 (나)에서의 q의 장력은 (가)에서와 같은 $4mg$이다.

III. 운동량 보존 법칙

- 운동량 vs 에너지

운동량은 힘을 시간에 대해 적분한 것이고, 에너지는 힘을 거리에 대해 적분한 것이다.
그래프에서는 $F-t$ 그래프의 면적이 Δ운동량, 충격량이고 $F-s$ 그래프의 면적은 Δ에너지, 일이다.
따라서 힘을 받는 조건이 시간과 관련되어 있으면 단위를 운동량으로,
변위(거리)와 관련되어 있으면 단위를 에너지로 문제를 해결할 수 있다.

문제 하나를 같이 살펴보자.

(가)

(나)

질량이 같은 물체 A,B가 구간 P를 지날 동안 일정한 크기의 힘을 같은 방향으로 받을 때 v_B를 v로 나타내어라.

(가),(나)에서 같은 구간을 지나기 때문에 받는 힘, 변위가 같으므로 에너지의 변화량이 같음을 알 수 있고,
질량이 A,B가 같으므로 질량을 m이라 하면 구간 P에서 받는 일은 $3mv^2$일 것이다.
$\therefore v_B^2 = 9v^2 + 3v^2 = 12v^2$, $v_B = 2\sqrt{3}\,v$

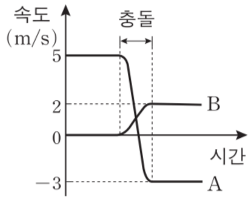
이처럼 힘을 받을 때 거리 조건이 추가로 붙으면 에너지로 해결하는 것이 좋다.

추가로 운동량을 다룰 때에는 웬만하면 $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$보다 $m_1\Delta v_1 = m_2\Delta v_2$로 적자.
실끊기 유형에서 봤던 $m_1\Delta a_1 = m_2\Delta a_2$ 식과 유도 과정, 원리 등이 동일하고,
이 때 사용했던 것처럼 **충돌시 속력 변화량이 질량에 반비례**한다고 보면 눈으로 풀리는 문제가 많아질 것이다.

정말 간단한 예제로 확인해보자.

예제 1

그림은 수평면에서 충돌하는 물체 A, B의 속도를 시간에 따라 나타낸 것이다. A의 운동 방향은 B와 충돌하기 전과 후가 서로 반대이다. A의 질량은 2kg이다.
B의 질량은? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)



① 2kg ② 4kg ③ 6kg ④ 8kg ⑤ 10kg

- 상대속도와 완전탄성충돌

운동량, 운동에너지 파트에서 충돌 문제의 절반은 [시간에 따른 두 물체 사이의 거리] 그래프를 준다.
즉, 충돌 전후의 상대속도를 그래프를 통해서 제공하는 것이다.
운동량 보존 법칙과 상대속도를 연립해서 해결할 수도 있지만 질량이 주어진 경우 꽤 쓸만한 공식이 있다.

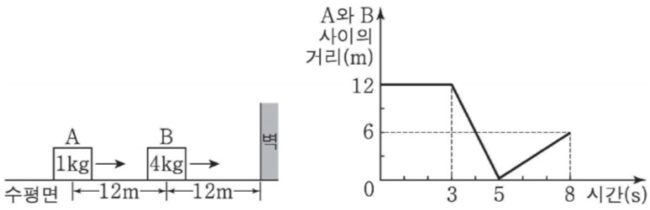
$$|v_{AB}|+|v'_{AB}|=|\Delta v_A|+|\Delta v_B|$$

|충돌 전 상속| + |충돌 후 상속| = |A 속도 변화량| + |B 속도 변화량|이다.

A와 B가 충돌한다고 하면 충돌 전엔 A가 빠르고 충돌 후에는 B가 빠르다. 충돌시 A 속도는 감소, B는 증가
이 상황을 보면 절댓값을 소거할 수 있고, 양쪽 식이 같음을 유도할 수 있다.

유도 과정에서도 알 수 있듯, 상대속도 조건을 변형한 식이다. 따라서 이 조건에 운동량 보존을 연립하면 된다.
저 공식의 $\Delta v_A, \Delta v_B$이 운동량 보존에 따라서 질량에 반비례 하기 때문에 속도 변화량을 바로 파악할 수 있다.

문제로 같이 살펴보자.



(가) (나)

0~3초까지 A,B가 같은 속도로 등속 운동할 때, 충돌한 후 A의 속력을 구해보자.

3초에는 벽과 B, 5초에는 A,B가 충돌할 것이다. A,B 충돌에서 공식을 적용하면 $6+2=|\Delta v_A|+|\Delta v_B|$이고,

속력 변화량은 질량에 반비례하므로 $|\Delta v_A|:|\Delta v_B|=4:1$, $\because |\Delta v_A|=\frac{32}{5}m/s$

B는 초속도로 3초 운동 후에 벽과 충돌했으므로 초속도가 $4m/s$이다.

A는 오른쪽으로 이동하다가 충돌로 인한 힘을 왼쪽으로 받았으므로 속도는 $5-\frac{32}{5}=-\frac{12}{5}$, $\therefore$ 속력은 $\frac{12}{5}m/s$

어려운 문제는 대부분 질량을 알려주지 않기 때문에 이 식만의 장점을 활용하긴 어렵지만
쉬운 문제를 풀 때 눈풀이가 가능하게 해줘서 시간을 절약하는 데에는 꽤 도움이 된다.

공간이 애매해서 예제는 넣지 않았지만 다른 예제들에 사용될 수 있고, 해설에도 이를 이용해 풀이했으니
적용해보고, 또 해설지를 읽어서 익히는 것을 추천한다.

충돌 전후의 상대속도에 대한 상황 중에 특수한 경우가 하나 있다.

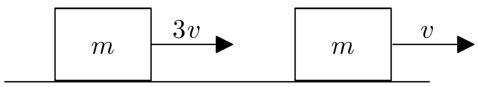
$|v_{AB}| = |v'_{AB}|$, 충돌 전후의 상대속도의 크기가 같은 것이다. 방향은 반대이지만 부호는 크게 중요하지 않다.
이 상황은 '완전탄성충돌'이라고 불리고, 가장 큰 특이점은 **충돌 전후의 운동에너지가 보존됨**에 있다.

유도는 $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$, $v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1$을 연립한다.
$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$ / $v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$의 형태로 변형 후 양변끼리 곱하고, 양변을 2로 나누면
$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$으로 충돌 전후의 에너지가 보존됨을 알 수 있다.

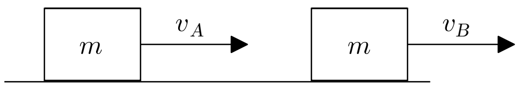
따라서 이 3개를 하나로 묶고 가면 편하다.

완전탄성충돌 = 상대속력 유지 = 운동에너지 보존

또 하나의 특이한 경우는 충돌하는 두 물체의 질량이 같을 때로, 이 경우 **충돌시 두 물체의 속도가 교환된다.**
무슨 말인지 예시 상황으로 같이 보자.



(가)



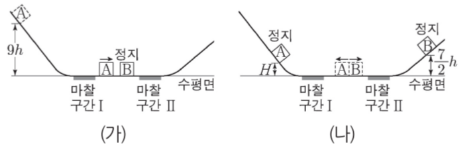
(나)

(가)에서 질량이 같은 두 물체가 각 $3v, v$의 속력으로 같은 방향으로 이동하다가 충돌하였다.
충돌 과정에서의 에너지 손실이 발생하지 않았을 때 (나)의 v_A, v_B를 v로 나타내어라.

충돌 전후 에너지 손실이 없었다는건 완전탄성충돌이기에 충돌 후의 상대속도도 $2v$이다.
질량이 주어져 있으므로 24p.의 공식을 사용하면 $2v + 2v = |\Delta v_A| + |\Delta v_B|$이고, 질량 같으므로 각 $2v$이다.
따라서 $3v \to v$, $v \to 3v$가 되므로 $v_A = v, v_B = 3v$로 속도가 교환됨을 알 수 있다.
에너지 관련 개념이라 주로 에너지 파트에 많이 나오므로 그때 적용하면 된다. 형식상 예제는 넣어두겠다.

예제 2

그림 (가)와 같이 질량이 m인 물체 A를 높이 $9h$인 지점에 가만히 놓았더니 A가 마찰 구간 Ⅰ을 지나 수평면에 정지한 질량이 $2m$인 물체 B와 충돌한다. 그림 (나)는 A와 B가 충돌한 후, A는 다시 Ⅰ을 지나 높이 H인 지점에서 정지하고, B는 마찰 구간 Ⅱ를 지나 높이 $\frac{7}{2}h$인 지점에서 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. A가 Ⅰ을 한 번 지날 때 손실되는 역학적 에너지는 B가 Ⅱ를 지날 때 손실되는 역학적 에너지와 같고, 충돌에 의해 손실되는 역학적 에너지는 없다.



(가) (나)

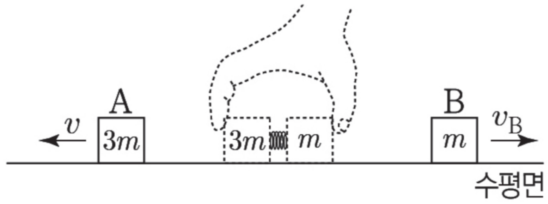
H는? (단, 물체는 동일 연직면상에서 운동하고, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

① $\frac{5}{17}h$ ② $\frac{7}{17}h$ ③ $\frac{9}{17}h$ ④ $\frac{11}{17}h$ ⑤ $\frac{13}{17}h$

- 용수철 매개 운동

용수철 매개 운동에는 '압축된 용수철 풀기', '용수철 매개 충돌' 두가지가 있다.

압축된 용수철 풀기의 대표적인 유형을 보자.



이 상황에서 우리가 알아야 할 것은 **용수철이 양쪽에 가하는 충격량의 크기는 같다**는 것이다. 이유를 살펴보면

용수철에는 2가지 특징이 있다. - 자연상태로 돌아가려는 탄성력이 작용 / 탄성력의 크기는 양끝에서 항상 같음
즉, 계속해서 같은 힘으로 두 물체를 밀어내다가 한쪽에서 물체가 용수철과 분리되어서 힘을 주지 못하는 순간 반대쪽에서도 힘을 줄 수 없게 된다. 따라서 양쪽에 같은 힘을 같은 시간동안 주기에 두 물체의 운동량은 같다.
이 내용을 알고 있다면 $3mv = mv_B$, $v_B = 3v$임을 구할 수 있다.

다음은 용수철 매개 충돌의 상황을 보자. 용수철 매개 충돌은 두 물체가 용수철을 사이에 끼고 충돌하는 것이다.
이제까지 평가원 시험에는 나온적이 없고, 2022 7월 학평 18번으로 딱 한번 등장했다. (내신에는 자주 나온다)
출제 빈도와 가능성은 0에 수렴하지만 추론 가능한 영역이기에 언제든 나올 수 있다.
용수철 매개 충돌 상황에서 알아야 할 것은 두 가지가 있다.

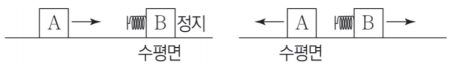
1. 용수철 매개 충돌은 탄성충돌이다. (에너지 손실 X) 2. 용수철이 최대로 압축했을 때 두 물체의 속도는 같다.

1번은 에너지가 운동에너지 -> 탄성퍼텐셜에너지 -> 운동에너지로 변환되기에 역학적 에너지가 유지될 수 있고,
그에 따라서 운동 상황을 한 물체를 기준으로 하는 상대운동으로 본다면, 역학적 에너지가 보존되기에
두 물체의 운동에너지가 0, 즉 상대속도가 0인 순간 탄성퍼텐셜 에너지가 최대임을 알 수 있다.

그럼 이제 용수철 매개 충돌이 등장했던 유일한 문제를 풀어보자. (아쉽게도 에너지 보존 조건은 주어진다.)

예제 3

그림 (가)와 같이 물체 A가 수평면에서 용수철이 달린 정지해 있는 물체 B를 향해 등속 직선 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 A와 B가 충돌하고 분리된 후 B가 수평면에서 등속 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 B의 속력은 (가)에서 A의 속력의 $\frac{2}{3}$배이고, 질량은 B가 A의 2배이다.



(가) (나)

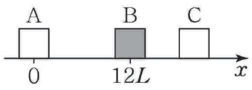
용수철이 압축되는 동안 용수철에 저장되는 탄성 퍼텐셜 에너지의 최댓값을 E_1, (나)에서 B의 운동 에너지를 E_2라 할 때 $\frac{E_1}{E_2}$는? (단, 충돌 과정에서 역학적 에너지 손실은 없고, 용수철의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

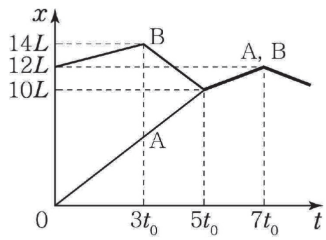
- t-s 그래프 파훼법

운동량 보존 법칙의 유구한 킬러, t-s 그래프를 상대해보자.
문제의 형태는 주로 2~3개의 물체가 한 직선상에서 충돌하고, 그 상황에서의 시간에 따른 위치 / 물체간의 거리를 그래프로 준다. 경우에 따라 질량/속력/운동량 조건이 주어지나 상대하는 방법에는 큰 차이가 없다.

예제를 살펴보자. 놀랍게도 정답률이 49%이다 ㅅㅂ (물리를 선택하면 안되는 이유 ㅋㅋ)



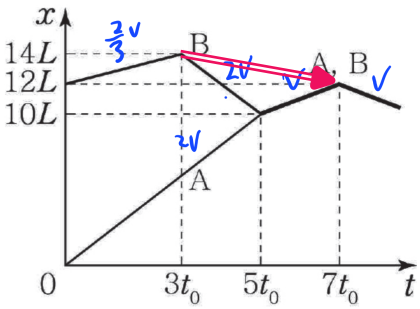
(가)



(나)

(나)는 (가)에서 물체 A,B,C의 마찰력이 없는 평면에서의 위치 x를 시간 t에 대해 나타낸 그래프이고,
A,B,C의 운동량의 합이 항상 0일 때, B,C의 질량 m_B, m_C에 대하여 $\dfrac{m_C}{m_B}$의 값을 구하여라.

우선 이런 문제가 주어지면 문제조건 -> 그래프 -> 운동상황 파악 -> 그래프 분석 순으로 보자.
사전적으로 고려해야 할 조건이 없기에 그래프를 보자. $3t_0$에 B,C / $5t_0$에 A,B / $7t_0$에 A+B,C가 충돌한다.
C는 충돌 전후 상황 파악이 어렵기에 운동량 총합 0 조건으로 마지막에 처리하고, A,B 충돌을 보자.
$\dfrac{L}{t_0} = v$라 하고 그래프에 표시를 하면 아래와 같이 적을 수 있다.



$5t_0$에서 $\Delta B = 3v$, $\Delta A = v$이므로 질량비는 A:B=3:1임을 알 수 있다.
총 운동량 합이 0이므로 $5t_0$ 충돌 직후 A,B 운동량 합은 $4mv$이고,
따라서 C의 운동량의 크기도 $4mv$일 것이다.

또한 이 문제에서의 키 아이디어는 빨간 화살표에 담겨 있다.
B는 꺾이는 지점 $3t_0$의 $14L$, $7t_0$의 $12L$ 에서 C와 충돌했다.
즉, C도 같은 지점을 등속운동했고, 그 자취가 화살표임을 알 수 있다.

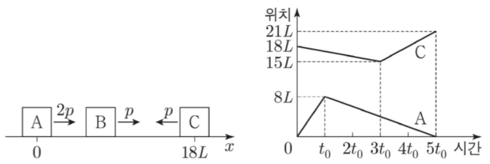
빨간 화살표의 기울기는 $\dfrac{v}{2}$이고, C의 운동량의 크기는 $4mv$이므로 질량은 $8m$, $\therefore \dfrac{m_C}{m_B} = \dfrac{8m}{m} = 8$

이렇게 t-s 그래프의 기울기가 속도인 것과 $m_1 \Delta v_1 = m_2 \Delta v_2$을 이용해 **빠르게 질량 먼저 구해내는게 첫번째**고,
그 다음부터는 문제마다 각자의 **유니크**한 조건이 주어질 것이다. 이런 것까지 유형화 할 수는 없기 때문에..
다만 굳이 분류를 하자면 속도에 대한 조건은 주로 질량을 구하기 전에 사용하는 것이 좋고
나머지 조건 (운동량 or 위치 조건)은 질량부터 처리하는게 더더욱 중요하다!

이제 t-s 그래프의 운동량 킬러들을 해치우자.

예제 4

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 운동량의 크기가 각각 $2p$, p, p인 물체 A, B, C가 각각 $+x$, $+x$, $-x$방향으로 동일 직선상에서 등속도 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 A와 C의 위치를 시간에 따라 나타낸 것이다. B와 C의 질량은 같다.



(가) (나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

보기

ㄱ. 질량은 C가 A의 4배이다.

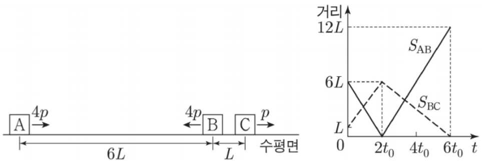
ㄴ. $2t_0$일 때, B의 운동량의 크기는 $\frac{7}{2}p$이다.

ㄷ. $4t_0$일 때, 속력은 C가 B의 5배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 6

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 물체 A, B, C가 등속도 운동을 한다. A, B, C의 운동량의 크기는 각각 $4p$, $4p$, p이다. 그림 (나)는 A와 B 사이의 거리(S_{AB}), B와 C 사이의 거리(S_{BC})를 시간 t에 따라 나타낸 것이다.



(가) (나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B, C는 동일 직선상에서 운동하고, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

보기

ㄱ. $t=t_0$일 때, 속력은 A와 B가 같다.

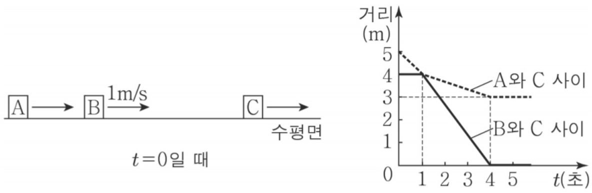
ㄴ. B와 C의 질량은 같다.

ㄷ. $t=4t_0$일 때, B의 운동량의 크기는 $4p$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 5

그림 (가)는 수평면에서 물체 A, B, C가 등속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다. B의 속력은 1m/s이다. 그림 (나)는 A와 C 사이의 거리, B와 C 사이의 거리를 시간 t에 따라 나타낸 것이다. A, B, C는 동일 직선상에서 운동한다.



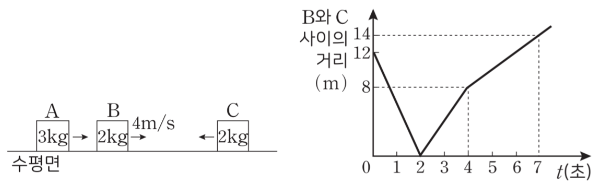
(가) (나)

A, C의 질량을 각각 m_A, m_C라 할 때, $\frac{m_C}{m_A}$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

예제 7

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 물체 A, B, C가 등속도 운동을 한다. A와 C는 같은 속력으로 B를 향해 운동하고, B의 속력은 4m/s이다. A, B, C의 질량은 각각 3kg, 2kg, 2kg이다. 그림 (나)는 (가)에서 B와 C 사이의 거리를 시간 t에 따라 나타낸 것이다. A, B, C는 동일 직선상에서 운동한다.



(가) (나)

$t=0$에서 $t=7$초까지 A가 이동한 거리는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

① 10m ② 11m ③ 12m ④ 13m ⑤ 14m

III. 운동량 보존 법칙

- 예제 1~7 해설 + 손풀이

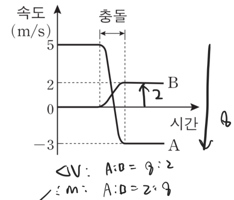
<빠른 정답>
4 2 4
3 1 4 1

예제 1 ④

충돌시 속력변화량은 질량에 반비례하므로
질량비 A:B=1:4, ∴ B 질량 8kg

<2021 3월 #10> 정답률 70% 이상

그림은 수평면에서 충돌하는 물체 A, B의 속도를 시간에 따라 나타낸 것이다. A의 운동 방향은 B와 충돌하기 전과 후가 서로 반대이다. A의 질량은 2kg이다. B의 질량은? (단, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)



ΔV: A:B = 8:2
$\therefore m$: A:B = 2:8

① 2kg ② 4kg ③ 6kg ④ 8kg ⑤ 10kg

예제 2 ② // [아이디어] 상대속도, 질량 주어졌으므로 공식 사용

질량은 A m, B $2m$으로 1:2이고 충돌시 에너지 손실이 없으므로
충돌 전후의 상대속도가 같다. 충돌 직전 A의 속력을 v'라 하면
$v'+v'=|\Delta v_A|+|\Delta v_B|$이고, 질량 비에 따라 $|\Delta v_A|:|\Delta v_B|=2:1$,

$\therefore |\Delta v_A|=\dfrac{4}{3}v', |\Delta v_B|=\dfrac{2}{3}v'$이므로 충돌 직후 각 $\dfrac{v'}{3}, \dfrac{2}{3}v'$로 운동한다.

A의 구간 I 손실 에너지 = B의 구간 II 손실 에너지 = E라 하고,

$mgh=U, \dfrac{1}{2}mv'^2=K$라 하면 A 충돌전 / A 충돌후 / B 충돌후 상황을

$$\begin{cases} 9U-E=K \\ \dfrac{K}{9}-E=mgH \\ \dfrac{8}{9}K-E=7U \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다. 연립 후 U에 대하여 정리해보면

$\dfrac{K}{9}=\dfrac{16}{17}U$, $E=\dfrac{9}{17}U$이므로 $H=\dfrac{7}{17}h$ (계산과정은 손풀이 참고)

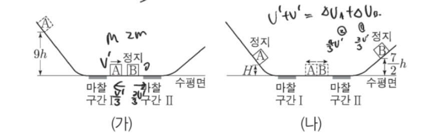
<2024 수능 #20> 정답률 25.8%

- 오답률 1위

그림 (가)와 같이 질량이 m인 물체 A를 높이 $9h$인 지점에 가만히 놓았더니 A가 마찰 구간 Ⅰ을 지나 수평면에 정지한 질량이 $2m$인 물체 B와 충돌한다. 그림 (나)는 A와 B가 충돌한 후, A는 다시 Ⅰ을 지나 높이 H인 지점에서 정지하고, B는 마찰 구간 Ⅱ를 지나 높이 $\frac{7}{2}h$인 지점에서 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. A가 Ⅰ을 한 번 지날 때 손실되는 역학적 에너지는 B가 Ⅱ를 지날 때 손실되는 역학적 에너지와 같고, 충돌에 의해 손실되는 역학적 에너지는 없다.

E

$v'+v'=\Delta v_A+\Delta v_B$



H는? (단, 물체는 동일 연직면상에서 운동하고, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

① $\frac{5}{17}h$ ② $\frac{7}{17}h$ ③ $\frac{9}{17}h$ ④ $\frac{11}{17}h$ ⑤ $\frac{13}{17}h$

$9U-E=k$, $\frac{k}{9}-E=H$, $\frac{8}{9}k-E=7U$

$\frac{8}{9}k-7U=9U-k$,
$\frac{17}{9}k=16U$, $\frac{k}{9}=\frac{16}{17}U$
$\frac{128}{17}U-E=\frac{119}{17}U$,
$\therefore E=\frac{9}{17}U$
$\therefore \frac{16}{17}U-\frac{9}{17}U=H=\frac{7}{17}U$

예제 3 ④ // [아이디어] 총 E 보존 -> 탄성 퍼텐셜 최대이려면..

(가)에서 A의 질량을 m, 속력을 $3v$라 하면 총 에너지는 $\dfrac{9}{2}mv^2$이다.

상대운동의 관점에서 보면 두 물체의 운동에너지가 0일때
탄성 퍼텐셜에너지가 최대이다. 따라서 E_1 상황에서 A,B 속도는 같다.

속도변화량이 2:1이므로 둘 다 v로 운동하고, 운동E 총합은 $\dfrac{m+2m}{2}v^2$,

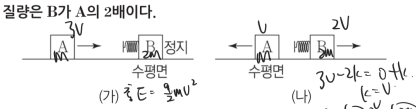
용수철 매개 충돌이므로 총 E가 보존된다. 탄성E+운동E 총합이 일정하다.

따라서 $E_1=\dfrac{9mv^2}{2}-\dfrac{3mv^2}{2}=3mv^2$, (나)에서 속력은 각 $v, 2v$이므로

$E_2=\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}2m(2v)^2=4mv^2$, $\therefore \dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{4}{3}$

<2022 7월 #18> 정답률 32.9%

그림 (가)와 같이 물체 A가 수평면에서 용수철이 달린 정지해 있는 물체 B를 향해 등속 직선 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 A와 B가 충돌하고 분리된 후 B가 수평면에서 등속 직선 운동하는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 B의 속력은 (가)에서 A의 속력의 $\frac{2}{3}$배이고, 질량은 B가 A의 2배이다.



$3V-2k=0+k$
$k=V$
$\therefore$ (m)→V (2m)→V

용수철이 압축되는 동안 용수철에 저장되는 탄성 퍼텐셜 에너지의 최댓값을 E_1, (나)에서 B의 운동 에너지를 E_2라 할 때 $\frac{E_1}{E_2}$는? (단, 충돌 과정에서 역학적 에너지 손실은 없고, 용수철의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

$\frac{3mV^2}{2}$
$\therefore E_1=3mV^2$
$E_2=4mV^2$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{E_1}{E_2}=\frac{3}{4}$

예제 4 ③ // [아이디어] 모든 물체의 운동량 합은 항상 일정하다

$v=\frac{L}{t_0}$라 하면 0~t_0까지 A는 $8v$, C는 v의 속력으로 이동하고,
운동량의 비는 A:C=2:1이므로 질량은 A:B=1:4이다.
B,C는 질량이 같고 운동량도 같으므로 B는 v이다.

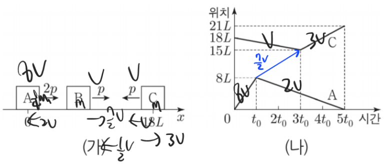
ㄱ. B의 질량을 m라 하면 A,B,C : $\frac{1}{4}m, m, m$이므로 C는 A의 4배 (O)

ㄴ. A,B,C의 운동량 합은 $4p(=4mv)$로 일정하다.
$2t_0$에서 A는 $2v$ 왼쪽, C는 v로 오른쪽으로 움직이므로 운동량은
A $-\frac{mv}{2}$, B mv이다. 따라서 총합 $4mv$이려면 C : $\frac{7mv}{2}=\frac{7}{2}p$ (O)

ㄷ. B,C는 질량이 같으므로 속도 변화량이 같다.
C가 $4v$ 변화했으므로 B는 $\frac{7}{2}v$에서 반대로 $4v$가 되어 $\frac{1}{2}v$가 된다.
C는 속력이 $3v$이므로 C는 B의 6배이다. (X)

<2023 9월 #13> 정답률 44.6%

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 운동량의 크기가 각각 $2p$, p, p인 물체 A, B, C가 각각 $+x$, $+x$, $-x$방향으로 동일 직선상에서 등속도 운동한다. 그림 (나)는 (가)에서 A와 C의 위치를 시간에 따라 나타낸 것이다. B와 C의 질량은 같다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. 질량은 C가 A의 4배이다.
ㄴ. $2t_0$일 때, B의 운동량의 크기는 $\frac{7}{2}p$이다.
ㄷ. $4t_0$일 때, 속력은 C가 B의 5배이다.

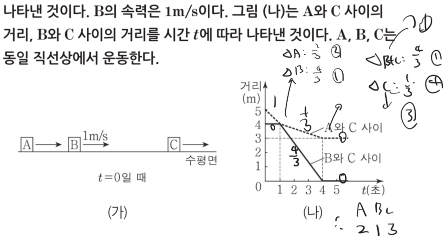
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 5 ① // [아이디어] $m_1\Delta v_1=m_2\Delta v_2$

0~1초까지 BC가 일정하므로 1초에 A,B / 4초에 B,C가 충돌함을 알 수 있다.
1초에는 AC 상대속도는 -1 -> $-\frac{1}{3}$, BC 상대속도는 0 -> $\frac{4}{3}$로 변했다.
C의 속력은 변하지 않으므로 변화량은 A,B의 속도 변화에 의한 것이므로
$\Delta A:\Delta B=1:2$, 질량비는 A:B=2:1임을 알 수 있다.
3초에서는 BC가 $\frac{4}{3}$ -> 0, AC가 $-\frac{1}{3}$ -> 0이 되었고, B,C 속력이 바뀌었다.
BC 변화량은 $\Delta B+\Delta C$, AC 변화량은 ΔC이므로 $\Delta B+\Delta C:\Delta C=4:1$
$\Delta B:\Delta C=3:1$이므로 질량비 B:C=1:3, $\therefore m_A:m_B:m_C=2:1:3$, $\frac{m_C}{m_A}=\frac{3}{2}$

<2023 4월 #13> 정답률 34.8%

그림 (가)는 수평면에서 물체 A, B, C가 등속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다. B의 속력은 1m/s이다. 그림 (나)는 A와 C 사이의 거리, B와 C 사이의 거리를 시간 t에 따라 나타낸 것이다. A, B, C는 동일 직선상에서 운동한다.



A, C의 질량을 각각 m_A, m_C라 할 때, $\frac{m_C}{m_A}$는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

예제 6 ④ // [아이디어] 상대속도가 변할 때 어떤 속도가 요인인지 파악

$2t_0$에 A,B가 충돌한다. $v=\frac{L}{t_0}$라고 하면
AB 상대속도는 $-3v\rightarrow 3v$, BC 상대속도는 $2.5v\rightarrow -1.5v$가 된다.
따라서 $\Delta A+\Delta B:\Delta B=3:2$, $\Delta A:\Delta B=1:2$이므로 질량비는 A:B=2:1
초기 상태에서 A,B의 운동량의 크기는 같고, 상대속도는 $3v$이므로
A v, B $2v$로 운동했고, BC 상대속도에 의해 C는 $0.5v$로 운동했다.

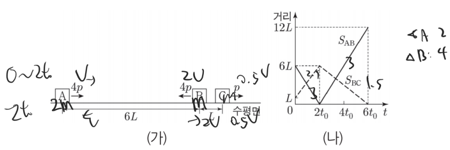
ㄱ. $t=t_0$일 때 A는 v, B는 $2v$로 운동했다. (X)

ㄴ. 초기상태에 C는 $0.5v$인데 운동량이 p였고, B는 $2v$에 $4p$였다.
따라서 B,C의 질량은 같다. (O)

ㄷ. B는 왼쪽으로 $2v$로 운동하고 있었지만 충돌로 $4v$의 속력이 가해졌다.
따라서 오른쪽으로 $2v$로 운동한다. 속력, 질량이 처음과 같으므로
초기상태의 운동량인 $4p$와 크기가 같다. (O)

<2024 6월 #19> 정답률 27.4%
- 오답률 1위

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 물체 A, B, C가 등속도 운동을 한다. A, B, C의 운동량의 크기는 각각 $4p$, $4p$, p이다. 그림 (나)는 A와 B 사이의 거리(S_{AB}), B와 C 사이의 거리(S_{BC})를 시간 t에 따라 나타낸 것이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B, C는 동일 직선상에서 운동하고, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. $t=t_0$일 때, 속력은 A와 B가 같다.
ㄴ. B와 C의 질량은 같다.
ㄷ. $t=4t_0$일 때, B의 운동량의 크기는 $4p$이다.

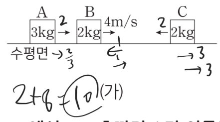
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 7 ① // [아이디어] 모든 물체의 운동량 합은 항상 일정하다

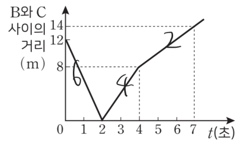
BC의 초기 상대속도는 -6이므로 C은 왼쪽으로 $2m/s$로 다가온다.
2~4초의 상대속도는 4이므로 $6+4=|\Delta v_B|+|\Delta v_C|$,
B,C의 질량은 같으므로 $|\Delta v_A|=|\Delta v_B|=5m/s$
따라서 2~4초 B는 왼쪽으로 $1m/s$, C는 오른쪽으로 $3m/s$로 움직인다.
4초 이후 상대속도는 3인데 C는 변하지 않으므로 B가 $1m/s$가 된다.
A,B에 대해 $3\times\Delta v_A=2\times2$, $\Delta v_A=\dfrac{4}{3}$
초기상태에서 A는 오른쪽으로 $2m/s$로 이동하다가 (문제 조건)
왼쪽으로 $\dfrac{4}{3}$만큼 변화하여 4초 이후로는 오른쪽으로 $\dfrac{2}{3}m/s$로 이동한다.
$\therefore$ 0~4초 : $2\times4=8$, 4~7초 : $\dfrac{2}{3}\times3=2$, $2+8=10(m)$

<2022 6월 #17> 정답률 31.4%

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 물체 A, B, C가 등속도 운동을 한다. A와 C는 같은 속력으로 B를 향해 운동하고, B의 속력은 4m/s이다. A, B, C의 질량은 각각 3kg, 2kg, 2kg이다. 그림 (나)는 (가)에서 B와 C 사이의 거리를 시간 t에 따라 나타낸 것이다. A, B, C는 동일 직선상에서 운동한다.



2+8=10 (가)



(나)

$t=0$에서 $t=7$초까지 A가 이동한 거리는? (단, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

① 10m ② 11m ③ 12m ④ 13m ⑤ 14m

물리학 칼럼 물질파

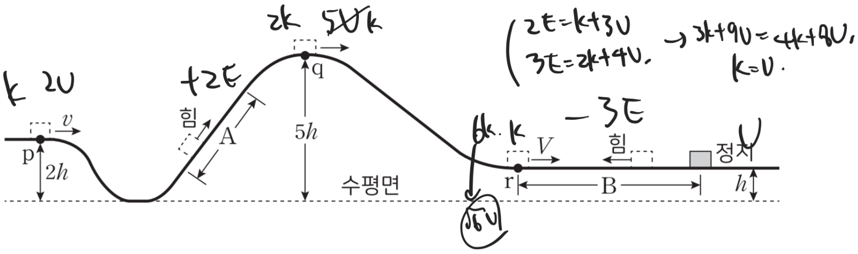
IV. 역학적 에너지 보존

- 에너지의 표시

에너지 파트는 상황이 복잡하고 시간을 많이 잡아먹기 때문에 미지수가 많고 변수가 복잡하면 계산이 말린다. 따라서 변수를 단순화하고, 시각적으로 파악이 쉽게 그림에 표시하는 것을 익히는 것이 좋다.

에너지는 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2$, 중력퍼텐셜 mgh, 탄성퍼텐셜 $\frac{1}{2}kx^2$, 손실된 에너지, 일 5가지를 다루므로 운동에너지 K, 중력퍼텐셜 U, 탄성퍼텐셜 U_E, 손실된 에너지 E, 일 W로 단순화하면 비율관계 파악이 쉽다. 운동량 보존 법칙 예제 2번 해설에 K, U, E가 사용되었으므로 참고하자.

그림에 표시하는것은 변수단순화와 같이 사용되며 보통 운동E 중력E 순으로 표시하는게 괜찮은 것 같다.



q에서 운동에너지가 p에서의 2배고, A구간과 B구간 받는 힘의 방향은 반대고 에너지 변화량은 2:3일때, V는?

변수단순화 한것을 내가 필기한거처럼 사용하면 된다. q 역학적E -p 역학적E=$2E$, r 역학적E-U=$3E$ 이고,

r지점 역학적E = q지점 역학적 E이므로 $\begin{cases} 2E = (2K+5U)-(K+2U) \\ 3E = (2K+5U)-U \end{cases}$, $\therefore K = U$이다.

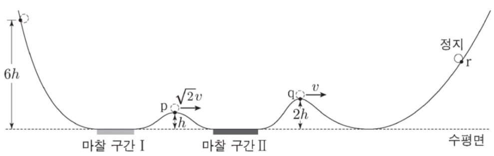
r지점 역학적E는 $7K$인데 중력퍼텐셜에너지가 $U(=K)$만큼이므로 운동에너지는 $6K$이다.

운동에너지의 비는 속력^{2}의 비이기 때문에 $V = \sqrt{6}\,v$임을 구해낼 수 있다.

이제 이를 활용하여 예제를 풀어보자.

예제 1

그림은 높이 $6h$인 점에서 가만히 놓은 물체가 궤도를 따라 운동하여 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 최고점 r에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. 점 p, q의 높이는 각각 h, $2h$이고, p, q에서 물체의 속력은 각각 $\sqrt{2}v$, v이다. 마찰 구간에서 손실된 역학적 에너지는 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 2배이다.

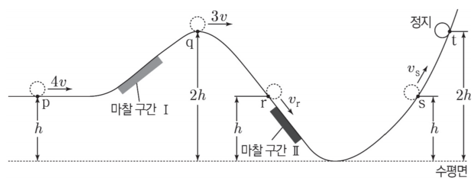


r의 높이는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\frac{19}{5}h$ ② $4h$ ③ $\frac{21}{5}h$ ④ $\frac{22}{5}h$ ⑤ $\frac{23}{5}h$

예제 2

그림은 높이 h인 점 p에서 속력 $4v$로 운동하는 물체가 궤도를 따라 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 높이가 $2h$인 최고점 t에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. 점 q, r, s의 높이는 각각 $2h$, h, h이고, q, r, s에서 물체의 속력은 각각 $3v$, v_r, v_s이다. 마찰 구간에서 손실된 역학적 에너지는 Ⅱ에서가 Ⅰ에서의 3배이다.

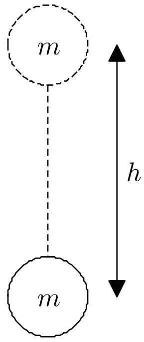


$\frac{v_r}{v_s}$는? (단, 마찰 구간 외의 모든 마찰과 공기 저항, 물체의 크기는 무시한다.) 3점

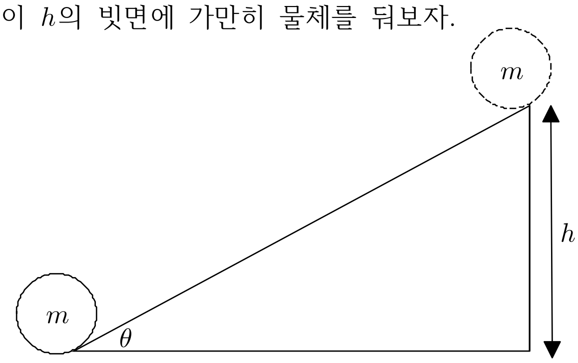
① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

- 빗면에서 중력이 한 일

자유낙하에서 중력이 한 일을 먼저 살펴보자.

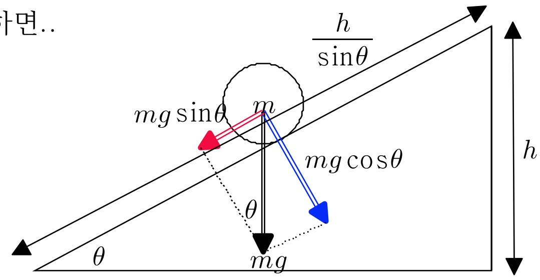


물체에 작용하는 중력은 mg이고, 힘이 작용하는 방향으로 이동했으므로 중력이 물체에 한 일은 mgh이다.
그럼 이번에는 경사도 θ, 높이 h의 빗면에 가만히 물체를 둬보자.



결론부터 말하자면, **이 상황에도 중력이 한 일은 mgh이다.** 왜일까?

일 $W = Fs\cos\theta$ 이다. 여기서 $\cos\theta$가 의미하는 것은 운동 방향의 성분을 분해한 것이다.
벡터는 직각으로 분해할 수 있다. 기하를 한 사람은 쉽게 알 것이다.
이 상황에서 중력 벡터를 분해하면..



이렇게 분해할 수 있다. 물체는 빗면 아래 방향으로 이동하기에 운동 방향으로 작용하는 힘은 $mg\sin\theta$이다.

또한 높이가 h이기에 빗면의 길이는 $\dfrac{h}{\sin\theta}$이다. 따라서 중력이 한 일은 $mg\sin\theta \times \dfrac{h}{\sin\theta} = mgh$이다.

우리가 이를 통해 알 수 있는건 **중력이 한 일은 높이 변화량에만 영향을 받는다는 것이다.**
따라서 빗면에서도 **중력이 한 일 = 중력퍼텐셜에너지 감소량** 으로 봐도 무방하다.

또한 가속도 $g\sin\theta$와 빗면의 길이 $\dfrac{h}{\sin\theta}$의 곱이 일정함을 이용해 같은 높이를 이동했을 때
이동한 빗면 길이는 가속도에 반비례 함을 적극 활용하는 것이 좋다.
만약 가속도 비가 $2:3$인 두 빗면에서 물체가 같은 높이만큼 내려갔다면, 이동한 빗면 길이 비는 $3:2$이다.

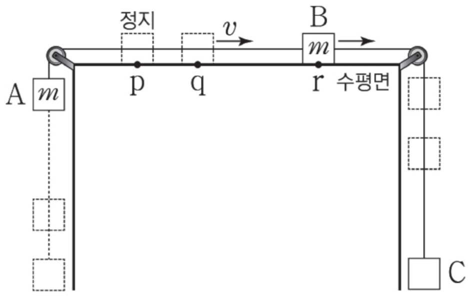
역학적 에너지 문제들이 워낙 개념이 복합적이라 예제는 마지막에 다 넣어두겠다. (40p.)

- 역학적 에너지 변화

물리학 I의 에너지 파트에서 에너지가 손실되는 경우는 크게 2가지이다.

1. 마찰구간에서의 에너지 손실
2. 한 계(system)에서의 상호작용에 의한 에너지 손실

전자는 후술할 [마찰구간에서의 등속운동] 에서 다룰 것이다. 마찰구간의 경우는 주로 전후의 에너지를 직접 구하여 그 차이를 통하여 마찰구간에서 손실된 에너지를 구해내는 형태이다. (자세한 내용은 36p. 참고)
반면 후자의 경우는 힘과 가속도, 이동거리로 그 변화량을 정량적으로 계산해낼 수 있다.
어떤 유형인지 먼저 문제를 보자.



A,B,C가 실로 연결되어 등가속도 운동을 하고 있고 B가 q지점을 속력 v로 지난다. B가 p에서 q까지 이동하는 동안 A의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량은 A의 운동 에너지의 증가량의 4배이다. B의 운동 에너지는 r에서가 q에서의 3배이다. A,B의 질량은 각각 m이고 q와 r의 거리는 L이다. B가 r을 지날 때 C의 운동 에너지는?

우선 이 문제의 핵심은 A의 조건을 얼마나 정확하고 신속히 분석하는지에 달렸다.
그러기 위해서는 운동에너지에 관한 정리를 하나 알아야 한다.

일-운동에너지 정리 : $mas = \Delta E_k$, **알짜힘이 한 일은 운동에너지의 변화량과 같다.**

일정한 힘 F를 받는 길이 s인 구간이 있고, 그 구간을 지나는 질량 m인 물체의 가속도가 a라고 하자.

등가속도 운동이므로 $2as = \Delta v^2$, 양변에 $\frac{1}{2}m$을 곱하면 $mas = Fs = \frac{1}{2}m\Delta v^2$, $\therefore W = \Delta E_k$

서로 다른 힘 $F_1, F_2, \ldots$이 작용하는 구간의 길이가 각 $s_1, s_{2,\ldots}$라고 하면 $\sum W_i = \sum \Delta (E_{k_i}) = \sum \Delta E_k$

따라서 알짜힘에 의한 일의 총합은 운동에너지 변화량과 같다.

W를 Fs로 보는 것 보다, 'mas'로 바로 보는 것이 매우 직관적인 해석을 가능하게 해준다.
그리고 또한 우리는 34p.에서 중력 퍼텐셜 에너지가 mgh임에 대한 이야기를 했었다.
따라서 **중력 퍼텐셜 에너지 변화량은** $mg\Delta h$가 될 것이다.

다시 돌아오면, "A의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량은 A의 운동 에너지의 증가량의 4배이다"라는 것은
A의 질량이 m이므로 $mg\Delta h = 4 \times mas$로 나타낼 수 있다. 또한 같은 상황에 대한 서술이므로 $\Delta h = s$이고,

$g = 4a, a = \frac{1}{4}g$이다. A,B,C가 $\frac{1}{4}g$의 가속도로 움직이므로 C의 질량을 M라 하면 $\frac{M-m}{2m+M}g = \frac{g}{4}, M = 2m$이다.

B에서도 p에서 정지 상태였고 등가속도 운동에서 운동 에너지가 r에서가 q에서의 3배라는 것은 mas에 따라 p와 q 거리가 p와 r 거리의 3배라는 것이다. qr이 L이므로 pr은 $0.5L$임을 알 수 있다.

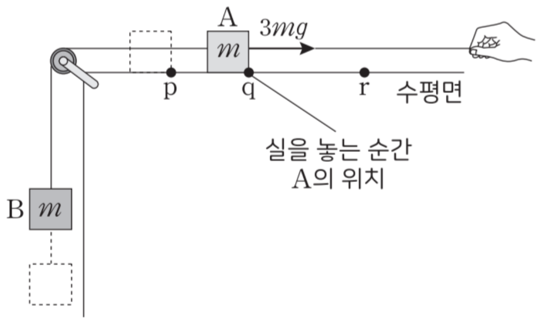
따라서 B가 r을 지날때 C의 운동 에너지는 $2m\frac{g}{4}3L = \frac{3}{2}mgL$이다.

운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지의 변화량은 $mas, mg\Delta h$로 구할 수 있었다.
그렇다면 역학적 에너지의 변화량을 한번에 구하는 방법은.. 당연히 있다.
이를 설명하기 위해 필요한 개념이 보존력과 비보존력이다.

보존력은 정의상 한 일이 경로에 무관한 일이다. 쉽게 말하면 **퍼텐셜 에너지**를 만드는 힘이다.
마침 또 34p.에서 중력 퍼텐셜 에너지가 빗면이건 수직이건 h에만 비례한다는 것을 확인했었다.
물리학 I에서는 탄성력, 중력이 이에 해당한다.

비보존력은 나머지 - 대표적으로 장력, 마찰력, 수직항력 등이 이에 속한다.
보존력의 특징은 보존장에는 에너지가 보존된다는 것이다. **즉, 역학적 에너지 변화는 모두 비보존력에 의한것.**
ex) 장력에 의한 역학적 에너지 변화를 묻는 경우라면 $mas+mg\Delta h$로 계산하지 말고 Ts로 한번에 처리한다.

이제 문제에 적용해보자.



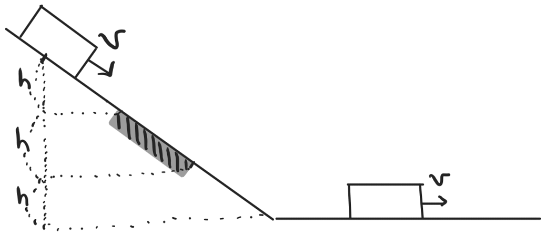
p에 정지해있던 질량 m인 물체 A을 $3mg$로 당기다가 A가 q에 도달하면 실을 놓는다. A는 이후 r에서 멈춘다.
A가 p에서 q까지, q에서 r까지 운동하는 동안 B의 역학적 에너지 증가량이 각 E_1, E_2일 때, $\dfrac{E_2}{E_1}$의 값은?

pq구간에는 알짜힘이 $3mg-mg=2mg$이므로 A,B의 가속도는 g이고,
qr구간에는 알짜힘이 mg이므로 가속도가 $\dfrac{1}{2}g$이다. 속력이 0 -> v -> 0이고 가속도 비가 2:1이므로
시간의 비는 1:2이고, $\dfrac{1}{2}at^2$에 따라 거리비는 pq:qr=1:2, pq=L, qr=2L
B에 작용하는 비보존력은 장력이므로 역학적 에너지 증가량은 Ts일 것이다.
A가 pq를 지날 때에는 가속도가 g이므로 장력은 $T-mg=mg$에서 $T=2mg$, $E_1=2mgL$
A가 qr을 지날 때에는 가속도가 $\dfrac{1}{2}g$이므로 장력은 $mg-T=\dfrac{mg}{2}$에서 $T=\dfrac{mg}{2}$, $E_2=mgL$ $\therefore \dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{1}{2}$

이렇게 마찰구간이 아닌 상황에서의 운동 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지, 역학적 에너지 변화량을
구하는 방법을 알아보았다. 이 파트는 처음 할 때는 어렵지만 정답률도 높고, 킬러 파트도 아니며,
하다 보면 익숙해져서 연습을 통해 2분 안에 돌파하는 것을 목표로 하면 좋다.

- 마찰구간에서의 등속운동

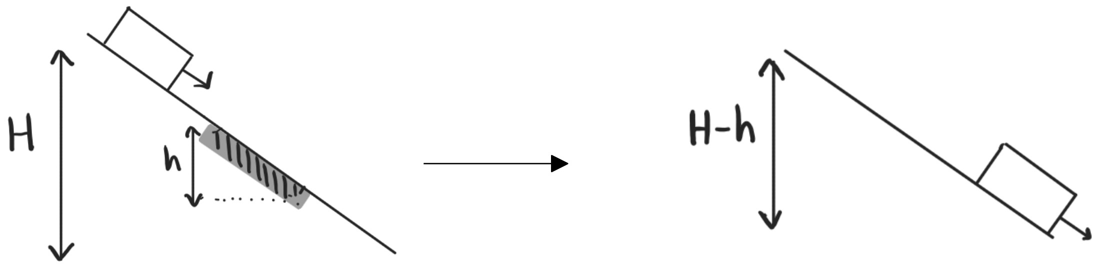
마찰구간의 에너지 감소량은 직접 계산하는 식은 없고, 마찰 구간을 지나기 전과 후의 에너지 차로 구한다.
간단한 예제로 보면..



마찰구간에서 감소한 운동 에너지가 증가한 중력 퍼텐셜 에너지의 몇 배인지 구하여라.

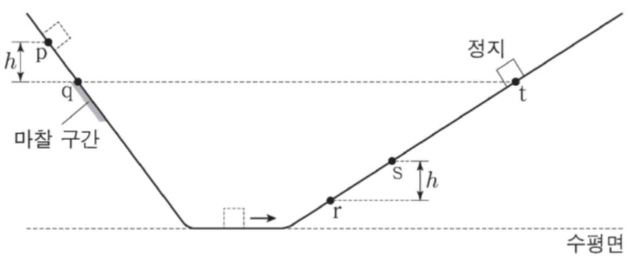
속력 v일 때의 운동 에너지를 K, 높이 h에서의 중력 퍼텐셜 에너지를 U라 하면
마찰 구간 지나기 전 $3h$ 지점은 $K+3U$, 마찰 구간 통과 후 수평면에서는 K의 에너지를 갖는다.
따라서 마찰 구간에 의한 역학적 에너지 감소량은 $3U$이고, h 내려왔으므로 중력 퍼텐셜 에너지 증가량은 U다.
$-3U=-4U+U$이므로 운동 에너지 변화량은 $4U$, $\therefore U:4U$이므로 4배이다.

이 마찰구간의 유형중에도 특수한 경우는 **빗면을 따라 내려가는 동안 마찰구간에서 등속운동**을 하는 것이다.
결론부터 말하자면 **마찰 구간의 높이만큼 출발 지점을 낮춘다고** 생각하면 편하다.



에너지의 관점에서 왼쪽 상황과 오른쪽 상황은 동일하다. 마찰구간 h동안은 운동 에너지가 변하지 않기에
운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지가 교환되며 운동하는 구간은 $H-h$ 구간만이므로
시작 높이가 H가 아닌, 마찰 구간의 길이만큼 내린 $H-h$라고 생각할 수 있는 것이다.
그리고 **이 마찰구간에서의 에너지 손실은** mgh라고 할 수 있다. (사실상 높이 h의 영향력이 사라졌으므로)

예시 상황을 하나만 보자.

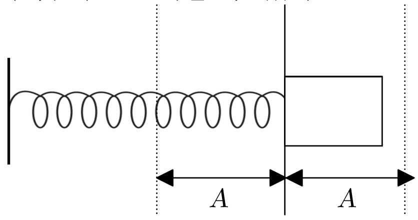


p에서 가만히 놓인 물체가 마찰구간에서 등속운동을 하여 r점에 도달하였을 때, 마찰구간의 높이는?

간단히, 마찰구간에 등속운동을 했음은, 그만큼 출발점을 내리는 것이다.
역학적 에너지 보존에 따라 왼쪽 빗면과 오른쪽 빗면의 속력이 0인 지점의 높이는 같아야 하므로
p에서 h를 내려야 한다. 따라서 마찰구간의 높이는 h이다.

- 용수철의 단진동

용수철에 힘을 주게 되면 탄성력에 의해 평형점을 중심으로 대칭은 진동을 하는 운동을 한다.
이는 수평 방향 / 연직 방향 (+빗면)으로 나눌 수 있다. 간단한 수평 먼저 살펴보자.



실선이 용수철의 자연상태 (변형되지 않은 상태 : $-kx, \frac{1}{2}kx^2 = 0$)이고,

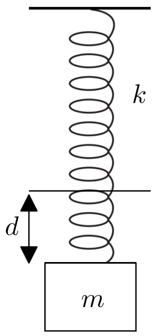
이 상태에서 용수철에 연결된 물체를 A만큼 누르거나 당기면 이 용수철은 진폭 A로 진동하게 된다.

A만큼 늘어나거나 당겨졌을 때 탄성력의 크기는 kA이고, 탄성 퍼텐셜 에너지는$\frac{1}{2}kA^2$이다.

용수철에 의한 에너지는 보존되기에 반대쪽으로 A만큼 변형되어야 탄성 퍼텐셜 에너지가 보존된다.

따라서 자연상태에서 x만큼 변형되었을 때의 에너지를 식으로 표현하면 $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$이다.

연직 방향은 이정도로 간단하지는 않다. 우선 연직으로 연결된 물체가 정지된 상황을 보자.



용수철 상수 k인 용수철에 질량 m인 물체가 매달려서 용수철이 자연상태에서 d 늘어난 채 정지해 있다.
즉, 탄성력 = 중력 인 상황이기 때문에 $kd = mg$이다.

그리고 이 상황에서 조금이라도 움직이게 되면 그 즉시 진동 상태로 변한다.
가령 A만큼 더 아래로 당겨졌다고 하면 탄성력은 $k(d+A)$, 중력은 $mg = kd$
즉, 알짜힘은 연직 위 방향의 kA이다. 반대로 A만큼 위로 밀렸다면 탄성력은 $k(d-A)$, 중력은 $mg = kd$,
알짜힘은 연직 아래 방향의 kA이다. 그리고 이 상황은 **수평 방향의 단진동과 일치**한다.
즉, **탄성력 = 중력** ($kd = mg$)**를 만족하는 힘의 평형점이 진동의 중심이 되고, 수평에서의 '자연상태'와 같다.**

따라서 이 상황에서도 진폭 A에 대하여 $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$을 적용할 수 있다.

이를 이용하면 연직방향 단진동 과정에서 물체의 운동 에너지를 빠르게 구해낼 수 있다.

다만 유의해야 할 사항은 여기서 x는 용수철이 늘어난 거리가 아니라, 평형점과의 거리이다.

따라서 평형점이 $kd = mg$를 만족할 때 실제 용수철 퍼텐셜 에너지는 $\frac{1}{2}k(d \pm x)^2$이다

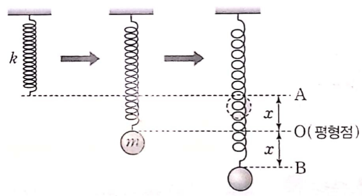
물론 저렇게 안하고, 자연상태를 기준으로 식을 세워도 무방하다. 어디까지나 편의의 영역이다.

수능 특강에 수록된 내용은 이러하니 참고하자. (스캔이라서 약간 굴곡이 있다.)

탐구자료 살펴보기 연직면에서 진동하는 물체의 역학적 에너지 보존

[자료]

공기 저항이 없는 곳에서 그림과 같이 질량이 m인 물체가 용수철 상수가 k인 용수철에 매달려 평형점 O를 중심으로 진폭 x로 진동할 때, 점 A, O, B에서 역학적 에너지는 보존된다.



[분석]

평형점에서는 중력의 크기와 탄성력의 크기가 같으므로 $mg=kx$이다. 중력 가속도를 g, O에서 물체의 속력을 v, B에서 중력 퍼텐셜 에너지를 0이라 하면, A, O, B에서 역학적 에너지는 다음과 같다.

- A에서 역학적 에너지$=mg(2x)$
- O에서 역학적 에너지$=mgx+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$
- B에서 역학적 에너지$=\frac{1}{2}k(2x)^2$

[point]

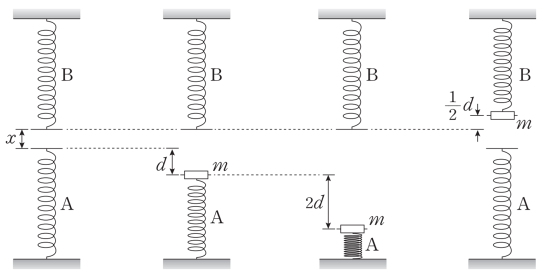
- 역학적 에너지 보존에 따라 $mg(2x)=mgx+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(2x)^2$이다.

참고해야 할 것은 자연상태에서 그대로 용수철에 달면 평형점에서 $kd=mg$라고 하면
진폭이 d인 단진동을 한다는 점이다. 위에서 말했던 대로 수평으로 보면 아래로 d 늘어난 상태가 자연상태이다.

헷갈릴 수 있을 것 같아서 용수철에서 평형과 단진동 상황을 다시 비교해 보자.
가장 중요한 포인트는 **단진동에서는 속력이 0일 때 힘의 평형 상태가 아니다**. 곧 다시 돌아가기 때문이다.
위에서 말했듯, 자연상태와 같은 진동의 중심 지점이 힘의 평형점이고, $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$에 따라
평형점$(x=0)$**에서 속력이 최대**가 된다는 것을 알 수 있다.

그리고 평형점에서 조금이라도 움직이면 바로 단진동이 되기 때문에 주로 문제에서는 힘의 평형 상태를
'~의 상태로 정지해 있다'라고 준다.

단진동 예제를 같이 살펴보자.



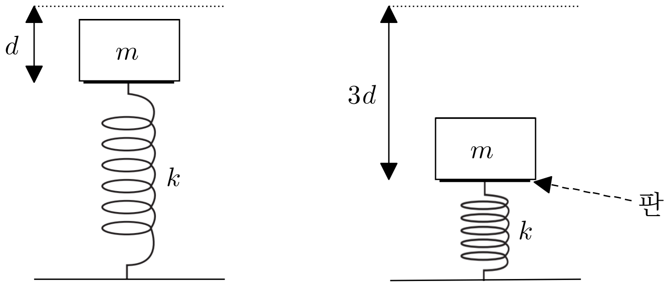
(가) (나) (다) (라)

용수철 A,B는 용수철 상수가 같고 (나)에서 질량 m인 물체가 용수철 A를 d만큼 압축 시킨 후 정지해 있다.
(다)는 (나)에서 물체를 $2d$만큼 더 압축시켰고, 이후 (라)에서 용수철 B를 $\frac{1}{2}d$ 압축시켰을 때 속력이 0이 된다.
이 때 물체가 갖는 운동 에너지의 최댓값을 구하여라.

(나)에서 정지해 있음은 힘의 평형 상태임을 의미하므로 $kd=mg$이다.
운동에너지의 최댓값은 $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$에 의해 $x=0$인 평형점에서임을 알 수 있고,
진폭은 평형점으로부터의 최대 변형 거리이므로 $A=2d$이다, $\therefore \frac{1}{2}k(2d)^2=\frac{1}{2}mv^2$,
평형 상태에서 $kd=mg$임을 대입하여 $2kd^2=2mgd$, 운동 에너지의 최댓값은 $2mgd$이다.

- 용수철과 물체의 분리

단진동과 함께 최근에는 많이 마이너해 졌지만 충분히 나올 여지는 있다. 또 대비가 안되면 못푸는 파트이다.
간단한 상황을 하나 보자.

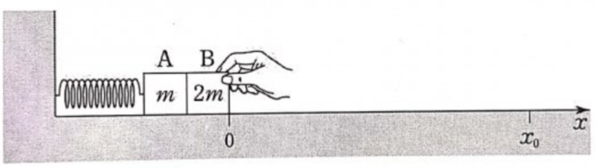


용수철 상수 k인 용수철에 질량 m인 물체가 올려져 있고, 용수철은 d만큼 줄어든 채 정지해있다.
이 상태에서 물체를 $2d$만큼 더 누른 후 놓았다면 물체가 용수철과 분리되는 지점은 어디일까?

물체의 분리 시점은 물리량에서 가속도, 수직항력과 관련이 있다.
1. 두 물체가 가속도가 같고 / 2. 두 물체간의 수직항력이 0일때 두 물체가 분리된다.

그렇다면 여기는 용수철과 물체가 분리되어야 하는데.. 이걸 어떻게 계산하지?
용수철과 분리된다는 것은 물체를 받치고 있는 '판'과 분리된다고 해석하는 것이다.
그리고 물리 I에서는 이 '판'의 질량을 무시한다. 즉 0에 수렴한다고 본 것이고,
이러면 $F=ma$에 의해 F, 탄성력이 조금만 있더라도 $a\to\infty$로 발산한다.
물체의 알짜힘은 $mg-F$, 가속도는 상수이다. 상수 > ∞는 불가하므로 $F=0, a=0$이어야 분리될 수 있다.
따라서 비로소 $F=kx=0$, 변형이 0인 **용수철의 자연상태에서 용수철과 물체가 분리**되는 것이다.
수평 / 빗면에서도 마찬가지로 자연상태에서 용수철과 물체가 분라된다.

같은 방식으로 생각하면, 두 물체가 수평, 빗면, 연직으로 놓인 것 처럼 **질량에 비례하는 힘을 받는다면,**
그 분리 지점은 역시 용수철의 자연상태이다. 두 물체가 가속도 변화량이 같기 때문이다.
그러나 그렇지 않은 경우가 있는데, 대표적으로 모든 물체에 같은 힘을 주는 마찰 수평면이 있다.
이 상황에서는 위의 가속도, 수직항력 메뉴얼대로 **분리 지점을 직접 계산**해내야 한다.
예제를 하나 살펴보자.



마찰이 **있는** 수평면 위에서 용수철에 연결된 물체 A에 B를 접촉시킨 후 압축시켜 $x=0$에서 정지시켰다.
이 때 용수철은 원래 길이보다 9m 압축됐고, 이후 B를 가만히 놓았을 때 B의 속력은 $x=5$m에서 최대가 되고
$x=x_0$에서 정지한다. A,B의 질량은 각각 $m, 2m$이고 A,B는 크기가 f로 일정한 마찰력을 받는다. x_0은?

(해설은 뒷면)

물체가 분리되기 전까지 두 물체는 $-2f$의 마찰력을 받았을 것이고, 분리된 후 B는 알짜힘이 $-f$이므로 B의 분리 후 가속도는 $-\dfrac{f}{2m}$였을 것이다. 분리 시점에서는 A,B 가속도가 같으므로 A도 $-\dfrac{f}{2m}$이다. $F=ma$로 A는 알짜힘이 $-\dfrac{f}{2}$여야 한다. 따라서 분리 시점의 탄성력은 $+\dfrac{f}{2}$이다. B가 $x=5\mathrm{m}$에서 속력이 최대임은 $x=5\mathrm{m}$까지는 탄성력≥마찰력이었음을 의미한다. 즉, $x=5\mathrm{m}$에서의 탄성력은 마찰력과 같은 $2f$이다.

총 압축길이가 9m이었고 $x=5\mathrm{m}$에서는 4m 압축되었을 때 탄성력 $2f$이므로 $\dfrac{f}{2}$려면 1m 압축, $x=8\mathrm{m}$에서다.

따라서 A에 작용하는 탄성력이 $\dfrac{f}{2}$가 되게 하여 A 가속도 = B 가속도를 만족하는 분리 지점은 $x=8\mathrm{m}$이다.

분리 이후 B가 이동한 거리를 알기 위해서는 분리 시점의 B의 운동 에너지를 알 필요가 있다.

분리 시점까지는 A,B가 한 물체처럼 운동했으므로 B의 운동에너지는 질량 비에 따라 전체 운동에너지의 $\dfrac{2}{3}$이다.

4m 압축됐을 때 탄성력 $2f$이므로 용수철 상수 $\dfrac{f}{2}$, $\therefore x=0\to 8\mathrm{m}$ 감소한 탄성 퍼텐셜 에너지= $\dfrac{9^2-1^2}{4}f=20f$

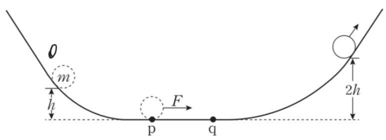
$x=0\to 8\mathrm{m}$ 동안 마찰력 $2f$에 의해 손실된 에너지 $16f$, $\therefore$ 증가한 운동에너지 $20f-16f=4f$,

B의 운동에너지 $4\times\dfrac{2}{3}f=\dfrac{8}{3}f$, 마찰력 f이므로 분리 이후 $\dfrac{8}{3}\mathrm{m}$ 이동 후 정지, $\therefore x_0=8+\dfrac{8}{3}=\dfrac{32}{3}\mathrm{m}$

처음 보면 어려울 수 있지만 사용된 원리는 가속도 일치시키기 외에는 기존과 동일하다.
이제 역학적 에너지의 기본 개념 + 스킬은 모두 정리했으므로 예제 18문제를 풀어보도록 하자.

예제 1

그림은 높이 h인 지점에 가만히 놓은 질량 m인 물체가 마찰이 없는 연직면상의 궤도를 따라 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 물체는 궤도의 수평 구간의 점 p에서 점 q까지 운동하는 동안 물체의 운동 방향으로 일정한 크기의 힘 F를 받는다. 물체의 운동 에너지는 높이 $2h$인 지점에서가 p에서의 2배이다.

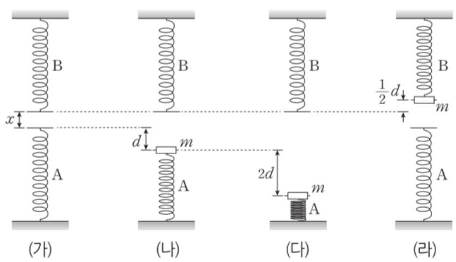


$F=2mg$일 때, 물체가 p에서 q까지 운동하는 데 걸린 시간은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기와 공기 저항은 무시한다.) 3점

① $\sqrt{\dfrac{h}{5g}}$ ② $\sqrt{\dfrac{h}{4g}}$ ③ $\sqrt{\dfrac{h}{3g}}$ ④ $\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$ ⑤ $\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

예제 2

그림 (가)와 같이 동일한 용수철 A, B가 연직선상에 x만큼 떨어져 있다. 그림 (나)는 (가)의 A를 d만큼 압축시키고 질량 m인 물체를 올려놓았더니 물체가 힘의 평형을 이루며 정지해 있는 모습을, (다)는 (나)의 A를 $2d$만큼 더 압축시켰다가 가만히 놓는 순간의 모습을, (라)는 (다)의 물체가 A와 분리된 후 B를 압축시킨 모습을 나타낸 것이다. B가 $\frac{1}{2}d$만큼 압축되었을 때 물체의 속력은 0이다.



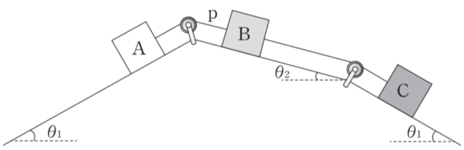
이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 용수철의 질량, 공기 저항은 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. 용수철 상수는 $\dfrac{mg}{d}$이다.
ㄴ. $x=\dfrac{7}{8}d$이다.
ㄷ. 물체가 운동하는 동안 물체의 운동 에너지의 최댓값은 $2mgd$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 3

그림은 서로 다른 경사면에 놓인 물체 A, B, C가 실로 연결되어 정지해 있는 모습을 나타낸 것이다. A의 질량은 C의 3배이다. $t=0$일 때 A와 B를 연결하는 실 p를 잘랐더니 $t=2$초까지 A, B, C는 각각 등가속도 직선 운동하고, $t=2$초일 때 운동 에너지는 B가 C의 4배이다. $t=0$부터 $t=2$초까지 A, B, C의 중력 퍼텐셜 에너지의 감소량은 각각 E_A, E_B, E_C이다.

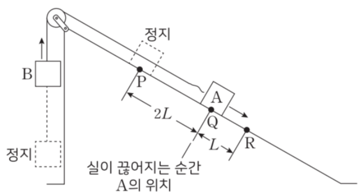


$E_A : E_B : E_C$는? (단, $\theta_1 > \theta_2$이고, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① 5 : 1 : 2 ② 5 : 2 : 1 ③ 5 : 2 : 3
④ 5 : 3 : 2 ⑤ 5 : 3 : 3

예제 4

그림과 같이 물체 A, B를 실로 연결하고 빗면의 점 P에 A를 가만히 놓았더니 A, B가 함께 등가속도 운동을 하다가 A가 점 Q를 지나는 순간 실이 끊어졌다. 이후 A는 등가속도 직선 운동을 하여 점 R를 지난다. A가 P에서 Q까지 운동하는 동안, A의 운동 에너지 증가량은 B의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{4}{5}$배이고, A의 운동 에너지는 R에서가 Q에서의 $\frac{9}{4}$배이다.

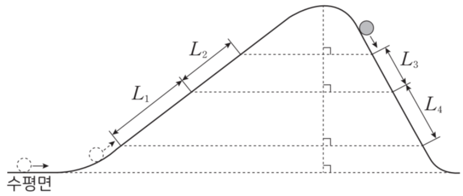


A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 할 때, $\frac{m_A}{m_B}$는? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

예제 5

그림과 같이 수평면에서 운동하던 물체가 왼쪽 빗면을 따라 올라간 후 곡선 구간을 지나 오른쪽 빗면을 따라 내려온다. 물체가 왼쪽 빗면에서 거리 L_1과 L_2를 지나는 데 걸린 시간은 각각 t_0으로 같고, 오른쪽 빗면에서 거리 L_3을 지나는 데 걸린 시간은 $\frac{t_0}{2}$이다.

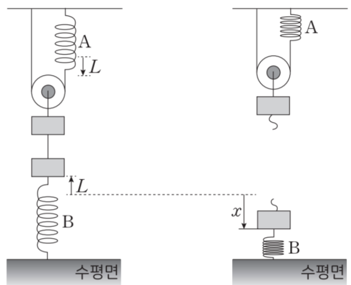


$L_2 = L_4$일 때, $\frac{L_1}{L_3}$은? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

예제 6

그림 (가)는 질량이 같은 두 물체가 실로 연결되어 용수철 A, B와 도르래를 이용해 정지해 있는 것을 나타낸 것이다. A, B는 각각 원래의 길이에서 L만큼 늘어나 있다. 그림 (나)는 두 물체를 연결한 실이 끊어져 B가 원래의 길이에서 x만큼 최대로 압축되어 물체가 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. A, B의 용수철 상수는 같다.



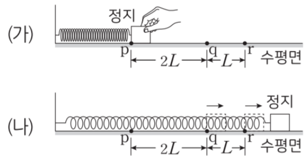
(가) (나)

x는? (단, 실의 질량, 용수철의 질량, 도르래의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① L ② $\frac{3}{2}L$ ③ $2L$ ④ $\frac{5}{2}L$ ⑤ $3L$

예제 7

그림 (가)는 마찰이 있는 수평면에서 물체와 연결된 용수철을 원래 길이에서 $2L$만큼 압축하여 물체를 점 p에 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. 물체가 p에 있을 때, 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지는 E_0이다. 그림 (나)는 (가)에서 물체를 가만히 놓았더니 물체가 점 q, r를 지나 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. p와 q 사이, q와 r 사이의 거리는 각각 $2L$, L이다. (나)에서 물체가 q에서 r까지 운동하는 동안, 물체의 운동 에너지 감소량은 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{7}{5}$배이다.

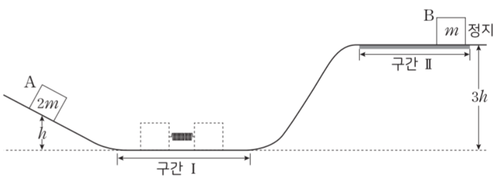


(나)에서 물체가 q, r를 지나는 순간 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지와 물체의 운동 에너지의 합을 각각 E_1, E_2라 할 때, E_1-E_2는? (단, 물체의 크기, 용수철의 질량은 무시한다.) 3점

① $\frac{1}{10}E_0$ ② $\frac{1}{5}E_0$ ③ $\frac{3}{10}E_0$ ④ $\frac{2}{5}E_0$ ⑤ $\frac{1}{2}E_0$

예제 8

그림과 같이 수평 구간 Ⅰ에서 물체 A, B를 용수철의 양 끝에 접촉하여 용수철을 원래 길이에서 d만큼 압축시킨 후 동시에 가만히 놓으면, A는 높이 h에서 속력이 0이고, B는 높이가 $3h$인 마찰이 있는 수평 구간 Ⅱ에서 정지한다. A, B의 질량은 각각 $2m$, m이고, 용수철 상수는 k이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 용수철의 질량, 구간 Ⅱ의 마찰을 제외한 모든 마찰 및 공기 저항은 무시한다.) 3점

보기

ㄱ. $k=\frac{12mgh}{d^2}$이다.

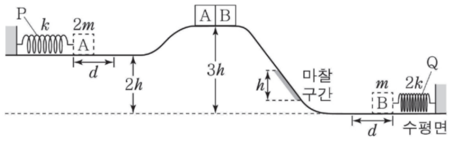
ㄴ. A, B가 각각 높이 $\frac{h}{2}$를 지날 때의 속력은 B가 A의 $\sqrt{6}$배이다.

ㄷ. 마찰에 의한 B의 역학적 에너지 감소량은 $\frac{3}{2}mgh$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

예제 9

그림과 같이 높이가 $2h$인 평면, 수평면에서 각각 물체 A, B로 용수철 P, Q를 원래 길이에서 d만큼 압축시킨 후 가만히 놓으면 A와 B가 높이 $3h$인 평면에서 충돌한다. A의 속력은 B와 충돌 직전이 충돌 직후의 4배이다. B는 높이차가 h인 마찰 구간을 내려갈 때 등속도 운동하고, 마찰 구간을 올라갈 때 손실된 역학적 에너지는 내려갈 때와 같다. 충돌 후 A, B는 각각 P, Q를 원래 길이에서 최대 $\frac{d}{2}$, x만큼 압축시킨다. A, B의 질량은 각각 $2m$, m이고, P, Q의 용수철 상수는 각각 k, $2k$이다.

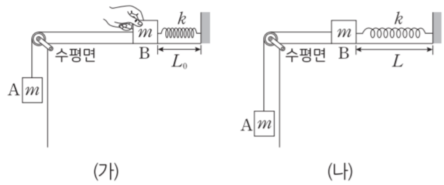


$\frac{x}{d}$는? (단, 물체는 면을 따라 운동하고, 용수철 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\sqrt{\frac{1}{20}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{15}}$ ③ $\sqrt{\frac{1}{10}}$ ④ $\sqrt{\frac{2}{15}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{3}{20}}$

예제10

그림 (가)는 물체 A와 실로 연결된 물체 B를 원래 길이가 L_0인 용수철과 수평면 위에서 연결하여 잡고 있는 모습을, (나)는 (가)에서 B를 가만히 놓은 후, 용수철의 길이가 L까지 늘어나 A의 속력이 0인 순간의 모습을 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 m이고, 용수철 상수는 k이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 실과 용수철의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

보기

ㄱ. $L-L_0=\frac{2mg}{k}$이다.

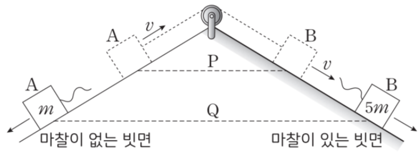
ㄴ. 용수철의 길이가 L일 때, A에 작용하는 알짜힘은 0이다.

ㄷ. B의 최대 속력은 $\sqrt{\frac{m}{k}}g$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제11

그림과 같이 실로 연결된 채 두 빗면에서 속력 v로 각각 등속도 운동을 하던 물체 A, B가 수평선 P를 동시에 지나는 순간 실이 끊어졌으며, 이후 각각 등가속도 직선 운동을 하여 수평선 Q를 동시에 지났다. A, B의 질량은 각각 m, $5m$이고, 두 빗면의 기울기는 같으며, B는 빗면으로부터 일정한 마찰력을 받는다.

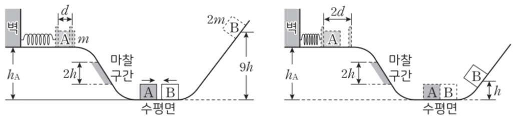


P에서 Q까지 B의 역학적 에너지 감소량은? (단, 실의 질량, 물체의 크기, B가 받는 마찰 이외의 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① $6mv^2$ ② $12mv^2$ ③ $18mv^2$ ④ $24mv^2$ ⑤ $30mv^2$

예제13

그림 (가)와 같이 높이 h_A인 평면에서 물체 A로 용수철을 원래 길이에서 d만큼 압축시킨 후 가만히 놓고, 물체 B를 높이 $9h$인 지점에 가만히 놓으면, A와 B는 수평면에서 서로 같은 속력으로 충돌한다. 충돌 후 그림 (나)와 같이 A는 용수철을 원래 길이에서 최대 $2d$만큼 압축시키고, B는 높이 h인 지점에서 속력이 0이 된다. A, B는 질량이 각각 m, $2m$이고, 면을 따라 운동한다. A는 빗면을 내려갈 때 높이차가 $2h$인 마찰 구간에서 등속도 운동하고, 마찰 구간을 올라갈 때 손실된 역학적 에너지는 내려갈 때와 같다.



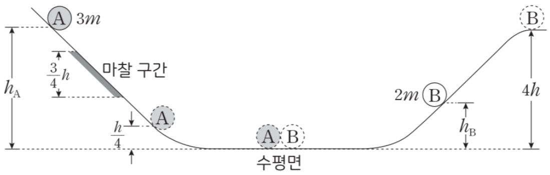
(가) (나)

h_A는? (단, 용수철의 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $7h$ ② $\frac{13}{2}h$ ③ $6h$ ④ $\frac{11}{2}h$ ⑤ $\frac{9}{2}h$

예제12

그림과 같이 물체 A, B를 각각 서로 다른 빗면의 높이 h_A, h_B인 지점에 가만히 놓았다. A가 내려가는 빗면의 일부에는 높이차가 $\frac{3}{4}h$인 마찰 구간이 있으며, A는 마찰 구간에서 등속도 운동하였다. A와 B는 수평면에서 충돌하였고, 충돌 전의 운동 방향과 반대로 운동하여 각각 높이 $\frac{h}{4}$와 $4h$인 지점에서 속력이 0이 되었다. 수평면에서 B의 속력은 충돌 후가 충돌 전의 2배이다. A, B의 질량은 각각 $3m$, $2m$이다.

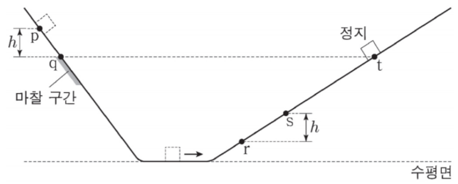


$\frac{h_B}{h_A}$는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

예제14

그림은 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체가 점 q, r, s를 지나 빗면의 점 t에서 속력이 0인 순간을 나타낸 것이다. 물체는 p와 q 사이에서 가속도의 크기 $3a$로 등가속도 운동을, 빗면의 마찰 구간에서 등속도 운동을, r와 t 사이에서 가속도의 크기 $2a$로 등가속도 운동을 한다. 물체가 마찰 구간을 지나는 데 걸린 시간과 r에서 s까지 지나는 데 걸린 시간은 같다. p와 q 사이, s와 r 사이의 높이차는 h로 같고, t는 마찰 구간의 최고점 q와 높이가 같다.

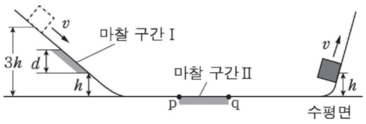


t와 s 사이의 높이차는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\frac{16}{9}h$ ② $2h$ ③ $\frac{20}{9}h$ ④ $\frac{7}{3}h$ ⑤ $\frac{8}{3}h$

예제15

그림은 높이가 $3h$인 지점을 속력 v로 지나는 물체가 빗면 위의 마찰 구간 Ⅰ과 수평면 위의 마찰 구간 Ⅱ를 지난 후 높이가 h인 지점을 속력 v로 통과하는 모습을 나타낸 것이다. 점 p, q는 Ⅱ의 양 끝점이다. 높이차가 d인 Ⅰ에서 물체는 등속도 운동을 하고, Ⅰ의 최저점의 높이는 h이다. Ⅰ과 Ⅱ에서 물체의 역학적 에너지 감소량은 q에서 물체의 운동 에너지의 $\frac{2}{3}$배로 같다.



이에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

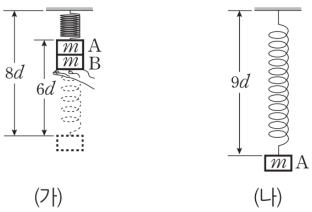
보기

ㄱ. $d=h$이다.
ㄴ. p에서 물체의 속력은 $\sqrt{5}v$이다.
ㄷ. 물체의 운동 에너지는 Ⅰ에서와 q에서가 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제16

그림 (가)와 같이 원래 길이가 $8d$인 용수철에 물체 A를 연결하고, 물체 B로 A를 $6d$만큼 밀어 올려 정지시켰다. 용수철을 압축시키는 동안 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지의 증가량은 A의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 3배이다. A와 B의 질량은 각각 m이다. 그림 (나)는 (가)에서 B를 가만히 놓았더니 A가 B와 함께 연직선상에서 운동하다가 B와 분리된 후 용수철의 길이가 $9d$인 지점을 지나는 순간을 나타낸 것이다.

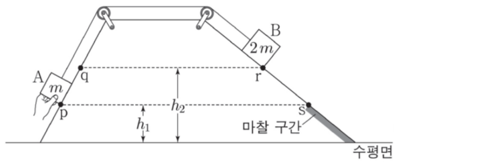


(나)에서 A의 운동 에너지는? (단, 중력 가속도는 g이고, 용수철의 질량, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① $\frac{29}{2}mgd$ ② $\frac{31}{2}mgd$ ③ $\frac{63}{4}mgd$ ④ $\frac{65}{4}mgd$ ⑤ $\frac{33}{2}mgd$

예제17

그림은 질량이 각각 m, $2m$인 물체 A, B를 실로 연결하고 서로 다른 빗면의 점 p, r에 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. A를 가만히 놓았더니 A가 점 q를 지나는 순간 실이 끊어지고 A, B는 빗면을 따라 가속도의 크기가 각각 $3a$, $2a$인 등가속도 운동을 한다. B는 마찰 구간이 시작되는 점 s부터 등속도 운동을 한다. A가 수평면에 닿기 직전 A의 운동 에너지는 마찰 구간에서 B의 운동 에너지의 2배이다. p와 s의 높이는 h_1로 같고, q와 r의 높이는 h_2로 같다.

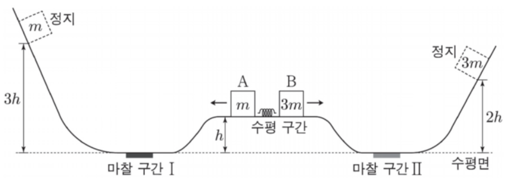


$\frac{h_2}{h_1}$는? (단, 실의 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

예제18

그림과 같이 수평면으로부터 높이가 h인 수평 구간에서 질량이 각각 m, $3m$인 물체 A와 B로 용수철을 압축시킨 후 가만히 놓았더니, A, B는 각각 수평면상의 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 높이 $3h$, $2h$에서 정지하였다. 이 과정에서 A의 운동 에너지의 최댓값은 A의 중력 퍼텐셜 에너지의 최댓값의 4배이다. A, B가 각각 Ⅰ, Ⅱ를 한 번 지날 때 손실되는 역학적 에너지는 각각 $W_{\text{Ⅰ}}$, $W_{\text{Ⅱ}}$이다.



$\frac{W_{\text{Ⅰ}}}{W_{\text{Ⅱ}}}$은? (단, 수평면에서 중력 퍼텐셜 에너지는 0이고, A와 B는 동일 연직면상에서 운동한다. 물체의 크기, 용수철의 질량, 공기 저항과 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

① 9 ② $\frac{21}{2}$ ③ 12 ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 15

IV. 역학적 에너지 보존

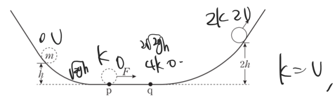
- 예제 1~18 해설 + 손풀이

<빠른 정답>
4 5 2 2 4
3 1 1 5 1
5 2 1 1 5
2 5 4

예제 1 ④ // [아이디어] 시간 관련 -> 운동량

<2019 수능 #14> 정답률 49.8%

그림은 높이 h인 지점에 가만히 놓은 질량 m인 물체가 마찰이 없는 연직면상의 궤도를 따라 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 물체는 궤도의 수평 구간의 점 p에서 점 q까지 운동하는 동안 물체의 운동 방향으로 일정한 크기의 힘 F를 받는다. 물체의 운동 에너지는 높이 $2h$인 지점에서가 p에서의 2배이다.



$F=2mg$일 때, 물체가 p에서 q까지 운동하는 데 걸린 시간은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기와 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{\frac{h}{5g}}$ ② $\sqrt{\frac{h}{4g}}$ ③ $\sqrt{\frac{h}{3g}}$ ④ $\sqrt{\frac{h}{2g}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{h}{g}}$

$mgh=U$, p에서의 운동에너지를 K라 하면 p 왼쪽 경사면에서 $K=U$ 임을 알 수 있고, 오른쪽 경사면 $2h$지점은 $2K+2U=4K$이므로 q에서 운동에너지가 $4K$이다. $K=U=mgh$이므로 운동에너지가 K일때의 속력은 $\frac{1}{2}mv^2=mgh$, $v=\sqrt{2gh}$ 이다.

따라서 pq지점에서 속력은 $\sqrt{2gh}$ -> $2\sqrt{2gh}$ 가 되므로

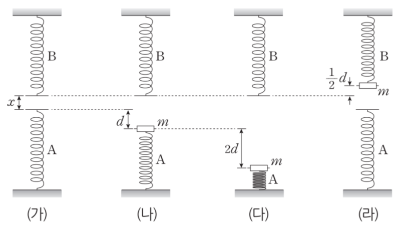
$Ft=m\sqrt{2gh}$, $2mgt=m\sqrt{2gh}$, $\therefore t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

예제 2 ⑤ // [아이디어] 물체의 분리 순간 + 단진동

<2021 6모 #20> 정답률 20.8%

- 오답률 1위

그림 (가)와 같이 동일한 용수철 A, B가 연직선상에 x만큼 떨어져 있다. 그림 (나)는 (가)의 A를 d만큼 압축시키고 질량 m인 물체를 올려놓았더니 물체가 힘의 평형을 이루며 정지해 있는 모습을, (다)는 (나)의 A를 $2d$만큼 더 압축시켰다가 가만히 놓는 순간의 모습을, (라)는 (다)의 물체가 A와 분리된 후 B를 압축시킨 모습을 나타낸 것이다. B가 $\frac{1}{2}d$만큼 압축되었을 때 물체의 속력은 0이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 용수철의 질량, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

보기

ㄱ. 용수철 상수는 $\frac{mg}{d}$이다. $kd=mg$

ㄴ. $x=\frac{7}{8}d$이다.

ㄷ. 물체가 운동하는 동안 물체의 운동 에너지의 최댓값은 $2mgd$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. (나)에서 힘의 평형 상태이므로 $kd=mg$, $k=\frac{mg}{d}$ (O)

ㄴ. (다)에서 (라)로는 총 $3d$ 압축된 용수철이 B를 $\frac{d}{2}$ 압축시킨 후 정지한다. 용수철과 물체의 분리는 자연상태에서 일어나고,그 과정에서 얻는 탄성 퍼텐셜 에너지는 B의 용수철과 중력 퍼텐셜로 저장된다. 따라서 에너지 보존식은

$\frac{1}{2}k(3d)^2=\frac{1}{2}k(\frac{1}{2}d)^2+mg(x+\frac{7}{2}d)$과 같이 쓸 수 있다.

$\frac{35}{8}kd^2=mg(x+\frac{7}{2}d)$, $kd=mg$이므로 $\frac{35}{8}mgd=mg(x+\frac{7}{2}d)$

$\therefore x=\frac{7}{8}d$ (O)

ㄷ. (다)에서 평형점에서 $2d$ 눌린 것을 진폭이 $2d$인 단진동이라고 생각할 수 있다. 따라서 $\frac{1}{2}k(2d)^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$을 만족하고,

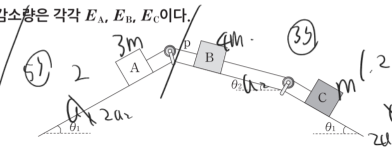
운동에너지가 최대이려면 $x=0$이므로 $\frac{1}{2}mv^2=2kd^2=2mgd$ (O)

예제 3 ② // [아이디어] 가속도와 높이

B,C는 실로 연결돼 속력이 같은데 2초일때 B의 운동에너지가 C의 4배다. 따라서 B의 질량이 C의 4배이다. A는 C의 3배이다.
따라서 A,B,C의 질량을 각 $3m, 4m, m$라고 할 수 있다.
경사도 θ_1, θ_2인 빗면의 가속도를 각 a_1, a_2라고 하자.
실 p가 끊기기 전, 정지해 있었으므로 알짜힘은 0이다.
따라서 $3ma_1 = 4ma_2 + ma_1$, $a_1 = 2a_2$,
실이 끊어진 후 A는 a_1, B와 C는 $\dfrac{2ma_1 + ma_1}{4m+m} = \dfrac{3}{5}a_1$이다.
또한 높이 변화량은 빗면 이동 거리와 빗면 가속도의 곱에 비례한다.
$h, \dfrac{h}{\sin\theta}, g\sin\theta$이기 때문이다. 따라서 질량, 이동거리, 빗면가속도 곱에서
$A:B:C = 3\times5 : 4\times3\times\dfrac{1}{2} : 1\times3 = 5:2:1$의 비를 구할 수 있다.

<2018 10월 #20> 정답률 30.3%

그림은 서로 다른 경사면에 놓인 물체 A, B, C가 실로 연결되어 정지해 있는 모습을 나타낸 것이다. A의 질량은 C의 3배이다. $t=0$일 때 A와 B를 연결하는 실 p를 잘랐더니 $t=2$초까지 A, B, C는 각각 등가속도 직선 운동하고, $t=2$초일 때 운동 에너지는 B가 C의 4배이다. $t=0$부터 $t=2$초까지 A, B, C의 중력 퍼텐셜 에너지의 감소량은 각각 E_A, E_B, E_C이다.



$E_A : E_B : E_C$는? (단, $\theta_1 > \theta_2$이고, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① 5 : 1 : 2 ② 5 : 2 : 1 ③ 5 : 2 : 3
④ 5 : 3 : 2 ⑤ 5 : 3 : 3

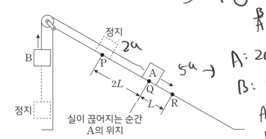
A: 5×3 =15
B: 4×3×½ =6
C: 1×3 =3
5:2:1

예제 4 ② // [아이디어] 에너지 변화량 공식

실이 끊어지기 전 가속도를 $2a$, A와 B의 질량을 A, B라고 하자.
A의 운동에너지 증가량이 B 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\dfrac{4}{5}$배 임은
A,B의 이동거리가 같기 때문에 $A\,2a = Bg\times\dfrac{4}{5}$라고 표현할 수 있다.
A의 운동에너지가 R에서가 Q에서의 4배임은, 또한 일 운동에너지 정리로
PQ : QR의 as가 4:5임을 나타낸다. s의 비는 $2L : L$이므로
가속도 비가 2 : 5다. 따라서 실이 끊어진 후 A는 $5a$의 가속도를 갖는다.
B는 실이 끊어졌으므로 위쪽 a에서 아래쪽 g가 되었다.
$m_1 \Delta a_1 = m_2 \Delta a_2$에서 $A\,3a = B(2a+g)$이다. 두 식을 연립하면 $g = 10a$이다.
이를 다시 대입하면 $3aA = 12aB$, $\therefore \dfrac{A}{B} = 4$

<2019 6월 #20> 정답률 30.1%
- 오답률 1위

그림과 같이 물체 A, B를 실로 연결하고 빗면의 점 P에 A를 가만히 놓았더니 A, B가 함께 등가속도 운동을 하다가 A가 점 Q를 지나는 순간 실이 끊어졌다. 이후 A는 등가속도 직선 운동을 하여 점 R를 지난다. A가 P에서 Q까지 운동하는 동안, A의 운동 에너지 증가량은 B의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{4}{5}$배이고, A의 운동 에너지는 R에서가 Q에서의 $\frac{9}{4}$배이다.



A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 할 때, $\dfrac{m_A}{m_B}$는? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

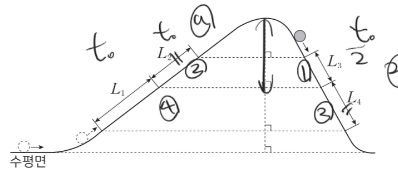
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

예제 5 ④ // [아이디어] 에너지 보존시 같은 높이 = 같은 속력

L_2의 시작 / 끝 지점의 높이는 L_3의 끝 / 시작 지점의 높이와 같다.
그리고 L_2, L_3를 통과할 때까지 에너지 손실은 없었다.
따라서 L_2 진입 / 탈출 속도가 L_3의 탈출 / 진입 속도와 같으므로
L_2, L_3 구간의 평균속도가 같음을 알 수 있다.
평균속도가 같은데 걸리는 시간의 비율은 $2:1$이므로 거리 비는 $2:1$
왼쪽 빗면과 오른쪽 빗면은 같은 높이에 대한 빗면의 길이 비가 $2:1$인 것이다. 따라서 $L_2 = L_4$이면 $L_1 = 2L_4$이다.
따라서 $L_4 : L_3 : L_2 : L_1 = 4:2:2:1$이므로 $\dfrac{L_1}{L_3} = 4$

<2020 6월 #19> 정답률 31.4%

그림과 같이 수평면에서 운동하던 물체가 왼쪽 빗면을 따라 올라간 후 곡선 구간을 지나 오른쪽 빗면을 따라 내려온다. 물체가 왼쪽 빗면에서 거리 L_1과 L_2를 지나는 데 걸린 시간은 각각 t_0으로 같고, 오른쪽 빗면에서 거리 L_3을 지나는 데 걸린 시간은 $\frac{t_0}{2}$이다.



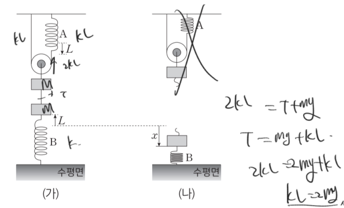
$L_2 = L_4$일 때, $\dfrac{L_1}{L_3}$은? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

예제 6 ③ // [아이디어] 움직 도르래 장력 해석

<2021 7월 #20> 정답률 39.2%

그림 (가)는 질량이 같은 두 물체가 실로 연결되어 용수철 A, B와 도르래를 이용해 정지해 있는 것을 나타낸 것이다. A, B는 각각 원래의 길이에서 L만큼 늘어나 있다. 그림 (나)는 두 물체를 연결한 실이 끊어져 B가 원래의 길이에서 x만큼 최대로 압축되어 물체가 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. A, B의 용수철 상수는 같다.



x는? (단, 실의 질량, 용수철의 질량, 도르래의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① L ② $\frac{3}{2}L$ ③ $2L$ ④ $\frac{5}{2}L$ ⑤ $3L$

∴ $x=2L$

(가) 상황에서 도르래를 받치는 실의 장력은 용수철에 의한 kL이다.
그러면 도르래는 왼쪽 실, 오른쪽 실에 의해 위쪽으로 kL씩 힘을 받는다.
따라서 도르래는 위쪽으로 $2kL$의 힘을 받는다.
두 물체 사이의 장력을 T, 질량을 m라 하면 (가)는 정지상태이므로

$\begin{cases} 2kL - T = mg \\ T - kL = mg \end{cases}$이고, 두 식을 더하면 $kL = 2mg$이다.

(나)는 용수철 변형이 $+L \to 0 \to -x$이므로 높이는 $x+L$ 감소했다.

따라서 $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kL^2 + mg(x+L)$, 양변 식 정리 후 $(x+L)$을 약분하면

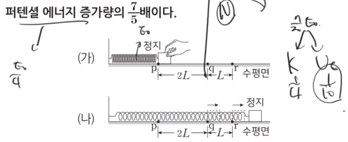
$\frac{1}{2}k(x-L) = mg$, $mg = \frac{kL}{2}$을 대입하면 $x - L = L$, $\therefore x = 2L$

예제 7 ①

<2021 4월 #20> 정답률 24.8%

- 오답률 1위

그림 (가)는 마찰이 있는 수평면에서 물체와 연결된 용수철을 원래 길이에서 $2L$만큼 압축하여 물체를 점 p에 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. 물체가 p에 있을 때, 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지는 E_0이다. 그림 (나)는 (가)에서 물체를 가만히 놓았더니 물체가 점 q, r를 지나 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. p와 q 사이, q와 r 사이의 거리는 각각 $2L$, L이다. (나)에서 물체가 q에서 r까지 운동하는 동안, 물체의 운동 에너지 감소량은 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{7}{5}$배이다.



(나)에서 물체가 q, r를 지나는 순간 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지와 물체의 운동 에너지의 합을 각각 E_1, E_2라 할 때, $E_1 - E_2$는? (단, 물체의 크기, 용수철의 질량은 무시한다.) 3점

① $\frac{1}{10}E_0$ ② $\frac{1}{5}E_0$ ③ $\frac{3}{10}E_0$ ④ $\frac{2}{5}E_0$ ⑤ $\frac{1}{2}E_0$

이 상황에서 역학적 에너지 = 탄성에너지 + 운동에너지이므로

$E_1 - E_2$는 결국 q,r지점의 역학적 에너지의 차이이다.

$2L$ 압축되었을 때 탄성에너지 E_0이므로 q-r에서 탄성에너지는 $\frac{E_0}{4}$ 증가한다.

운동에너지 감소량은 탄성에너지 증가량의 $\frac{7}{5}$배이므로 $\frac{E_0}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{20}E_0$이다.

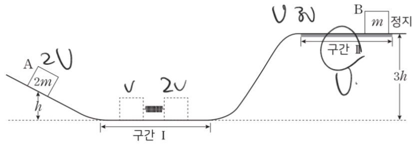
q-r에서 역학적 에너지 감소량은 $\frac{7}{20}E_0 - \frac{E_0}{4} = \frac{E_0}{10}$, $\therefore E_1 - E_2 = \frac{E_0}{10}$

예제 8 ① // [아이디어]는 딱히 없음 (기본 개념 짬뽕한 문제)

<2022 6월 #20> 정답률 22.3%

- 오답률 1위

그림과 같이 수평 구간 Ⅰ에서 물체 A, B를 용수철의 양 끝에 접촉하여 용수철을 원래 길이에서 d만큼 압축시킨 후 동시에 가만히 놓으면, A는 높이 h에서 속력이 0이고, B는 높이가 $3h$인 마찰이 있는 수평 구간 Ⅱ에서 정지한다. A, B의 질량은 각각 $2m$, m이고, 용수철 상수는 k이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 용수철의 질량, 구간 Ⅱ의 마찰을 제외한 모든 마찰 및 공기 저항은 무시한다.) 3점

보기
ㄱ. $k = \frac{12mgh}{d^2}$이다.
ㄴ. A, B가 각각 높이 $\frac{h}{2}$를 지날 때의 속력은 B가 A의 $\sqrt{6}$배이다.
ㄷ. 마찰에 의한 B의 역학적 에너지 감소량은 $\frac{3}{2}mgh$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

용수철은 양쪽에 같은 운동량을 주고 질량은 A $2m$, B m이다.
따라서 속력의 비는 1:2고, 각 v,$2v$로 운동한다고 하자.

A는 h까지 올라갔으므로 역학적 에너지는 $\frac{2m}{2}v^2 = 2mgh$이다.

B는 역학적 에너지가 $\frac{m}{2}(2v)^2$이므로 $4mgh$이다.

ㄱ. 용수철 탄성에너지 = A 역학적 에너지 + B 역학적 에너지이므로

$\frac{1}{2}kd^2 = 6mgh$, $k = \frac{12mgh}{d^2}$ (O)

ㄴ. A, B가 역학적 에너지가 각 $2mgh, 4mgh$이고, $\frac{h}{2}$ 지날 때는

운동/중력이 A는 mgh / mgh, B는 $3.5mgh$ / $0.5mgh$이다.

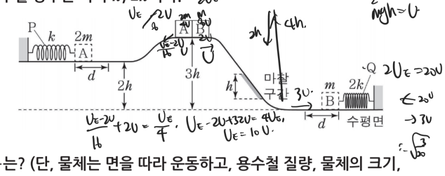
질량이 2:1이므로 v^2의 비는 1:7, ∴ 속력은 B가 A의 $\sqrt{7}$배이다. (X)

ㄷ. B의 역학적 에너지는 $4mgh$이고 중력 퍼텐셜 에너지가 $3mgh$이므로
마찰구간에서 mgh가 감소해야 정지하게 된다. (X)

예제 9 ⑤ // [아이디어] 충돌과 빗면을 다루는 법 **(손풀이 보는것 추천)**

<2022 10월 #20> 정답률 24.6%

그림과 같이 높이가 $2h$인 평면, 수평면에서 각각 물체 A, B로 용수철 P, Q를 원래 길이에서 d만큼 압축시킨 후 가만히 놓으면 A와 B가 높이 $3h$인 평면에서 충돌한다. A의 속력은 B와 충돌 직전이 충돌 직후의 4배이다. B는 높이차가 h인 마찰 구간을 내려갈 때 등속도 운동하고, 마찰 구간을 올라갈 때 손실된 역학적 에너지는 내려갈 때와 같다. 충돌 후 A, B는 각각 P, Q를 원래 길이에서 최대 $\frac{d}{2}$, x만큼 압축시킨다. A, B의 질량은 각각 $2m$, m이고, P, Q의 용수철 상수는 각각 k, $2k$이다.



$\frac{x}{d}$는? (단, 물체는 면을 따라 운동하고, 용수철 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{\frac{1}{20}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{15}}$ ③ $\sqrt{\frac{1}{10}}$ ④ $\sqrt{\frac{2}{15}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{3}{20}}$

에너지가 E인 물체가 중력 퍼텐셜 에너지 감소량이 W인 경사로를 올라가서 충돌 과정에서 속력이 절반이 되어 다시 경사로를 내려왔다.

이 과정 후의 에너지는 $\frac{E-W}{4}+W$라고 쓸 수 있다.

속력이 절반이 된 것은 경사로 위에서, 에너지가 $E-W$일 때의 일이고,

속력이 반이면 에너지가 $\frac{1}{4}$배이기 때문이다. 또한 경사로를 다시 내려오면서

얻는 에너지 W는 속력 절반 조건과 독립적이기에 그냥 더하기만 한다.

이 문제도 이와 마찬가지이다. $\frac{1}{2}kd^2 = U_E, mgh = U$라고 하면

A는 U_E에서 U_E-2U가 되었고, 속력이 $\frac{1}{4}$배가 되어 $2U$가 더해진 후의

역학적 에너지는 $\frac{U_E}{4}$이다. 따라서 $\frac{U_E-2U}{16}+2U=\frac{U_E}{4}$, $U_E=10U$이다. 따라서 충돌 직전 운동 에너지는 $8U$,

B에서는 $2U_E=20U$로 출발하여 마찰 등속 구간을 포함하여 올라오므로 $3h+h$를 올라오는 것과 같다.

따라서 중력 퍼텐셜 에너지는 $4U$, $3h$에서의 운동에너지는 $16U$이다. A의 충돌 전 속력을 $4v$라 하면

질량, 운동 에너지 비로 B의 충돌 전의 속력은 $8v$임을 알 수 있다. A는 충돌 전이 후의 4배이므로 v가 된다.

운동량 보존 법칙에 따라 $2m5v=m10v$, B의 충돌 후 속력은 $2v$이고, 따라서 충돌 후 운동에너지는 U다.

내려갈 때 마찰 등속운동 구간을 포함하므로 $3h-h$만큼의 퍼텐셜 에너지인 $2U$가 늘어나

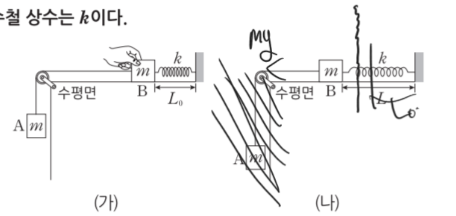
최종 운동에너지는 $3U$, 초기 운동에너지는 $20U$였으므로 $20:3=d^2:x^2$, $\therefore \frac{x}{d}=\sqrt{\frac{3}{20}}$

예제10 ① // [아이디어] 운동 상태 같으면 한 물체로 봐도 무방하다

<2021 9월 #20> 정답률 10.8%

- 오답률 1위

그림 (가)는 물체 A와 실로 연결된 물체 B를 원래 길이가 L_0인 용수철과 수평면 위에서 연결하여 잡고 있는 모습을, (나)는 (가)에서 B를 가만히 놓은 후, 용수철의 길이가 L까지 늘어나 A의 속력이 0인 순간의 모습을 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 m이고, 용수철 상수는 k이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 실과 용수철의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

보기

ㄱ. $L-L_0=\frac{2mg}{k}$이다.

ㄴ. 용수철의 길이가 L일 때, A에 작용하는 알짜힘은 0이다.

ㄷ. B의 최대 속력은 $\sqrt{\frac{m}{k}}g$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. (가)에서 (나)까지 이동한 거리 / 감소한 높이는 $L-L_0$이다.

중력 퍼텐셜 에너지가 모두 용수철에 저장되어 속력이 0인 상태이므로

$\frac{1}{2}k(L-L_0)^2=mg(L-L_0)$, 양변 정리하면 $L-L_0=\frac{2mg}{k}$ (O)

ㄴ. 알짜힘이 0인 지점은 평형점 : 진동의 중심이다.

진동의 양 끝은 L_0~L이므로 평형점은 $L_0+\frac{L-L_0}{2}=\frac{L+L_0}{2}$ (X)

ㄷ. (나) 상황은 단진동이므로 $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$을 쓸 수 있다.

진폭 $\frac{L-L_0}{2}$, A,B 같이 움직이므로 질량 $2m$,

속력 최대 (운동에너지 최대)이려면 $\frac{1}{2}kx^2=0, x=0$ (평형점에서)

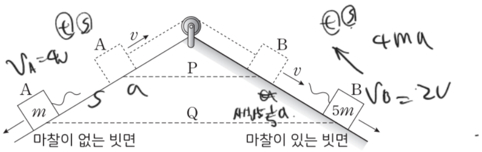
$\therefore \frac{1}{2}k(\frac{L-L_0}{2})^2=\frac{2m}{2}v^2$, $\frac{L-L_0}{2}=\frac{mg}{k}$을 대입하면 $\frac{m^2g^2}{2k^2}=mv^2$,

$v^2=\frac{mg^2}{2k}$이므로 $v=\sqrt{\frac{m}{2k}}g$ (X)

예제11 ⑤ // [아이디어] 역학적 에너지 감소량 = 비보존력이 한 일

<2020 10월 #20> 정답률 25.2%
- 오답률 1위

그림과 같이 실로 연결된 채 두 빗면에서 속력 v로 각각 등속도 운동을 하던 물체 A, B가 수평선 P를 동시에 지나는 순간 실이 끊어졌으며, 이후 각각 등가속도 직선 운동을 하여 수평선 Q를 동시에 지났다. A, B의 질량은 각각 m, $5m$이고, 두 빗면의 기울기는 같으며, B는 빗면으로부터 일정한 마찰력을 받는다.



P에서 Q까지 B의 역학적 에너지 감소량은? (단, 실의 질량, 물체의 크기, B가 받는 마찰 이외의 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $6mv^2$ ② $12mv^2$ ③ $18mv^2$ ④ $24mv^2$ ⑤ $30mv^2$

$t: v_A+v=5(v_B-v)$
$s: v_A^2-v^2=5(v_B^2-v^2)=(v_A+v)(v_A-v)$
$v_A-v=v_B+v$, $v_A+v=5v_B-5v$
$\therefore v_B=2v, v_A=4v$
$mas=\frac{15}{2}mv^2$
$\therefore \frac{4}{5}a\cdot5\cdot s=\frac{15}{2}mv^2\times4=30mv^2$

두 빗면 기울기가 같으므로 가속도를 a, 마찰력을 f라 하면
실이 끊어지기 전에 등속운동 하므로 $5ma-ma=f, f=4ma$다.

B는 계속 마찰력을 받으므로 사실상 가속도가 $\frac{1}{5}a$이다.

양쪽 빗면의 기울기가 같으므로 PQ 높이 차이의 빗면 길이는 같다.
따라서 PQ 운동은 가속도 비 5:1, 시간 1:1, 변위 1:1이다.
시간, 가속도를 이용해 속도 변화량에 대한 식을,
가속도, 변위를 이용해 속도^2 변화량에 대한 식을 쓸 수 있다.
수평면 Q에서의 A,B의 속도를 각 v_A, v_B라 하면

$\begin{cases} v_A+v=5(v_B-v) \\ v_A^2-v^2=5(v_B^2-v^2) \end{cases}$, 계산하면(손풀이 참고) $v_A=4v, v_B=2v$이다.

PQ 빗면 길이를 s라고 하고 A의 운동을 일-운동에너지 정리로 보면

$mas=\frac{m}{2}(16v^2-v^2)=\frac{15}{2}mv^2$이다. 역학적 에너지 감소량은

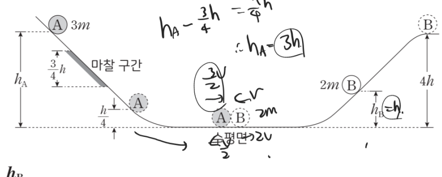
비보존력(마찰력이) 한 일과 같고, 마찰력은 $f=4ma$가 s만큼

작용했으므로 $4mas=\frac{15}{2}mv^2\times4$, $\therefore 30mv^2$

예제12 ② // [아이디어] 마찰구간 등속 운동 : 출발점 낮추기

<2022 9월 #20> 정답률 31.7%

그림과 같이 물체 A, B를 각각 서로 다른 빗면의 높이 h_A, h_B인 지점에 가만히 놓았다. A가 내려가는 빗면의 일부에는 높이차가 $\frac{3}{4}h$인 마찰 구간이 있으며, A는 마찰 구간에서 등속도 운동하였다. A와 B는 수평면에서 충돌하였고, 충돌 전의 운동 방향과 반대로 운동하여 각각 높이 $\frac{h}{4}$와 $4h$인 지점에서 속력이 0이 되었다. 수평면에서 B의 속력은 충돌 후가 충돌 전의 2배이다. A, B의 질량은 각각 $3m$, $2m$이다.



$\frac{h_B}{h_A}$는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

$\therefore \frac{h_B}{h_A}=\frac{h}{3h}=\frac{1}{3}$

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

B는 충돌 후의 속력이 충돌 전의 2배이므로 에너지는 충돌 후가 전의 4배이다.
따라서 $h_B:h=1:4$, $h_B=h$,

A는 충돌 후 $\frac{h}{4}$에서 정지하므로 충돌 후 속력은 $\frac{v}{2}$이다.

운동량 보존에 따라 $3m2v=2m3v$이므로 충돌 전 속력은 $\frac{3}{2}v$이다.

마찰구간 등속 운동을 하기에 실질 출발 높이는 $h_A-\frac{3}{4}h$이다.

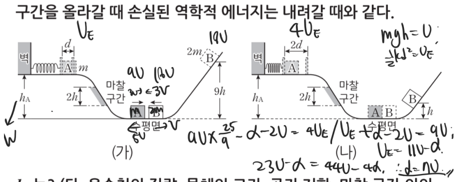
속력이 v일 때 h까지 올라가므로 $\frac{3}{2}v$가 되려면 $\frac{9}{4}h$ 높이를 내려와야 한다.

$\therefore h_A-\frac{3}{4}h=\frac{9}{4}h, h_A=3h$이므로 $\frac{h_B}{h_A}=\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

예제13 ① // [아이디어] 예제 9번의 열화판

<2022 수능 #20> 정답률 14.9%
- 오답률 1위

그림 (가)와 같이 높이 h_A인 평면에서 물체 A로 용수철을 원래 길이에서 d만큼 압축시킨 후 가만히 놓고, 물체 B를 높이 $9h$인 지점에 가만히 놓으면, A와 B는 수평면에서 서로 같은 속력으로 충돌한다. 충돌 후 그림 (나)와 같이 A는 용수철을 원래 길이에서 최대 $2d$만큼 압축시키고, B는 높이 h인 지점에서 속력이 0이 된다. A, B는 질량이 각각 m, $2m$이고, 면을 따라 운동한다. A는 빗면을 내려갈 때 높이차가 $2h$인 마찰 구간에서 등속도 운동하고, 마찰 구간을 올라갈 때 손실된 역학적 에너지는 내려갈 때와 같다.



h_A는? (단, 용수철의 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

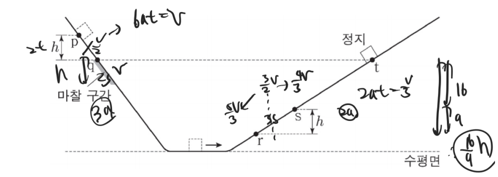
① $7h$ ② $\frac{13}{2}h$ ③ $6h$ ④ $\frac{11}{2}h$ ⑤ $\frac{9}{2}h$

$\frac{1}{2}kd^2 = U_E$, $mgh = U$, $mgh_A = \alpha$라고 하자. 그리고 B가 충돌 전이 충돌 후 속력의 3배이므로 충돌 전/후 속력을 각 $3v, v$라 하자.
충돌 전, A와 B의 속력은 같으므로 A도 $3v$로 운동하고,
운동량 보존에 의해 $m8v = 2m4v$, 충돌 후 속력은 $5v$이다.
B의 충돌 전 역학적 에너지가 $2mg9h = 18U$인데,
이때 A와 B는 속력이 같으므로 A의 역학적 에너지는 $9U$이다.
충돌 후는 속력 $\frac{5}{3}$배, $25U$가 된다. 마찰 구간 $2h$에서 등속운동 하므로
$U_E + \alpha - 2U = 9U$, $25U - \alpha - 2U = 4U_E$이다. U_E를 소거하면
$23U - 4\alpha = \alpha - 2U, \alpha = 7U$이다. $\therefore mgh_A = 7mgh, h_A = 7h$

예제14 ① // [아이디어] 마찰구간 등속 운동 : 출발점 내리기

<2023 수능 #20> 정답률 23.2%
- 오답률 1위

그림은 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체가 점 q, r, s를 지나 빗면의 점 t에서 속력이 0인 순간을 나타낸 것이다. 물체는 p와 q 사이에서 가속도의 크기 $3a$로 등가속도 운동을, 빗면의 마찰 구간에서 등속도 운동을, r와 t 사이에서 가속도의 크기 $2a$로 등가속도 운동을 한다. 물체가 마찰 구간을 지나는 데 걸린 시간과 r에서 s까지 지나는 데 걸린 시간은 같다. p와 q 사이, s와 r 사이의 높이차는 h로 같고, t는 마찰 구간의 최고점 q와 높이가 같다.



t와 s 사이의 높이차는? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

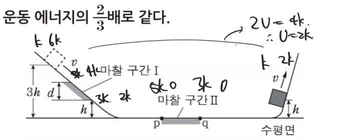
① $\frac{16}{9}h$ ② $2h$ ③ $\frac{20}{9}h$ ④ $\frac{7}{3}h$ ⑤ $\frac{8}{3}h$

출발 - 도착지점 높이 차이가 h인데 마찰구간 등속운동에 의해
출발점이 h 내려져야 마찰구간에서를 제외하고 에너지가 보존된다.
따라서 마찰구간의 높이는 h이다.
왼쪽 빗면과 오른쪽 빗면의 가속도를 $3a, 2a$라고 하고,
마찰구간과 rs 구간의 높이 변화가 같으므로 길이비는 가속도에 반비례해 $2s, 3s$라고 할 수 있다. 걸린 시간이 같으므로 평균속도는 $2:3$이다.
마찰구간 걸린 시간을 t, 평균속도를 v라고 하면 rs는 $\frac{3}{2}v$이고,
pq는 속력이 0 -> v로 평균속도 $\frac{v}{2}$로 시간 $2t$가 걸린다.
pq 구간의 속력 변화를 보면 $v = 3a2t = 6at$이고, rs에서는 $2at = \frac{v}{3}$이다.
따라서 평속이 $\frac{3}{2}v$이고, r과 s에서의 속도 차는 $\frac{v}{3}$이므로 r에서는 $\frac{5}{3}v$, s에서는 $\frac{4}{3}v$이다.
속력^2 변화량은 이동거리에 비례하므로 $rs : st = 9 : 16$, $\therefore$ t-s 높이차$=\frac{16}{9}h$

예제15 ⑤ // [아이디어] 에너지 표시 - 변수단순화

<2024 10월 #18> 정답률 32.7%

그림은 높이가 $3h$인 지점을 속력 v로 지나는 물체가 빗면 위의 마찰 구간 Ⅰ과 수평면 위의 마찰 구간 Ⅱ를 지난 후 높이가 h인 지점을 속력 v로 통과하는 모습을 나타낸 것이다. 점 p, q는 Ⅱ의 양 끝점이다. 높이차가 d인 Ⅰ에서 물체는 등속도 운동을 하고, Ⅰ의 최저점의 높이는 h이다. Ⅰ과 Ⅱ에서 물체의 역학적 에너지 감소량은 q에서 물체의 운동 에너지의 $\frac{2}{3}$배로 같다.



이에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

보기
ㄱ. $d = h$이다.
ㄴ. p에서 물체의 속력은 $\sqrt{5}v$이다.
ㄷ. 물체의 운동 에너지는 Ⅰ에서와 q에서가 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

q에서의 운동에너지를 $3K$, $mgh = U$라고 하자. 마찰 구간에서의 에너지 감소량은 q 운동에너지의 $\frac{2}{3}$배인 $2K$이고, 마찰 구간 I, II 2개를 통과하므로 왼쪽 위 $3h$와 오른쪽 h 높이에서의 에너지 차는 $4K$다.
두 지점에서 속력은 같고 높이 $2h$ 차이나므로 $2U = 4K, U = K$이다.
이를 이용하면 오른쪽 손풀이처럼
운동 에너지 / 중력 퍼텐셜 에너지를 하나의 문자로 나타낼 수 있다.
ㄱ. 등속운동하므로 중력 퍼텐셜 에너지 $2K$ 감소하는데 $2K = U$이므로
$mgd = mgh, h = d$ (O)
ㄴ. K일때 속력 v인데 p에서 운동에너지 $5K$이므로 속력 $\sqrt{5}v$ (O)
ㄷ. I에서 운동에너지 $3K$, q에서도 $3K$로 운동 에너지가 같다. (O)

예제16 ② // [아이디어] 물체-물체 분리 + 질량에 비례하는 힘

$6d$ 압축 과정에서 탄성 퍼텐셜 에너지 증가량이 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 3배라는 조건에서 $\frac{1}{2}k(6d)^2 = 3\times 6mgd$, $kd = mg$를 알 수 있다.

물체-물체 분리 상황에서도 탄성력 외의 힘이 질량에 비례하는 힘 밖에 없으면 그 때에도 자연상태에서 분리된다. 중력이 대표적이다.
따라서 분리 지점에서 탄성/중력 퍼텐셜 에너지가 운동에너지가 되므로
$\frac{1}{2}k(8d)^2 + 2mg8d = \frac{2m}{2}v^2$, $kd = mg$ 대입 후 정리하면 $mv^2 = 30mgh$이다.

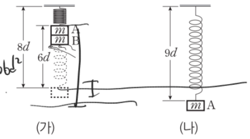
A,B 질량이 m으로 같으므로 분리 시점 A의 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2 = 15mgh$

d만큼 늘어나면 중력 퍼텐셜 $-mgh$, 탄성 퍼텐셜 $+\frac{1}{2}kd^2 = +\frac{1}{2}mgd$이고,

이들이 운동에너지로 변환되어 (나)에서 A의 운동에너지는 $(15+1-\frac{1}{2})mgd = \frac{31}{2}mgd$

<2021 10월 #20> 정답률 34.8%

그림 (가)와 같이 원래 길이가 $8d$인 용수철에 물체 A를 연결하고, 물체 B로 A를 $6d$만큼 밀어 올려 정지시켰다. 용수철을 압축시키는 동안 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지의 증가량은 A의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 3배이다. A와 B의 질량은 각각 m이다. 그림 (나)는 (가)에서 B를 가만히 놓았더니 A가 B와 함께 연직선상에서 운동하다가 B와 분리된 후 용수철의 길이가 $9d$인 지점을 지나는 순간을 나타낸 것이다.



(나)에서 A의 운동 에너지는? (단, 중력 가속도는 g이고, 용수철의 질량, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) 3점

① $\frac{29}{2}mgd$ ② $\frac{31}{2}mgd$ ③ $\frac{63}{4}mgd$ ④ $\frac{65}{4}mgd$ ⑤ $\frac{33}{2}mgd$

예제17 ⑤ // [아이디어] 같은 높이에서 가속도, 빗면 길이는 반비례

초기 상태에서 힘은 오른쪽 $4ma$, 왼쪽 $3ma$로 알짜힘 ma이므로 가속도는 $\frac{a}{3}$였다.

가속도 비가 $3:2$이므로 pq를 $2s$라 하면 rs는 $3s$이다.

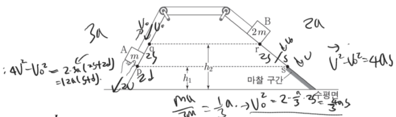
초기 상태에서 $\frac{a}{3}$로 pq $2s$ 이동했으니 q 통과속도 $v_0^2 = 2\frac{a}{3}2s = \frac{4}{3}as$이다.

왼쪽 빗면 p에서 수평면까지의 길이를 $2d$라고 하고, 질량 m인 A가 수평면에서의 운동에너지가 질량 $2m$인 B의 마찰구간 운동에너지의 2배려면 속력이 $2:1$여야 한다.
A가 q에 도달했을 때 B는 rs가 $3s$이므로 s만큼 마찰 구간 진입까지 거리가 있다.
A의 수평 도달 속도를 $2v$, B의 마찰구간 진입 속도를 v라 하면
A의 q->수평면 운동은 $4v^2 - v_0^2 = 2\times 3a(2s+2d)$, B의 2s->s 운동은 $v^2 - v_0^2 = 4as$

$v_0^2 = \frac{4}{3}as$와 연립한 후 정리하면(손풀이 참고) $8s = 12d$, $s:d = 3:2$이다. $\therefore \frac{h_2}{h_1} = \frac{5}{2}$

<2023 9월 #20> 정답률 20.9%
- 오답률 1위

그림은 질량이 각각 m, $2m$인 물체 A, B를 실로 연결하고 서로 다른 빗면의 점 p, r에 정지시킨 모습을 나타낸 것이다. A를 가만히 놓았더니 A가 점 q를 지나는 순간 실이 끊어지고 A, B는 빗면을 따라 가속도의 크기가 각각 $3a$, $2a$인 등가속도 운동을 한다. B는 마찰 구간이 시작되는 점 s부터 등속도 운동을 한다. A가 수평면에 닿기 직전 A의 운동 에너지는 마찰 구간에서 B의 운동 에너지의 2배이다. p와 s의 높이는 h_1로 같고, q와 r의 높이는 h_2로 같다.



$\frac{h_2}{h_1}$는? (단, 실의 질량, 물체의 크기, 공기 저항, 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.) 3점

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

예제18 ④ // [아이디어] 에너지의 표시 및 변수단순화

용수철을 압축시켰다 풀 때, 두 물체의 운동량이 같으므로 속력 비는 질량에 반비례 하여 $3:1$이다. 속력을 각 $3v, v$라고 하고,

$mgh = U, \frac{3}{2}mv^2 = K$라 하면 A의 분리 직후 에너지는 $3K+U$, B는 $K+3U$이다.

운동 과정에서 A의 최대 중력 퍼텐셜 에너지는 최대 높이인 $3h$일 때 $3U$이고,
최대 운동에너지는 $3K+U$가 모두 운동에너지 일 때이다.
조건에 의해 운동에너지 최댓값이 중력 퍼텐셜 에너지 최댓값의 4배이므로

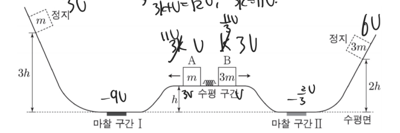
$3K+U = 12U, 3K = 11U$이다. 따라서 충돌 전 A,B의 에너지는 $12U, \frac{20}{3}U$이다.

마찰 구간 I, II를 각 지난 후의 A,B의 에너지는 $3U, 6U$이다.

따라서 손실된 에너지 $W_I : W_{II} = 9U : \frac{2}{3}U$이므로 $\frac{W_I}{W_{II}} = \frac{27}{2}$이다.

<2025 9월 #20> 정답률 49.6%

그림과 같이 수평면으로부터 높이가 h인 수평 구간에서 질량이 각각 m, $3m$인 물체 A와 B로 용수철을 압축시킨 후 가만히 놓았더니, A, B는 각각 수평면상의 마찰 구간 Ⅰ, Ⅱ를 지나 높이 $3h$, $2h$에서 정지하였다. 이 과정에서 A의 운동 에너지의 최댓값은 A의 중력 퍼텐셜 에너지의 최댓값의 4배이다. A, B가 각각 Ⅰ, Ⅱ를 한 번 지날 때 손실되는 역학적 에너지는 각각 $W_Ⅰ$, $W_Ⅱ$이다.



$\frac{W_Ⅰ}{W_Ⅱ}$은? (단, 수평면에서 중력 퍼텐셜 에너지는 0이고, A와 B는 동일 연직면상에서 운동한다. 물체의 크기, 용수철의 질량, 공기 저항과 마찰 구간 외의 모든 마찰은 무시한다.)

① 9 ② $\frac{21}{2}$ ③ 12 ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 15