제 2 교시

수학 영역

홀수형

빠른 정답

9	①	3	13	③	3
10	②	4	14	④	4
11	②	4	20	7	4
12	⑤	4	21	208	4

27학년도 워너비 하프 모의고사 3회로 인사드립니다.
3회차는 ‘기출에서 봤던 거 같은데 무언가 다르다..?’를 컨셉으로 잡고 제작했습니다.

절댓값 소재에 대비할 수 있도록 수1, 수2 두 파트에 절댓값 문제를 하나씩(9, 10) 배치했습니다. 11번은 22학년도 6월 모의평가 10번을 변형했고, 12번은 국밥 유형(이지만 낚시 유발 문제입니다), 13번은 26학년도 지수 트렌드에 합답형을 가미하였고, 14번은 여러 가지 유형(극한, 연속, 정적분으로 이루어진 함수 추론)을 적당히 섞었습니다. 20번은 평범한 계산 문제, 21번은 평가원에서 나온 적 없는 발문을 넣어 신선하게 느껴지도록 했습니다.

〈난이도〉

전체 난이도: 살짝 어려움

★☆☆☆☆: 9번
★★☆☆☆: 10번, 11번, 12번, 20번
★★★☆☆: 13번, 21번
★★★★☆: 14번
★★★★★: X

9. ★☆☆☆☆

함수 $y=p\sin x+q$의 최댓값은 $p+q$이고 최솟값은 $-p+q$이다. p와 q가 모두 자연수이므로 $p+q>0$이다. $-p+q$가 양수든 음수든 혹은 0이든 간에 $p+q>|-p+q|$이다.

$y=3$이 만나는 점이 한 개 뿐이려면 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이어야 한다. 따라서 $p+q=3$이다. $y=1$과 서로 다른 네 점에서 만나려면 한 주기 내이므로 첨점이 생기는게 필연적이다. 이를 고려하면 $|-p+q|=p-q=1$이어야 하므로 $p=2, q=1$이다. 따라서 $p^2+q^2=5$임을 얻는다.

10. ★★☆☆☆

$f(x)$와 $4x+8$을 분리해서 생각해보자. 함수 $y=|4x+8|$는 $x=-2$에서 첨점이 생기므로 미분가능하지 않다. $|4x+8|$ 부분을 가진 함수 $g(x)$이 미분가능하기 위해선 함수 $y=|f(x)|$가 반드시 $x=-2$에서 미분가능하지 않아야 한다.

잘 생각해보면, 음이 아닌 상수 a에 대하여 $f(a)=0$인데 $x=a$에서 미분이 가능하다는 것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 x축에 접하는 것을 알 수 있다. 따라서 함수 $|f(x)|$를

$$|f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (x<-2)\\ f(x) & (x\geq -2)\end{cases}$$

로 나타낼 수 있다.

$\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{g(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{g(x)}{x+2}$임을 충족시켜야 한다.

$$\lim_{x\to -2-}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2-}\frac{-f(x)+4x+8}{x+2}=-f'(-2)+4$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2+}\frac{f(x)-4x-8}{x+2}=f'(-2)-4$$

이므로 $f'(-2)=4$이다. 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x+2)(x-a)^2$라 할 수 있으므로 $f'(-2)=4$를 대입하면 $f'(-2)=(a+2)^2=4$이다. $a+2=\pm 2$이므로 $a=0(\because a\geq 0)$이다. 따라서 $f(2)=4\times 4=16$임을 얻는다.

11. ★★☆☆☆

Tip: 그래프를 그려서 푸는 것을 추천합니다.

교점의 y좌표가 4가 될 때를 우선 살펴야 한다. 교점은 결국 함수 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 위의 점이기도 하므로 $\log_{\sqrt{3}}x=4$의 해를 구하면 $x=9$임을 얻는다. 결국 점 $(9,4)$을 경계로 살펴봐야 한다.

(1) 교점의 y좌표가 4보다 작은 경우

이 경우는 결국 $x<9$에서 교점이 형성되어야 하므로 해당 상황을 그래프로 나타내면 함수 $y=n^{x-8}$는 $x=9$에서의 y좌표가 4보다 커야한다. 따라서 $n>4$이므로 $\alpha=5$이다.

(2) 교점의 y좌표가 4보다 큰 경우

해당 경우는 (1)의 경우와 똑같이 접근하면 함수 $y=n^{x-8}$는 $x=9$에서의 y좌표가 4보다 작아야한다. 따라서 $n<4$이므로 $\beta=3$이다.

(1), (2)를 종합하면 $\alpha+\beta=8$임을 얻는다.

12. ★★☆☆☆

실수 전체의 집합에서 미분이 가능하려면

$f(2)=f(0)+0$ • • • (1) $f'(2)=f'(0)+0$ • • • (2)

이어야 함을 (나) 조건에서 얻을 수 있다. (1)에서

$$8+4p+2q=0 \quad \bullet\bullet\bullet \ (3)$$

를, (2)에서

$$12+4p+q=q \quad \bullet\bullet\bullet \ (4)$$

임을 얻는다. (4)를 정리하면 $p=-3$이므로 이를 (3)에 대입하면 $q=2$임을 얻는다.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-3x^2+2x)dx \quad \bullet\bullet\bullet \ (5)$$

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x+2)dx=\int_0^2\left(f(x)+2x^2\right)dx$$
$$=\int_0^2(x^3-x^2+2x)dx \quad \bullet\bullet\bullet \ (6)$$

$$\int_4^6 f(x)dx=\int_2^4 f(x+2)dx=\int_2^4\left(f(x)+2x^2\right)dx=$$
$$\int_0^2\left(f(x+2)+2(x+2)^2\right)dx=\int_0^2\left(f(x)+2x^2+2(x+2)^2\right)dx$$
$$=\int_0^2(x^3+x^2+10x+8)dx \quad \bullet\bullet\bullet \ (7)$$

이므로 (5)+(6)+(7)의 값을 구하면

$\int_0^2(3x^3-3x^2+14x+8)dx=48$을 얻는다.

주의: (7)을 구하는 과정에서

$\int_2^4\left(f(x)+2x^2\right)dx=\int_0^2\left(f(x+2)+2x^2\right)dx$로 잘못 구했을 경우 ①이 정답으로 잘못 나왔을 것입니다. 항상 적분 평행이동을 시킬 때 주의합시다.

13. ★★★☆☆

점 A의 좌표를 $A(p,p)$(p는 $p>2$인 상수)라 할 때,
$\log_a(p-2)=p \rightarrow a^p=p-2$이 성립한다.

방정식 $\left(\frac{1}{a}\right)^x+5=-x+3$을 정리해보면 $a^{-x}=-x-2$이므로 해는 $x=-p$이다. 따라서 점 B의 좌표는 $B(-p,p+3)$이다.

ㄱ. 선분 AB의 중점은 $\left(0,p+\frac{3}{2}\right)$이므로 y축 위에 있다.

(참)

ㄴ. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 방정식은
$x^2+\left(y-p-\frac{3}{2}\right)^2=p^2+\frac{9}{4}$이다.
반지름의 길이가 $\sqrt{p^2+\frac{9}{4}}$이고
$\left(p+\frac{3}{2}\right)^2=p^2+3p+\frac{9}{4}>\left(\sqrt{p^2+\frac{9}{4}}\right)^2$이므로
$p+\frac{3}{2}>\sqrt{p^2+\frac{9}{4}}$이다. 따라서 원은 x축과 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M\left(0,p+\frac{3}{2}\right)$이다.
삼각형 AOB의 넓이는 삼각형 AMO와
삼각형 BMO의 넓이의 합과 같으므로

(삼각형 AMO 의넓이)+(삼각형 BMO의 넓이)
$=\frac{1}{2}p\left(p+\frac{3}{2}\right)\times 2=p^2+\frac{3}{2}p=\frac{35}{2} \rightarrow 2p^2+3p-35$
$=(p+5)(2p-7)=0$

$p=\frac{7}{2}(\because p>2)$이다. 이를 앞선 방정식 $a^p=p-2$에

대입하면 $a^{\frac{7}{2}}=\frac{3}{2}$이므로 $a^7=\frac{9}{4}$이다. (참)

14. ★★★★☆

다항함수 $g(x)$의 최고차수를 먼저 결정해보자. 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x(x+1)^2}{f(x)} & (x<-1)\\ x^2f(x) & (x>-1)\end{cases}$$

로 정리할 수 있다.

1. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^4}$의 값이 존재함 -> $g(x)$의 최고차수는 사차 이하

2. $\int_{-1}^{x} g(t)dt \geq 0$ -> 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 양수이며, 일차 혹은 삼차함수임 (+ $g(-1)=0$이지만 활용은 안함)

따라서 함수 $g(x)$는 일차 혹은 삼차함수이다. 만약 함수 $g(x)$가 일차함수라면 $x>-1$ 부분에서 일차함수 조건을 충족시키기 위해선 $f(x)=\dfrac{\cdots}{x}$ (...는 x 인수가 포함되지 않음)의 꼴이 필연적이다. 실수 전체의 집합에서
연속이어야 하는 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 아니게 되므로 함수 $g(x)$는 삼차함수임을 얻는다. 결국 함수 $g(x)$는 $g(x)=x^2(px+q)$의 꼴이므로(함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 $\dfrac{\cdots}{x}$꼴 (...는 x 인수가 포함되지 않음)이 되는 것이 불가능) $x<-1$에서 $f(x)=\dfrac{x+1}{ax}$(a는 0이 아닌 상수)라 할 수 있다. 2번 조건에 따라 최고차항의 계수가 양수임을 충족시키려면 최고차항의 계수가 $-a$이므로 $a<0$이어야 한다. $f(-3)=\dfrac{2}{3a}<0 \to a=-\dfrac{2}{3}$임을 얻는다.

함수 $g(x)$는 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^2(x+1)$이므로 $g(3)=\dfrac{2}{3}\times 9\times 4=24$임을 얻는다.

20. ★★☆☆☆

점 A의 x좌표를 p라 하면 점 B의 x좌표는 $2p$이다. 따라서 점 A와 B의 좌표를 구체적으로 나타내면 $\mathrm{A}(p,kp)$, $\mathrm{B}(2p,2kp)$이다.

사각형 ODBF의 넓이는 $\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{OF}}=2p\times 2kp=4kp^2$이고
사각형 OCAE의 넓이는 같은 방식으로 kp^2이 나온다. 따라서 $3kp^2=4k+7$ • • • (1)이라는 관계식을 얻는다.

$2\log_a p=\log_a 2p$이기도 하므로 $p^2=2p$이다. $p>0$이므로 $p=2$임을 얻고 이를 (1)에 대입하면 $12k=4k+7$이므로 $k=\dfrac{7}{8}$이 나온다. 이를 함수 $y=\log_a x$와 직선 $y=kx=\dfrac{7}{8}x$에 점 A를 대입해서 정리하면 $\log_a 2=\dfrac{7}{4}$이므로 $a^{\frac{7}{4}}=2$이다.

따라서 $a^{\frac{21}{4}}\times k=8\times\dfrac{7}{8}=7$임을 얻는다.

21. ★★★☆☆

함수 $f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로 접선의 y절편인 $g(t)$는
$g(t)=-tf'(t)+f(t)$임을 얻는다.

함수 $h(x)$를 정리해보면

$$h(x)=\left(f(x)+g(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)=xf'(x)\left(2f(x)-xf'(x)\right)$$

이고 두 상수 a,b에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2+ax+b$로 나타내면 $h(x)=x(2x+a)(ax+2b)$이다. x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 $h(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 두 실수의 개수가 2여야 한다. $h(0)=h\left(-\dfrac{a}{2}\right)=h\left(-\dfrac{2b}{a}\right)=0$이므로 세 수 $0, -\dfrac{a}{2}, -\dfrac{2b}{a}$중 두 수는 같은 수이다.

$\sqrt{f(x)}$의 값이 실수로 정의되려면 함수 $f(x)$의 함숫값이 항상 0 이상임을 의미한다. 판별식을 이용하면 $a^2-4b\leq 0$이며 $f(2)=1$을 이용하면 $f(2)=4+2a+b=1\to b=-2a-3$이다. 이를 판별식을 통한 관계식에 대입하면

$$a^2+8a+12=(a+2)(a+6)\leq 0\to -6\leq a\leq -2$$

임을 얻는다. a의 범위 때문에 두 수 $-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{2b}{a}$ 모두 0일 수가 없다. 따라서 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{2b}{a}$이다. 정리하면 $a^2=4b$인데 이는 판별식이 0이 되도록 하는 식과 같으므로 $a=-6, -2$이다.

$$h(-1)=-(a-2)(-a+2b)=(-a+2)(-5a-6)$$

이므로 $\sum h(-1)=16+192=208$임을 얻는다.