제 2 교시

수학 영역

홀수형

빠른 정답

9	③	3	13	⑤	3
10	④	4	14	③	4
11	②	4	20	64	4
12	①	4	21	54	4

27학년도 워너비 하프 모의고사 4회로 인사드립니다.
4회차는 '기출 그 자체'를 컨셉으로 잡고 제작했습니다.

난이도는 현재까지 발표한 하프 모의고사 중 가장 어려웠습니다. 9-10번은 평가원 모의고사 난이도보다 쉬웠지만, 11번부터 11번 답지 않은 발상을 요구해서 꽤나 고전했을 것이고, 22학년도 6월 모의평가 10번을 변형했고, 12번은 익숙한 형태고 난이도도 무난해서 잠시 쉬어가는 구간이었을 것입니다. 13번은 합답형으로 계산이 꽤 많으며, 14번은 삼각함수에 합성함수가 포함되어 있어 겉보기 난도가 높았을 거 같습니다. 20번은 발상만 잘하면 쉬웠으나, 21번은 25학년도의 평가원 모의고사의 수열 난이도에 필적하는 풀이량을 보여줍니다.

4회차부터 해설지 가독성을 전보다 좋게 했습니다!!

〈난이도〉

전체 난이도: 어려움

★☆☆☆☆: 9번, 10번
★★☆☆☆: 12번, 14번, 20번
★★★☆☆: 11번, 13번
★★★★☆: X
★★★★★: 21번

9. ★☆☆☆☆

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하다.

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos(\angle\mathrm{ABC})=16-12=4$$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=2$이고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{2\sin(\angle\mathrm{ABC})}=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$이므로 따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\dfrac{16}{7}\pi$임을 얻는다.

10. ★☆☆☆☆

점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(t)=\dfrac{a}{3}t^3-2t^2+2t\left(\because x(0)=0\right)$ 이다. $x(t)=t\left(\dfrac{a}{3}t^2-2t+2\right)$이고 $t=k$에서 위치와 속도가 모두 0이다. 속도는 위치의 도함수이므로 $t=k$일 때 t축에서 접해야 한다. 접하려면 $\dfrac{a}{3}t^2-2t+2$이 완전제곱식이 되어야 하므로 판별식을 이용하면 $\mathrm{D}=4-\dfrac{8}{3}a=0$이다. 따라서 $a=\dfrac{3}{2}$이고, $\dfrac{a}{3}t^2-2t+2=\dfrac{t^2}{2}-2t+2=\dfrac{1}{2}(t-2)^2$이므로 $k=2$이다. 따라서 $k+v(4)=2+16a-16+2=12$임을 얻는다.

11. ★★★☆☆

실수 p에 대하여 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(p, a^p+3)$이라 하자. 두 점 A, B는 기울기가 -1이고 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{2}$이므로 두 점 A, B의 x좌표의 차는 3이다. 점 A의 y좌표는 점 B의 y좌표보다 크므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(p+3, a^p)$이다. 함수 $y=a^{x-3}$이 점 B를 지나고 함수 $y=\log_a x+3$와 역함수 관계인데 함수 $y=\log_a x+3$도 점 B를 지나므로 점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이다. 결국 선분 AB와 선분 OB는 수직을 이루므로 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}=15\rightarrow\overline{\mathrm{OB}}=5\sqrt{2}$$

이다. 따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(5,5)$이다. 정리하면 $p=2, a=\sqrt{5}$이고, $k=10$임을 구할 수 있으므로 따라서 $a^2\times k=50$임을 얻는다.

12. ★★☆☆☆

함수 $g(x)$가 전체의 집합에서 연속이므로 $f(a)=0$이다.

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{x(x+1)}$의 값이 존재하므로 $f(0)=0$임을 얻는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x-a)$이다.

(나) 조건을 살펴보자. $a<0$이면 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수는 한 개이므로 (나) 조건을 충족시킬 수 없다. $a>0$이면, 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수는 $1\sim3$이고 2이 되려면 극솟값이 -4여야 한다. 함수 $g(x)$의 극솟값은 $g\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}=-4$이므로 $a=4(\because a>0)$임을 얻는다. 따라서 $g(a+1)=g(5)=-f(5)=-5$임을 얻는다.

13. ★★★☆☆

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

이므로 $x=-3$에서 극댓값을, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 또한 $f(1)=f(-5), f(-3)=f(3)$임을 감안하면($t>5$일 때 최솟값이 바뀌며, $t=3$일 때 최댓값이 바뀜) 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}6t^2-6 & (0<t\le 1)\\ -t^3+3t^2+9t-11 & (1<t\le 3)\\ t^3+3t^2-9t-11 & (3<t\le 5)\\ 6t^2-6 & (t>5)\end{cases}$$

임을 얻는다.

ㄱ. $g(2)=-8+12+18-11=11$ (참)

ㄴ. 함수 $g(t)$의 도함수는

$$g'(t)=\begin{cases}12t & (0<t<1)\\ -3t^2+6t+9 & (1<t<3)\\ 3t^2+6t-9 & (3<t<5)\\ 12t & (t>5)\end{cases}$$

이므로 $t=1$에서는 미분가능하나 $t=3$에선

$$\lim_{t\to 3-}\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3+}g'(t)=-27+18+9=0$$

$$\lim_{t\to 3+}\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3+}g'(t)=27+18-9=36$$

이므로 미분가능하지 않고, 같은 방식으로 $t=5$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다. 따라서 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은 8이다. (참)

ㄷ. 함수 $g(t)$의 식을 구체적으로 구했으므로

$$\int_0^3 g(t)dt=[2t^3-6t]_0^1+\left[-\frac{t^4}{4}+t^3+\frac{9}{2}t^2-11t\right]_1^3=$$
$$-4+\left(-\frac{81}{4}+\frac{1}{4}\right)+(27-1)+\left(\frac{81}{2}-\frac{9}{2}\right)-22=$$
$$-4-20+26+36-22=16$$

임을 얻는다. (참)

14. ★★☆☆☆

k의 값을 모르는 상태이므로 $0 \le x \le \pi$에서 알 수 있는게 많지 않다. 따라서 $\pi < x \le 2\pi$부터 보는 것이 바람직하다.
합성함수이므로 속함수인 $\pi\sin 2x$부터 분석해보자. 모든 실수 x에 대하여 $-\pi \le \pi\sin 2x \le \pi$이 성립한다. 주기는 π이므로 $\pi < x \le 2\pi$한 주기다. 이제 겉함수 $\cos x$를 분석해보자. 함수 $\cos x$는 $x = -\pi, \pi$에서 최솟값을 가지고 $x = 0$에서 최댓값을 가진다. 이를 고려하여 그래프를 그린다면 함수 $\cos(\pi\sin 2x)$는 $\cos 4x$와는 다른 함수지만 해당 구간에서 비슷한 개형을 가진다. 교점의 개수를 살펴보는 것이고 해당 문제를 해결할 때 함수 $\cos(\pi\sin 2x)$를 정교하게 이용하는 것이 아니므로 $\cos 4x$로 취급하고 문제를 풀어도 좋다.

$k > 0$이면 $f(x) = f(t)$의 최댓값이 4이다. k가 음수면 $0 < x < \pi$에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 -1보다 크고 1보다 작으면 $f(x) = f(t)$를 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수가 5이 될 수 있다. $0 < x < \pi$에서 극솟값은 $k+1$이므로

$$-1 < k+1 < 1 \rightarrow -2 < k < 0$$

이다. 따라서 $\alpha + \beta = -2$이다.

20. ★★☆☆☆

$g(x)$의 극점에 대해 조사하려면 도함수를 먼저 구해야 한다.

$$g'(x) = (x+a)f(x)$$

이고 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 도함수 $g'(x)$는
사차함수이다. 극값을 가지지 않는다는 말은 즉, x축을 뚫고 지나가지 않는다는 말과 같으므로 여러 실수 $\alpha, \beta, \gamma, a, b$에 대하여
$g'(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ (\alpha \ne \beta), (x-\alpha)^2(x^2+ax+b)\ (a^2 < 4b)$
혹은 $g'(x) = (x-\gamma)^4$꼴이어야 한다.

함수 $f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0) = 0$이다. 함수 $g(x)$는 x 인수를 2개 또는 4개를 가진다. 만약 4개를 가진다면 $a = 0$이어야 한다. $a < 0$이므로 2개다. 그런데 함수 $f(x)$는 x축과 한 점만 만난다면 $a < 0$이므로 극값을 가질 수밖에 없다. 따라서 함수 $f(x)$는 x축과 한 점에서 만나고 한 점에서 접해야 한다.

$f'(2) = 0$임을 고려하면 가능한 함수 $f(x)$는 $f(x) = x(x-6)^2$, $f(x) = x^2(x-3)$, $f(x) = x(x-2)^2$이다. 이 중 가능한 경우는 $f(x) = x^2(x-3)$뿐이므로 $a = -3$이고 $g'(x) = x^2(x-3)^2$이다.
함수 $g(x)$는 $g(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{3}{2}x^4 + 3x^3$이므로
$10 \times g(2) = 10\left(\dfrac{32}{5} - 24 + 24\right) = 64$임을 얻는다.

21. ★★★★★

(1) $a_3=a_5$인 경우

a_4가 그 외의 경우를 따라가는 경우가 아닌 경우
$a_5=a_4+a_3$이므로 $a_4=0$인데 이는 그 외의 경우이므로
모순이다.

a_4가 그 외의 경우를 따라가는 경우 $a_5=\frac{1}{3}a_3+2=a_3$이므로
$a_3=a_5=3$이다. 여기서 a_2가 그 외의 경우를 따라가는지
아닌지 한 번 더 케이스를 분류해야 한다.

a_2가 그 외의 경우를 따라가는 경우가 아닌 경우 $a_2<0$이거나
$a_2=3$이다.$a_3=a_1+a_2$이고 $a_3=3$이다. $a_2=k$ (k는 정수)라
하면 $a_1=3-k$이다. $a_4=k+3(\because a_4=a_3+a_2)$임을 얻고,
$a_6=k+6(\because a_6=a_5+a_4)$까지 얻는다. a_4가 그 외의 경우를
따라가는 경우이므로 $0\le k+3<3$ 또는 $k+3>3$이다.
정리하면 $-3\le k<0$ 또는 $k>0$이다. 또한 $a_2<0$이거나
$a_2=3$인 경우까지 고려하면 $-3\le k<0$ 또는 $k=3$인 경우다.
$k=-3, 3$일 때 추이가 달라진다. 따라서 $k=-3, 3$일 때와
아닐 때의 케이스 분리가 한 번 더 필요하다.

$k=-3$인 경우 $a_6=3$이므로 $a_7=6(\because a_7=a_6+a_5)$이다. 이를
통해 계산하면 $\underline{a_{10}=3}$임을 얻는다.

$k=3$인 경우 $a_6=9$이므로 $a_7=3$이 나오고 이를 통해 계산하면
$\underline{a_{10}=15}$임을 얻는다.

$|k|\ne 3$인 경우 $a_6=k+6$이었고 이는 그 외의 경우를 따라가야
하므로 $a_7=3$이다. 이를 통해 계산하면 $a_{10}=k+12$이고 k가
정수임을 생각하면 가능한 k의 값은 $k=-1,-2$이다. 따라서
$\underline{a_{10}=10, 11}$임을 얻는다.

(2) $a_3=-a_5$인 경우

여기서도 a_4가 그 외의 경우를 따라가는지 아닌지 확인히
필요하다.

a_4가 그 외의 경우를 따라가는 경우 $a_5=\frac{1}{3}a_3+2=-a_3$이다.
따라서 $a_3=-\frac{3}{2}$임을 얻는다. a_3이 정수가 아닌 값이 나오므로
해당 케이스는 모순이다.

a_4가 그 외의 경우를 따라가는 경우가 아닌 경우
$a_5=a_3+a_4$이다. $a_3=p$ (p는 정수)라 하면
$a_4=-2p$, $a_5=-p$임을 얻는다. a_4가 그 외의 경우를
따라가는 경우가 아니므로 $-2p<0\rightarrow p>0\left(\because p\ne-\frac{3}{2}\right)$이다.

$p\ne 3$인 경우 $a_2=-6p-6$이고 $a_1=7p+6$이다. $a_1\le 12$를
만족시키도록 할 수 없으므로 $p=3$이다.

$p=3$일 때, $a_3=3$이고 역추적하면 $a_1=12$이므로 조건을
충족시킨다. 따라서 순추적하면 $\underline{a_{10}=-54}$임을 얻는다. 따라서
최솟값 α의 값은 $\alpha=-54$이므로 따라서 $-\alpha=54$임을 얻는다.