

고등수학 자가진단 키트

들어가며

① 수록된 모든 문제를 풀고 나서 아래 QR코드의 해설 영상을 볼 것을 권장합니다.

1) 문제 1번부터 3번까지의 해설 영상



2) 문제 4번부터 14번까지의 해설 영상



② 자가진단 방법

1) 14문제 중 11문제 이상 해설과 같은 수준으로 정확하게 풀었다면?

: Keep going! 대단히 잘하고 있습니다. 이대로 꼭 공부해도 좋을 것 같네요!

2) 14문제 중 6-10문제를 해설과 같은 수준으로 정확하게 풀었다면?

: Good! 충분히 잘하고 있습니다. 이대로 실력을 쌓아나가면 점점 좋아질 것 같습니다. 조금 더 시간이 쌓이면 1등급도 충분할 것 같아요!

3) 11문제 이상 맞혔지만 ‘무엇을’, ‘어떻게’, ‘왜’ 하는지 모른채 답만 맞혔다면?

: 당장은 좋은 점수를 받을 수도 있지만 공부 방법을 개선하는 것을 권장합니다! 지금처럼 공부 하면 학년이 올라갈수록 수학이 점점 힘들어질 수도 있어요. 반면, 공부 방법을 개선하면 문제를 많이 풀지 않고도 더 좋은 결과를 받을 수 있을거예요!

4) 6-10문제를 맞혔지만 ‘무엇을’, ‘어떻게’, ‘왜’ 하는지 모른채 답만 맞혔다면?

: 당장은 큰 문제가 없어보이지만 대수·미적 고난도 문제는 선뜻 손대기 어려울 것 같네요. 이대로 가면 학년이 올라갈수록 수학이 점점 힘들어질 거예요. 공부 방법을 개선할 것을 강력하게 권장합니다!

5) 맞힌 문제가 5개 이하라면?

: 고1 수학에서도 점수가 들쭉날쭉하거나 어려움을 겪고 있을 것 같네요. 킁킁거리며 고난도 문제를 푸는 것보다 쉬운 것부터 정확히 하는 것을 권장합니다! 쉬운 문제집 한 권만 영상 속 해설 수준으로 공부해도 1등급까지 노려볼 수 있을거예요!

고등수학 자가진단 키트

[문제1] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2023)$ 의 값을 구하시오.¹

(가) $f(x) = 2 - |x - 3|$ ($1 \leq x \leq 5$)

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(5x) = 5f(x)$ 이다.

[문제2] 이차방정식 $x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$ 의 서로 다른 두 근 α, β 에 대하여 다음 식의 값을 구하시오.²

$$\frac{(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{11})(1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{11})}{3 + \sqrt{2}}$$

[문제3] 수열 $\{a_n\}$ 은 $0 < a_1 < 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$

(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$ 일 때, $\frac{a_8}{a_1}$ 의 값을 구하시오.³

[문제4] x 에 대한 다항식 $P(x) = x^4 - (2n + 9)x^2 + n^2$ 이 계수가 정수인 일차식의 곱으로만 인수분해되도록 하는 100 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오.⁴

[문제5] 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z^2}{1+z}$ 와 $\frac{z^2+1}{z}$ 이 모두 실수일 때, $z^4 + \bar{z}^4$ 의 값을 구하시오. (단, \bar{z} 는 z 의 켤레복소수)⁵

[문제6] 두 다항식 $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = ax^2 + bx + 2$ 에 대하여, $f(x) = 0$ 의 두 근 α, β 가

$$g(\alpha^2) = 3\alpha \text{이고 } g(\beta^2) = 3\beta$$

를 만족할 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$)⁶

[문제7] x 에 대한 이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$ 이 허근 α 를 가질 때, α^3 이 실수가 되도록 하는 실수 p 를 모두 곱한 값을 구하시오.⁷

[문제8] $-1 \leq x \leq 1$ 에서 부등식 $x + a \leq x^2 \leq 2x + b$ 가 항상 성립할 때, $b - a$ 의 최솟값을 구하시오. (단, a, b 는 상수)⁸

[문제9] 정수 a 와 실수 x, y, z 에 대하여

$$x + y - z = 1, \quad x - y = 6, \quad 3y + z = 5a$$

가 성립할 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값을 구하시오.⁹

[문제10] 서로 다른 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a - b = 5, a - c = 2$ 이고

$$a^2(b - c)^3 + b^2(c - a)^3 + c^2(a - b)^3 = -180$$

이 성립할 때, $|ab + bc + ca|$ 의 값을 구하시오.¹⁰

[문제11] 두 양수 a, b 에 대하여

$$\frac{(a^2 + 1)b}{a - 1} = 5 \text{이고} \frac{a^2(b + 1)}{a + 1} = \frac{8}{3}$$

가 성립할 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.¹¹

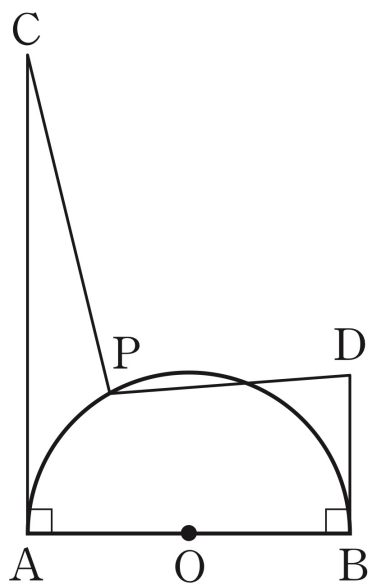
[문제12] 두 이차함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + 3$, $g(x) = -3x^2 + 6x - 1$ 에 대하여

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$

가 성립하도록 하는 하는 상수 a 의 값의 범위를 구하시오.¹²

[문제13] 다음 그림의 반원에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BD} = 2$ 이고, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ 이다.

점 P가 반원의 호 AB 위를 움직일 때, 다각형 ACPDB의 넓이의 최댓값을 구하시오.¹³



[문제14] 함수 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = g(x)$ 에 대하여

$$f\left(2g(x) - \frac{4x+7}{2x-5}\right) = x$$

가 성립할 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.¹⁴

정답

¹[문제1] 1102

²[문제2] 567

³[문제3] 92

⁴[문제4] 8

⁵[문제5] -1

⁶[문제6] $a = 5$ 이고 $b = 2$

⁷[문제7] -3

⁸[문제8] $\frac{13}{4}$

⁹[문제9] $a = -2$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 19

¹⁰[문제10] 6

¹¹[문제11] 3

¹²[문제12] $-3 \leq a < 0$ 또는 $0 < a < 1$

¹³[문제13] $8 + 4\sqrt{2}$

¹⁴[문제14] $\frac{27}{4}$