

제2 교시

수학 영역

5 지선 다형

1. $\sqrt[3]{3} \times 9^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$3^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^1$$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2점]

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \rightarrow f'(1) = 5$$

3. 첫째항이 8이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 a_3 = 2 a_2 a_4$$

를 만족시킬 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$$8 \times 8r^2 = 2 \times 8r \times 8r^3$$

$$1 = 2r^2 \quad \therefore r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_5 = 8r^4 = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x < 3) \\ x + 2a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$\text{연속} \quad \begin{aligned} f(3-0) &= 9+a \\ f(3) &= f(3+0) = 3+2a \end{aligned} \quad \therefore a = 6$$

5. 함수 $f(x) = (x^2 - x)(2x^2 - 5)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$$f(x) = (2x-1)(2x^2-5) + (x^2-1)(4x)$$

$$f'(2) = 3 \times 3 + 2 \times 8 = 25$$

제3사분면

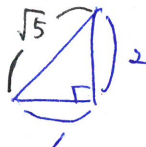
6. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ 에 대하여 $\tan(\pi - \theta) = -2$ 일 때,
 $\cos \theta - \sin \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0
 ④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\rightarrow \tan \theta = 2$$

$$\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow \cos \theta - \sin \theta &= -\frac{\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

7. 곡선 $y = x^3 - 6x + 7$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$y' = 3x^2 - 6 \xrightarrow{x=1} y' = -3$$

$$\text{접선의 방정식: } y - 2 = -3(x - 1)$$

$$\therefore y = -3x + 5$$

8. 두 실수 a, b 가

① $3a+b=\log_3 45$, ② $a+b=\log_9 5$

를 만족시킬 때, $a-b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

✓ ① - ② $2a = \log_3 45 - \log_9 5$

✓ ② $\times 3$ - ① $2b = 3\log_9 5 - \log_3 45$

$\Rightarrow 2a - 2b = 2\log_3 45 - 4\log_9 5$
 $a - b = \log_3 45 - 2\log_9 5 \quad \log_3 5$
 $= \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = 2$

9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치가 각각

$x_1 = -t^3 + 7t^2 - 10t$, $x_2 = t^2 + 2t$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\rightarrow v_1 = -3t^2 + 14t - 10$
 $v_2 = 2t + 2$

$3t^2 - 12t + 12 = 0$ $\therefore t = 2$
 $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t-2)^2 = 0$

$\rightarrow t = 2$ 일 때,

$x_1 = -8 + 28 - 20 = 0$
 $x_2 = 4 + 4 = 8$

$\therefore x_2 - x_1 = 8$

10. 두 양수 a, b 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$ 에서 정의된 함수

$f(x) = 3\sin \frac{\pi x}{a} + b$

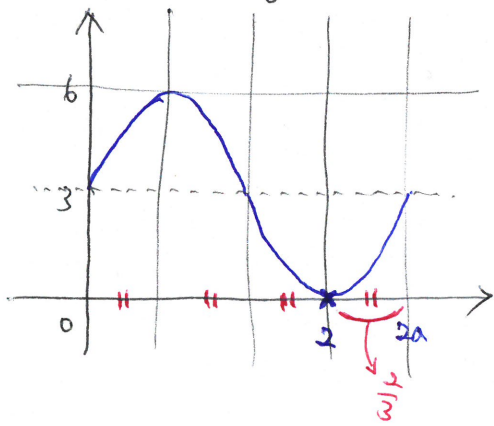
의 그래프가 x 축과 오직 한 점 $(2, 0)$ 에서 만날 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

✓ 주기 = $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$

✓ $y = 3\sin \frac{\pi x}{a}$ $y = 3\sin \frac{\pi x}{a} + b$
 3 $3+b$

-3 $-3+b$ $b=3$



$\rightarrow 2 + \frac{2}{3} = 2a$ $\therefore a = \frac{4}{3}$

11. 이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x+3)f(x) = \int_{-3}^x (4f(t) - 2t^2) dt$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

✓ 미분. $f(x) + (x+3)f'(x) = 4f(x) - 2x^2$

$$3f(x) - (x+3)f'(x) - 2x^2 = 0.$$

x 에 대한 항등식 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow 3(ax^2 + bx + c) - (x+3)(2ax + b) - 2x^2 = 0$$

$$3ax^2 + 3bx + 3c - 2ax^2 - bx - 6ax - 3b - 2x^2 = 0$$

$$(a-2)x^2 + (2b-6a)x + (3c-3b) = 0$$

$$a=2$$

$$2b-12=0$$

$$3c-18=0$$

$$b=6$$

$$c=6$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 6x + 6$$

$$f(2) = 26$$

12. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열

$\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라

할 때, $M-m$ 의 값은? [4점]

모든 자연수 n 에 대하여 $3a_n^2 + 2na_n - 8n^2 = 0$ 이다.

- ① 540 ② 550 ③ 560 ④ 570 ⑤ 580

$$(3a_n - 4n)(a_n + 2n) = 0.$$

$$\rightarrow a_n = \frac{4}{3}n \text{ or } -2n$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \text{ or } -2$$

$$a_2 = \frac{8}{3} \text{ or } -4$$

$$a_3 = 4 \text{ or } -6$$

$$a_4 = \frac{16}{3} \text{ or } -8$$

$$a_5 = \frac{20}{3} \text{ or } -10$$

$$a_6 = 8 \text{ or } -12$$

⋮

$$a_9 = 12 \text{ or } -18$$

⋮

$$a_{12} = 16 \text{ or } -24$$

⋮

$$a_{30} = 40 \text{ or } -60$$

합 M

합 m

$$\Rightarrow M - m = (4 + 8 + 12 + \dots + 40)$$

$$- (-6 - 12 - 18 - \dots - 60)$$

$$= 550$$

13. 상수 $a(a > 1)$ 에 대하여 최고차항의 계수가 1인

삼차함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = x(x-a)(x-a-1)$$

$$f(0) = f(a) = f(a+1) = 0$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2x$ 가 세 점 O, P, Q($OP < OQ$)에서 만난다. 두 점 R(a, 0), S(a+1, 0)에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 두 선분 OP, OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 RS로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $OQ = 5\sqrt{5}$ 일 때, A-B의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점]

- ① $\frac{61}{12}$ ② $\frac{31}{6}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{65}{12}$

* $y=f(x)$ 와 $y=2x$

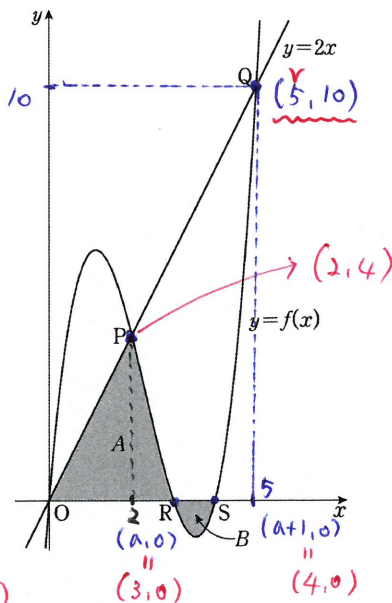
교점 O, P, Q

$$x(x-a)(x-a-1) = 2x$$

$$x=5 \text{ (49)}$$

$$5(5-a)(4-a) = 10$$

$$\therefore a=3$$



$$\Rightarrow f(x) = x(x-3)(x-4)$$

$$A = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} + \int_2^3 f(x) dx$$

$$B = - \int_3^4 f(x) dx$$

$$\therefore A-B = 4 + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$$

$$= 4 + \int_2^4 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx$$

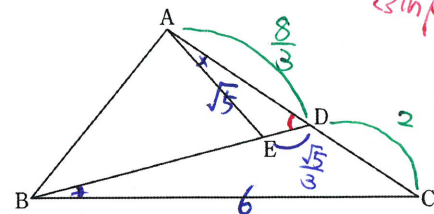
$$= \frac{16}{3}$$

14. 그림과 같이 $\overline{BC} = 6$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AC를

4:3으로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 BD 위의 점 E가

$$\angle DAE = \angle DBC, \sin(\angle DAE) : \sin(\angle EDA) = 1:3 = \overline{DE} : \overline{AE}$$

을 만족시킨다. $\overline{AE} = \sqrt{5}$ 일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{180}{11}\pi$

② $\frac{195}{11}\pi$

③ $\frac{210}{11}\pi$

④ $\frac{225}{11}\pi$

⑤ $\frac{240}{11}\pi$

$$\triangle BCD \quad \frac{\overline{CD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\pi - \beta)} \quad \sin \beta = 3 \sin \alpha$$

$$\therefore \overline{CD} = 2$$

$$\triangle ADE$$

$$\frac{5}{9} = 5 + \frac{64}{9} - 2 \times \sqrt{5} \times \frac{8}{3} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{13}{6\sqrt{5}} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \triangle BCD \quad \frac{\overline{CD}}{\sin \alpha} = \frac{2}{\frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \rightarrow \text{넓이} = \frac{180}{11}\pi$$

15. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x |f(t)| dt + \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

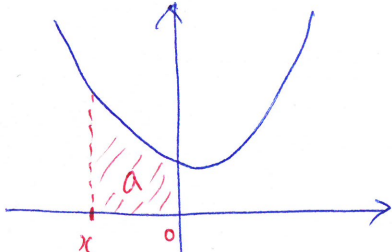
라 하자. 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $g(x)=0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 범위는 $-7 \leq x \leq 0$ 이다.
 (나) 양수 p 에 대하여 $g(x)=81$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 범위는 $4p \leq x \leq 7p$ 이다.

$f(-10)$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

* $y=f(x)$ 가 x 평면이 없으면, (x 축 위에 떠있다)



x 가 음수이면

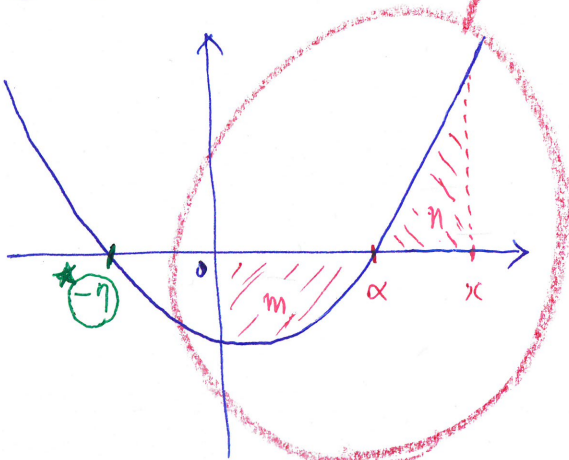
$$g(x) = - \int_x^0 f(t) dt + \left| - \int_x^0 f(t) dt \right|$$

$$= -a - (-a) = 0.$$

⇒ 따라서, 음수 전체에서 $g(x)=0$ 이다.

⑦ 조건 만족할 수 없다.

* $y=f(x)$ 그래프는?



단답형

16. 방정식

$$\log_4(x+2) + \log_4 2 = \log_2(x-2)$$

$$\log_4(x+2) + \log_4 2 = \log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

$$\log_4 2(x+2) = \log_4 (x-2)^2$$

$$2x+4 = x^2-4x+4$$

$$x^2-6x=0 \quad x(x-6)=0$$

$$\therefore x=6$$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + C$$

$$x=1 \quad 3 = 2 - 1 + C \quad C=2$$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2$$

$$f(2) = 16 - 4 + 2 = 14$$

17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 6x^2 - 2x$ 이고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

음수, x 가 양수이면

⇒ NEXT

$$g(x) = \int_0^x -f(t) dt + \int_x^x f(t) dt + \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

$$= m + n + |-m + n|$$

$$m > n \text{ 이면, } g(x) = m + n - (-m + n) = 2m$$

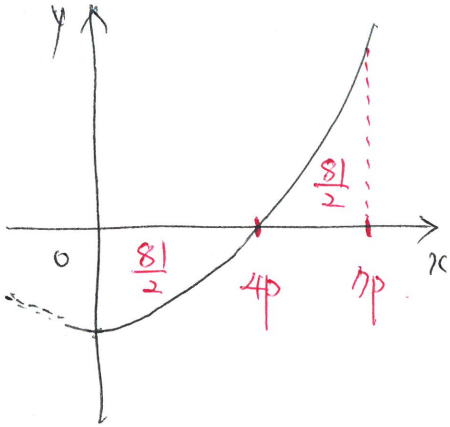
$$m < n \text{ 이면, } g(x) = m + n + (-m + n) = 2n$$

* x 값이 증가함에 따라.

즉, m 값이와 n 값이 같아질 때까지.

$$g(x) = 2m = 2 \int_0^x f(t) dt = 81$$

따라서, 51 과 n 이 같을 때 $y=f(x)$ 를 그려 보자.



$$\Rightarrow f(x) = a(x+7)(x-4p)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{7p} f(x) dx &= 0 = \int_0^{7p} (ax^2 + a(7-4p)x - 28ap) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a(7-4p)x^2 - 28apx \right]_0^{7p} \end{aligned}$$

좌변이 0이 되므로, $\frac{49}{6}ap^2(2p-3) = 0$. * a 와 p 는 양수

$$\therefore \frac{49}{6}ap^2 \quad 2p-3=0 \quad \therefore p = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= a(x+7)(x-6) \\ &= ax^2 + ax - 42a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 (ax^2 + ax - 42a) dx &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}ax^2 - 42ax \right]_0^6 \\ &= 72a + 18a - 252a = -162a = -\frac{81}{2} \end{aligned}$$

$\therefore a = -\frac{1}{4}$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{4}(x+7)(x-6) \Rightarrow f(-10) = 12}$$

18. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^7 (a_n - 2)(b_n - 2) = 60, \quad \sum_{n=1}^7 (a_n + b_n) = 44$$

일 때, $\sum_{n=1}^7 a_n b_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{n=1}^7 (a_n b_n - 2(a_n + b_n) + 4) = 60.$$

$$\sum_{n=1}^7 a_n b_n - 2 \sum_{n=1}^7 (a_n + b_n) + \sum_{n=1}^7 4 = 60$$

44 4 × 7

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^7 a_n b_n - 88 + 28 = 60$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 a_n b_n = 120.$$

19. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

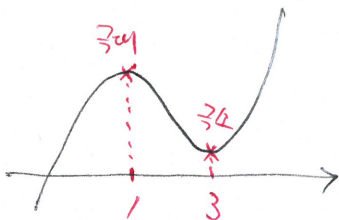
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$$

라 하자. 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 갖고, 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 8이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(3) = 27 - 36 + a = 0 \quad a = 9$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$



$$f(1) = 4 + b$$

$$f(3) = b$$

$$\rightarrow f(1) + f(3) = 4 + 2b = 8$$

$$\therefore b = 2$$

20. 상수 a 에 대하여 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는 함수

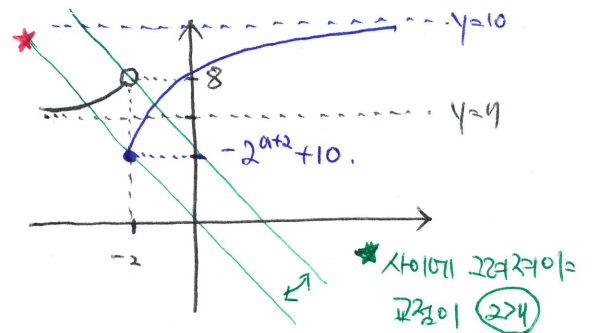
$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} + 7 & (x < -2) \rightarrow (-2, 8) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a} + 10 & (x \geq -2) \rightarrow (-2, -2^{a+2} + 10) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

직선 $x+2^a y - t = 0$ 이 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

$g(t)=2$ 를 만족시키는 t 의 최솟값이 함수 $f(x)$ 의 최솟값과 같도록 하는 모든 2^a 의 값의 곱을 구하시오. [4점]

이 점이
"y=η"보다
밑에 ...



$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2^a}x + \frac{t}{2^a} \quad (\because 2^a > 0)$$

기울기 음수. y절편 양수.

가 값이 최솟값이 되려면, $(-2, -2^{a+2} + 10)$ 을 지나갈 때이다.

$$-2^{a+2} + 10 = \frac{2}{2^a} + \frac{t}{2^a}$$

$$-2^{2a+2} + 10 \cdot 2^a = 2 + t$$

$$\therefore t = -2^{2a+2} + 10 \cdot 2^a - 2$$

$\Rightarrow f(x)$ 의 최솟값

$$-2^{a+2} + 10 = -2^{2a+2} + 10 \cdot 2^a - 2$$

$$4 \cdot 2^{2a} - 14 \cdot 2^a + 12 = 0$$

$$2 \cdot (2^a)^2 - 7 \cdot 2^a + 6 = 0 \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2^a = \frac{3}{2} \text{ or } 2$$

$$\frac{3}{2} \times 2 = 3$$

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow k} \frac{2x^2 f(x) - (f(k))^2}{x-k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{(f(x))^2 - (f(k))^2}{x-k}$$

을 만족시키는 실수 k 는 $t, -t (t > 1)$ 뿐이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 17일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

✓ ① $2k^2 f(k) - f(k)^2 = 0$.

$f(k) (2k^2 - f(k)) = 0$.

→ $f(k) = 0$ or $2k^2$ (★ $f(k)$ 값이 17보다 작을 수가 없다)

① = ② (★ 3피달 적용)

$4k f(k) + 2k^2 f'(k) = 2 f(k) \cdot f'(k)$

$8k^3 + 2k^2 f'(k) = 4k^2 f'(k)$

($k \neq 0$) $8k^3 = 2k^2 f'(k)$

$4k = f'(k)$

✓ ③ $f(x) = 2x^2, f(-x) = 2x^2$

$f'(x) = 4x, f'(-x) = -4x$

$f(x) - 2x^2 = (x-x)(x+x)(x^2+ax+b)$

→ $f'(x) = (x+x)(x^2+ax+b)$

+ $(x-x)(x^2+ax+b)$

+ $(x-x)(x+x)(2x+a)$

★ $f'(x) = 2x(x^2+ax+b) = 4x$

$f'(-x) = -2x(x^2-ax+b) = -4x$

22. 실수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$a_1 = 3$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} |a_n + n| & (a_n < 0) \\ a_n - 10 + k & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

이다.

$a_1 \times a_5 = 0$ 이 되도록 하는 k 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라

할 때, $M+m = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

⇒ NEXT

★ $\begin{cases} x^2 + ax + b = 2 \\ x^2 - ax + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -x^2 + 2 \\ 2ax = 0 \end{cases} \therefore a = 0$

$\Rightarrow f(x) = (x-x)(x+x)(x^2-x^2+2) + 2x^2$
 $= x^4 - 2(x^2-1)x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 1$
 $= (x^2-1)^2 + 2x^2 - 1$

$\therefore f(x) = (x^2 - (x^2-1))^2 + 2x^2 - 1$

따라서, 최솟값 $2x^2 - 1 = 17 \quad x^2 = 9$

$\therefore x = 3, -3$

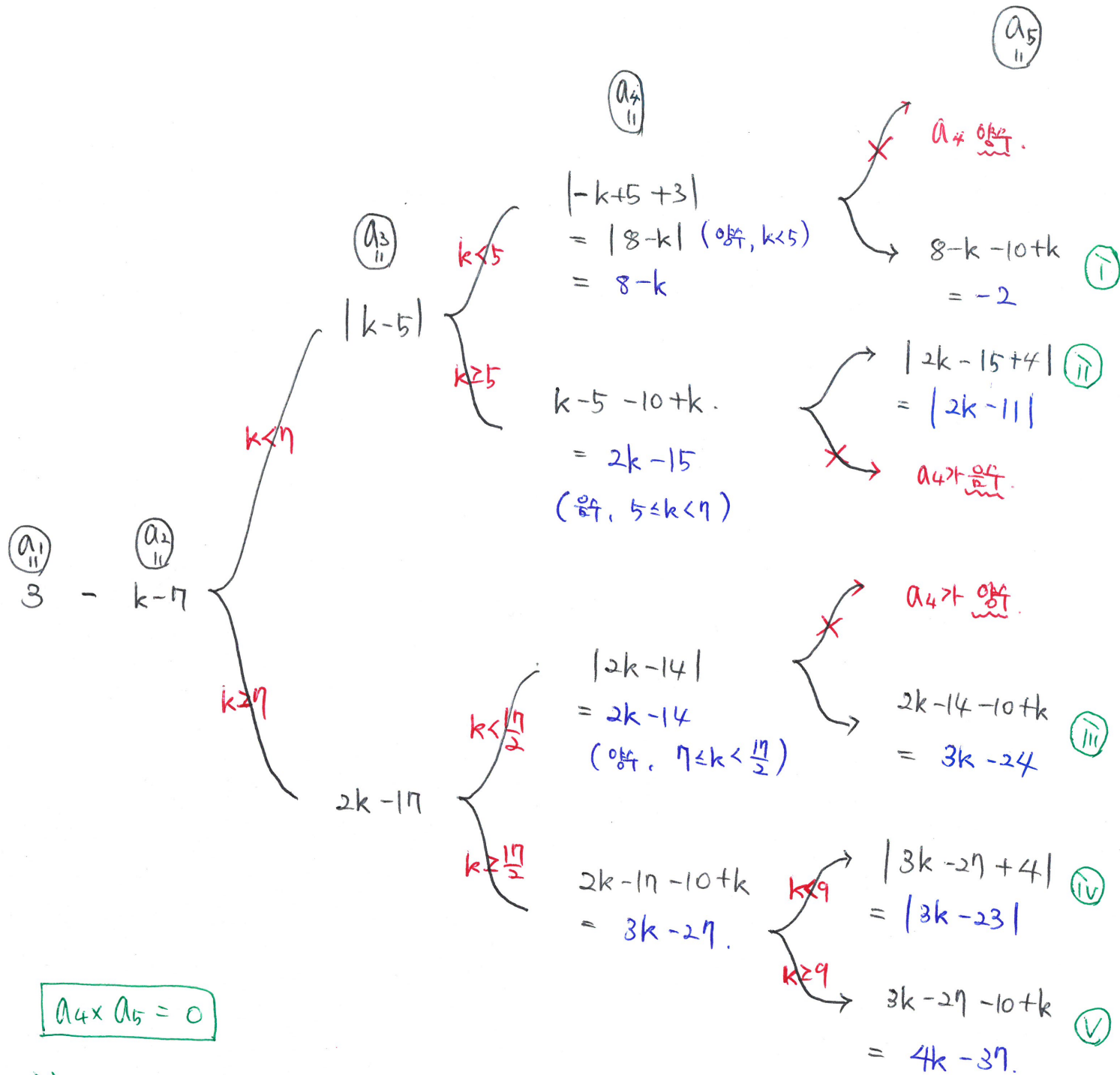
$f(x) = (x-3)(x+3)(x^2-9) + 18$

$f(4) = 1 \times 7 \times 9 + 18 = 81$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



i) $k < 5$ 일때, $-2(8-k)=0$ $k=8$

ii) $5 \leq k < 11$ 일때, $(2k-15) \times |2k-11| = 0$ $k = \frac{15}{2}, \frac{11}{2}$

iii) $11 \leq k < \frac{11}{2}$ 일때, $(2k-14)(3k-24)=0$ $k=7, 8$

iv) $\frac{11}{2} \leq k < 9$ 일때, $(3k-21) \times |3k-23| = 0$ $k = \frac{23}{3}, \frac{21}{3}$ $7, xxx$

v) $k \geq 9$ 일때, $(3k-21) \times (4k-31)=0$ $k=9, \frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 따라서, 최댓값 $M = \frac{31}{4}$, 최솟값 $m = \frac{11}{2}$

$M+m = \frac{59}{4}$