2027학년도 한국융합과학기술인재원 신입생 선발 수학역량평가 예시 답안

1-1번 문항

시행 중 (2, 2) 또는 (4, 4)의 +칸을 누른 횟수를 Y라 할 때, $X=2+Y$이다. 시행을 n번 반복했을 때, Y의 범위는 $0 \le Y \le n$이고, 네 개의 +칸 중 (2, 2) 또는 (4, 4)의 +칸을 누를 확률은 $\frac{1}{2}$이므로, $\mathrm{P}(Y=k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}(2+k)\mathrm{P}(Y=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(2+k){}_n\mathrm{C}_k=2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k$이다. $k=0$일 때, $k{}_n\mathrm{C}_k=0$이므로,

$\sum_{k=0}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\times 2^{n-1}$이다. 따라서, $\mathrm{E}(X)=2+\frac{n}{2}$이다.

1-2번 문항

$f(3,\ 3)=5$가 되기 위해서 +칸은 총 네 번 눌려야 한다. 이때, $f(1,\ 3)+f(3,\ 1)+f(5,\ 1)$의 최솟값과 최댓값은 각각 3, 11이다. 따라서, $\sum_{k=4}^{10}g(k)=($ $f(3,\ 3)=5$인 경우의 수 $)-g(3)-g(11)$이다.

전체 경우의 수는 주머니 1에서 뽑은 수가 (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2), (1, 3), (4)이고 이에 따라 주머니 2에서 카드를 뽑는 경우의 수이다. 경우의 수는 (1, 1, 1, 1)이 $4^4=256$, (1, 1, 2)가 $\frac{3!}{1!1!2!}\times 4^2\times {}_4\mathrm{C}_2=288$, (2, 2)가 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=36$, (1, 3)이 $2!\times 4\times {}_4\mathrm{C}_3=32$, (4)가 1이므로, $256+288+36+32+1=613$이다.

$f(1,\ 3)+f(3,\ 1)+f(5,\ 1)=3$이 되려면 (4, 4)의 +칸만 네 번 눌려야 한다. 따라서, 주머니 1에서 뽑은 수는 모두 1이고, 주머니 2에서 뽑은 수는 44이므로 $g(3)=1$이다.

$f(1,\ 3)+f(3,\ 1)+f(5,\ 1)=11$이 되려면 (2, 2) 또는 (4, 2)의 +칸만 눌려야 한다. 즉, 주머니 1에서 뽑은 수는 (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2)가 가능하다. 주머니 1에서 뽑은 수가 1인 경우, 주머니 2에서 22 또는 42를 뽑아야 하고, 주머니 1에서 뽑은 수가 2인 경우, 주머니 2에서 22와 44를 뽑아야 한다. 따라서 경우의 수는 (1, 1, 1, 1)이 $2^4=16$, (1, 1, 2)가 $\frac{3!}{1!1!2!}\times 2^2=12$, (2, 2)가 1이므로 $g(11)=16+12+1=29$이다.

따라서, $\sum_{k=4}^{10}=613-1-29=583$이다.

<table>
<tr><th colspan="3">문항</th><th>채점 기준</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1</td><td rowspan="3">1</td><td>확률 변수 X의 값에 영향을 주는 요인을 올바르게 구함</td><td>2점</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}(X)$를 $\sum$를 이용하여 올바르게 나타냄</td><td>2점</td></tr>
<tr><td>이항 정리를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$를 올바르게 구함</td><td>4점</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2</td><td>k의 범위를 올바르게 구하고 여사건을 이용해야 함을 올바르게 서술함</td><td>2점</td></tr>
<tr><td>전체 경우의 수를 올바르게 구함</td><td>4점</td></tr>
<tr><td>$g(3)$의 값을 올바르게 구함</td><td>2점</td></tr>
<tr><td>$g(11)$의 값을 올바르게 구함</td><td>3점</td></tr>
<tr><td>$\sum_{k=4}^{10}g(k)$의 값을 올바르게 구함</td><td>1점</td></tr>
</table>

2027학년도 한국융합과학기술인재원 신입생 선발 수학역량평가 예시 답안

2-1번 문항

A(0, 0)이라 하면, B$(-3,\ -3\sqrt{3})$, C$(3,\ -3\sqrt{3})$이므로, 두 직선 AB, AC는 각각 $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$로 나타낼 수 있다. 원 O의 중심 O를 O$(t,\ 0)$이라 하면 $O:(x-t)^2+y^2=16$이고, 원과 두 직선 두 직선 AB, AC의 교점 P, Q의 x좌표 p, q를 구하면 $p=\dfrac{t-\sqrt{64-3t^2}}{4}$, $q=\dfrac{t+\sqrt{64-3t^2}}{4}$이다. P$(p,\ \sqrt{3}p)$, Q$(q,\ -\sqrt{3}q)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(p-q)^2+3(p+q)^2}=\sqrt{\dfrac{64-3t^2}{4}+\dfrac{3}{4}t^2}=4$이다. 원 O에 내접하는 삼각형 PQR에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{PRQ})}=8$이므로, $\sin(\angle\mathrm{PRQ})=\dfrac{1}{2}$이다. $\sin(\angle\mathrm{PRQ})=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{15}$이므로, $\overline{\mathrm{PR}}=2\sqrt{15}$이다.

2-2번 문항

점 P에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 L라 하자. 피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{OL}}^2+\overline{\mathrm{PL}}^2=16$, $\overline{\mathrm{RL}}^2+\overline{\mathrm{PL}}^2=(\overline{\mathrm{OL}}+4)^2+\overline{\mathrm{PL}}^2=60$를 얻고, 두 식을 연립하면 $\overline{\mathrm{OL}}=\dfrac{7}{2}$, $\overline{\mathrm{PL}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{AL}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PL}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로, $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{OL}}+\overline{\mathrm{OR}}-\overline{\mathrm{AL}}=\dfrac{15-\sqrt{5}}{2}$이다.

문항		채점 기준	
2	1	$\overline{\mathrm{PQ}}$의 값이 일정함을 보이고 그 값을 올바르게 구함	4점
		$\sin\angle\mathrm{PRQ}$의 값을 올바르게 구함	3점
		$\overline{\mathrm{PR}}$의 값을 올바르게 구함	2점
	2	$\overline{\mathrm{AR}}$의 값을 올바르게 구함	6점

3번 문항

$\sum_{n=1}^{3} na_n = 3n$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$만을 원소로 가지는 집합을 U_n이라 하자. $M=3n$이기 위해서 집합 S는 U_n의 원소를 적어도 하나 포함하고, n보다 큰 모든 자연수 m에 대하여 U_m의 원소는 반드시 포함하지 않아야 한다. 3 이상의 자연수 k에 대하여 $f(k)=n(U_k)$이라 하고, $g(k)=\sum_{n=2}^{k} f(n)$라 하자. n보다 작은 2 이상의 모든 자연수 o에 대하여 S는 S는 U_n의 원소만을 원소로 갖거나 U_n, U_o의 원소를 모두 가질 수도 있다. U_n의 원소만을 원소로 가질 경우, 원소가 최소 두 개 이상이므로 S의 개수는 $2^{f(n)}-f(n)-1$이고, U_n, U_o의 원소를 모두 가지는 경우, S의 개수는 $\{2^{f(n)}-1\}\times\{2^{g(n-1)}-1\}$므로, 두 경우의 수를 더하면 $\alpha_n = 2^{g(n)}-2^{g(n-1)}-f(n)$이다.
$x=a_3$, $y=a_2+a_3$, $x=a_1+a_2+a_3$라 하면, $\sum_{n=1}^{3} na_n = x+y+z$이므로, $x+y+z=3n$이고 $x<y<z$인 세 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수가 $f(n)$이므로, 합이 $3n$인 서로 다른 세 자연수의 순서쌍의 개수를 구하면 된다.

$a+b+c=3n$을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{3n-3} = \dfrac{9n^2-9n+2}{2}$이다.
세 자연수 중 두 수만 같은 경우의 수는 $2a+b=3n$을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 a, b의 순서쌍의 개수에 ${}_3\mathrm{C}_2$를 곱한 것과 같다. $b \geq 1$이므로 $1 \leq a \leq \dfrac{3n-1}{2}$, $a \neq n$이므로, n이 짝수일 때 두 자연수 a, b의 순서쌍의 개수는 $\dfrac{3n-4}{2}$, n이 짝수일 때 순서쌍의 개수는 $\dfrac{3n-3}{2}$이다. 또한, 세 수 모두 같은 경우의 수는 1이다.
따라서 n이 짝수일 때 $f(n)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{9n^2-9n+2}{2}-3\times\dfrac{3n-4}{2}-1\right)=\dfrac{3n^2-6n+4}{4}$이고
n이 홀수일 때 $f(n)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{9n^2-9n+2}{2}-3\times\dfrac{3n-3}{2}-1\right)=\dfrac{3n^2-6n+3}{4}$이다.
$f(n)=\dfrac{6n^2-12n+7+(-1)^n}{8}$로 나타낼 수 있으므로, $g(n)=\sum_{k=2}^{n} f(k)=\dfrac{4n^3-6n^2+4n+(-1)^n-1}{16}$이다.
따라서, $\alpha_n = 2^{\frac{4n^3-6n^2+4n-1+(-1)^n}{16}}-2^{\frac{4n^3-18n^2+28n-15-(-1)^n}{16}}-\dfrac{6n^2-12n+7+(-1)^n}{8}$이다.

문항	채점 기준	
3	n이 홀수, 짝수일 때를 나눠서 $\sum_{n=1}^{3} na_n = 3n$을 만족시키는 a_n의 개수를 올바르게 구함	10점
	$M=3n$이기 위한 조건을 올바르게 서술함	3점
	중복 순열을 이용하여 α_n의 형태를 올바르게 추론함	4점
	α_n의 일반항을 올바르게 구함	6점

2027학년도 한국융합과학기술인재원 신입생 선발 수학역량평가 예시 답안

4-1번 문항

실이 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 지점의 못에만 걸릴 경우, 연필이 그리는 도형은 두 초점이 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$이고 장축의 길이가 11인 타원이다. 또한, 실이 $(0,\ 4)$와 나머지 한 지점의 못에 걸리는 경우, 연필이 그리는 도형은 초점이 두 지점이고 장축의 길이가 8인 타원이다. 함수의 성질에 의해 하나의 x값에 대응하는 y값은 하나이다. 따라서, k의 최솟값은 도형 C 위의 점 중 접선이 y축과 평행한 점의 y좌표이고, 그 점은 장축의 길이가 8인 타원 위의 점이다. 도형 C는 y축에 대하여 대칭이므로, $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=8$ 위의 점 접선이 y축과 평행한 점의 y좌표를 찾으면 된다. 음함수 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=8$을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}\left\{y+(x+3)\dfrac{dx}{dy}\right\}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}}\left\{y-4+x\dfrac{dx}{dy}\right\}=0$이고, 이 점에서 $\dfrac{dx}{dy}=0$이어야 하므로

$\dfrac{y}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\dfrac{4-y}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}}$이다. $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=8$이므로, 두 식을 연립하면

$x=2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}$, $y=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서, k의 최솟값은 $2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

4-2번 문항

사각기둥을 정면에서 바라보면 점 P는 P_0에서 출발해 초당 1의 속력으로 오른쪽으로 움직이고, 점 Q는 Q_0에 정지하고 있는 것처럼 보일 것이다. 또한, 평면 α를 보면 기울기가 $-\dfrac{3}{4}$인 직선이 아래로 내려오는 것처럼 보일 것이다. 경과 시간을 t초라 하면, $\mathrm{P}(t,\ 2)$, $\mathrm{Q}(0,\ 0)$, α는 직선 $y=-\dfrac{3}{4}x+2-2t$로 표현할 수 있다. 선분 PQ는 $y=\dfrac{2}{t}x$로 나타낼 수 있으므로, S의 좌표를 구하면 $\left(\dfrac{8t-8t^2}{8+3t},\ \dfrac{16-16t}{8+3t}\right)$이다. 따라서, 점 S는 선분 PQ를 $\dfrac{22t}{8+3t}:\dfrac{16-16t}{8+3t}=11t:8-8t$로 내분한다. 사각기둥의 밑면을 정면으로 바라보면 두 점 P, Q는 같은 점에서 출발하여 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 움직이는 것처럼 보이므로 $\mathrm{P}(t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ -t)$로 놓을 수 있다. 이때, 선분 PQ를 $11t:8-8t$로 내분하는 점 S의 자취가 D_1이다. 따라서, 점 S의 좌표를 구하면 $\left(\dfrac{8t-8t^2}{8+3t},\ -\dfrac{11t^2}{8+3t}\right)$이므로, D_1은 매개변수 $t(0\le t\le 1)$로 나타내어진 곡선 $x=\dfrac{8t-8t^2}{8+3t}$, $y=-\dfrac{11t^2}{8+3t}$이다.

이때, 접선이 사각기둥의 밑면을 두 개의 직사각형으로 나누기 위해서 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ 중 하나가 0이어야 한다.

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-24t^2-128t+64}{(8+3t)^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{176t+33t^2}{(8+3t)^2}$이므로, $0\le t\le 1$인 t를 구하면 $t=\dfrac{-8+2\sqrt{22}}{3}$이다.

따라서, $a=\dfrac{-8+2\sqrt{22}}{3}$이다.

문항		채점 기준	
4	1	타원의 작도 원리를 이용하여 도형 C를 음함수 형태의 곡선으로 올바르게 나타냄	4점
		k의 최솟값이 도형 C 위의 점 중 접선이 y축과 평행한 점의 y좌표임을 함수의 정의를 이용해 올바르게 서술함	2점
		도형 C를 나타내는 음함수를 올바르게 미분함	1점
		k의 최솟값을 올바르게 구함	3점
	2	공간 도형을 올바르게 단면화하여 두 점 P, Q의 위치, 평면 α의 방정식을 시각 t에 대하여 올바르게 나타냄	5점
		점 S의 위치와 내분점을 이용하여 도형 D_1을 매개변수 t로 정의된 함수로 올바르게 나타냄	4점
		접선이 사각기둥의 밑면을 두 개의 직사각형으로 나누는 조건을 올바르게 파악함	1점
		매개변수의 미분을 이용하여 a의 값을 올바르게 구함	2점

2027학년도 한국융합과학기술인재원 신입생 선발 수학역량평가 예시 답안

5-1번 문항

$x^2+2xy+y^4=0$에서 근의 공식을 이용하여 x를 y에 대하여 나타내면 $x=-y\pm\sqrt{y^2-y^4}$이다. 해당 곡선이 정의되기 위해서는 $y^2-y^4\ge 0$이어야 하므로 $-1\le y\le 1$이다. 또한, $-y-\sqrt{y^2-y^4}\le -y+\sqrt{y^2-y^4}$이므로 주어진 닫힌 도형은 두 곡선 $x=-y-\sqrt{y^2-y^4}$, $x=-y-\sqrt{y^2-y^4}$으로 둘러싸여 생긴 영역이다.

따라서, 도형의 넓이는 $\int_{-1}^{1}2\sqrt{y^2-y^4}\,dy=\int_{-1}^{1}2|y|\sqrt{1-y^2}\,dy=2\int_{0}^{1}2y\sqrt{1-y^2}\,dy=2\left[\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$이다.

5-2번 문항

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 $(0\le x\le \pi)$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하면 $S=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\ln(3+\sin^2 x)}dx$이다.

연속함수 $k(x)$에 대하여 $\int_0^a k(x)dx=\int_0^a k(a-x)dx$이므로, $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\ln(3+\sin^2 x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\ln(3+\sin^2 x)}dx$이다.

따라서, $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\ln(3+\sin^2 x)}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\ln(3+\sin^2 x)}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\ln(4-\cos^2 x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{\ln(4-\cos^2 x)}dx$이다.

$\cos x=t$라 하면, $-\sin x\,dx=dt$이고, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 각각 $t=1$, $t=0$이므로,

$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{\ln(4-\cos^2 x)}dx=\int_0^1\frac{\pi}{\ln(4-t^2)}dt$이다. 함수 $h(x)$의 역함수를 구하면 $y=\frac{\pi}{\ln(-x^2+2x+3)}-\frac{\pi}{2\ln 2}$이다. 이 역함수의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이 T는 함수 $h(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이와 같다. 곡선 $y=-x^2+2x+3$은 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$T=\int_0^1\left\{\frac{\pi}{\ln(-x^2+2x+3)}-\frac{\pi}{2\ln 2}\right\}dx=\int_1^2\left\{\frac{\pi}{\ln(-x^2+2x+3)}-\frac{\pi}{2\ln 2}\right\}dx$이다. $u=x-1$라 하면, $du=dx$이고,

$x=1$, $x=2$일 때 각각 $u=0$, $u=1$이므로 $T=\int_0^1\left\{\frac{\pi}{\ln(4-u^2)}-\frac{\pi}{2\ln 2}\right\}du$이다. $B-A=S-T$이므로,

$B-A=\frac{\pi}{2\ln 2}$이다.

<table>
<tr><th colspan="2">문항</th><th colspan="2">채점 기준</th></tr>
<tr><td rowspan="6">5</td><td rowspan="3">1</td><td>x를 y에 대한 식으로 올바르게 나타냄</td><td>3점</td></tr>
<tr><td>닫힌 도형이 어떻게 생기는지 올바르게 서술함</td><td>3점</td></tr>
<tr><td>정적분을 이용하여 넓이를 올바르게 구함</td><td>2점</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>적분의 대칭성을 이용하여 정적분의 형태를 올바르게 변형함</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>치환적분과 역함수를 이용하여 두 함수 $f(x)$, $h(x)$의 정적분값의 관계를 올바르게 서술함</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>$B-A$의 값을 올바르게 구함</td><td>2점</td></tr>
</table>