제 2 교시

랑데뷰 〔풀지마세요〕 모의고사

수학 영역

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

랑데뷰수학 - 황보백T

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~8쪽, 선택과목 확률과 통계 9~12쪽, 미적분 13~16쪽, 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 자료실

눈으로 보는 모의고사&수험생은 풀지 마시길!!

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{3^{\sqrt{5}+2}}{3^{\sqrt{5}-2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

2. $3^{-\frac{1}{2}} \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

3. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \times 4^{\frac{3}{8}}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

4. $2^{\sqrt{24}+1} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{6}+1}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

5. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-6$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{x-2}$의 값은? 〔3점〕

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 함수 $f(x)=4x^3+ax^2+1$에 대하여 $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=24$일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) 〔3점〕

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{27}x^3+5x$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? 〔3점〕

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

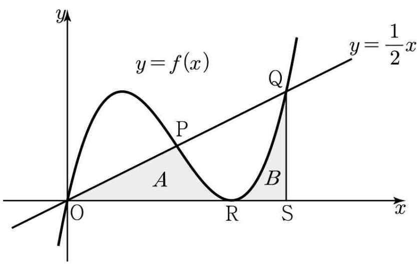
8. 함수 $f(x)=2x^3+x-2$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

9. 상수 $p(p>0)$에 대하여 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f(p)=f'(p)=0$$

을 만족시키고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 세 점 O, P, Q ($\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 접하는 접점을 R라 하고 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OP, OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 RS, QS로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



한편, 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값이 $A+B$인 이차함수 $g(x)$와 실수 $t(t>0)$가 다음 조건을 만족시킨다.

두 극한 $\lim\limits_{x\to k}\frac{(g(x))^2-(g(k))^2}{x-k}$, $\lim\limits_{x\to k}\frac{t\|x\|g(x)-(g(k))^2}{x-k}$의 값이 각각 존재하고 그 값이 같도록 하는 실수 k는 t, $-t$ 뿐이다.

또한, 상수 $a(a>0)$에 대하여 $x<a$에서 정의된 함수

$$h(x)=\begin{cases} g(t)-2^x & (x<1) \\ \log_2(a-x) & (1\le x<a) \end{cases}$$

가 최댓값을 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 m이라 하자. 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $\log_2(15a+m)x-y+t=0$이 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 -4일 때, a의 값은? [4점]

① 11　② 22　③ 33　④ 44　⑤ 55

10. 함수 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(-x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 $t=k$에서 불연속이고 실수 k의 값이 0, 2, 4뿐일 때, 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_7=g(-2)+ab$이 되도록 하는 모든 a_1의 값 중 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$ (나) 네 항 a_3, a_4, a_5, a_6 중 짝수인 항의 개수는 1이하이고 짝수인 항의 값은 $g(-2)+ab$이하이다.

실수 m에 대하여 함수

$$h(x)=-mx^2-2x+p$$

라 할 때, 함수 $h(x)$에 대하여 함수

$$k(x)=\begin{cases} |h(x)|+x^2 & (x\le 0) \\ q\{h(x)\}^2+qx & (x>0) \end{cases}$$

가 $x=r$ $(r<0)$에서만 미분가능하지 않는다. $p+q+r$의 값은? (단, a, b, p, q, r는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$　② $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$　③ $\frac{3-\sqrt{6}}{4}$　④ $\frac{3-\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\frac{3-\sqrt{6}}{2}$

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 p에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{p}^{x} f(t)dt$$

의 최솟값이 -4이다. 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\frac{|g(x)-g(1)|}{|x|-1}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 양수 a $(a>1)$, b에 대하여 $x>-b$에서 정의된 함수

$$k(x)=\begin{cases} \dfrac{f(p^2)}{60}\log_a(x+b)-b & (-b<x\leq 0) \\ a^{\frac{60x}{f(p^2)}} & (x>0) \end{cases}$$

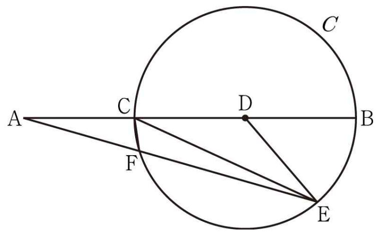
이다. 함수 $y=k(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수는 4이고 교점의 x좌표를 크기가 작은 순서대로 나열하면 x_1, x_2, x_3, x_4이다.

$$k(0)=0,\ x_1+x_3=0$$

일 때, 그림과 같이 선분 AB를 삼등분하는 점 중 점 A에 가까운 점 C와 점 B에 가까운 점 D에 대하여 점 D를 중심으로 하고 선분 BC를 지름으로 하는 원 C 위의 점 E가

$\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{k(a+b)-p^2}$, $\sin(\angle\mathrm{ACE})=\dfrac{1}{k(a)}$

을 만족시킨다. 직선 AE와 원 C와 만나는 점을 F라 하자. 선분 CF의 길이는? [4점]



① $\dfrac{\sqrt{7}}{21}$ ② $\dfrac{2\sqrt{7}}{21}$ ③ $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{7}}{21}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{7}}{21}$

12. $a>1$, $k>\dfrac{a}{2}$인 두 실수 a, k에 대하여 두 곡선

$$y=a^x-k,\ y=k(a^{-x}+1)-\frac{1}{2}$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\dfrac{a^{x-3}}{2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다.
삼차함수 $f(x)$와 두 실수 a, k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \left(x<0,\ x>\dfrac{\log_a 2k+k}{3}\right) \\ |f(x)| & \left(0\leq x\leq \dfrac{\log_a 2k+k}{3}\right) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p-h)}{h}=0$을 만족시키는 실수 p의 개수는 2이고 합은 S이다.
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to q}g(x)$의 값이 존재하지 않는 q가 존재한다.

x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 $2S$일 때, $g(4)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
모든 항이 정수이고 두 상수 M, m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값과 최솟값의 곱은? [4점]

> (다) $a_2+a_4=5M+4m$
> (라) 모든 자연수 n에 대하여
> $(a_{n+1}-|a_n|+2)(a_{n+1}-3a_n)=0$
> 이다.

① -25 ② -16 ③ -9 ④ -4 ⑤ -1

13. 모든 항이 0이 아닌 실수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_3+a_5=0$이 되도록 하는 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\frac{{a_n}^2-|a_n|\times a_n}{2}-(|a_n|+a_n)+\frac{|a_n|+a_n}{2a_n}$$
> 이다.
> (나) $a_1\times a_2>0$

한편, 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-x\}\left\{g(x)-\frac{f(x)}{x}\right\}=0$$

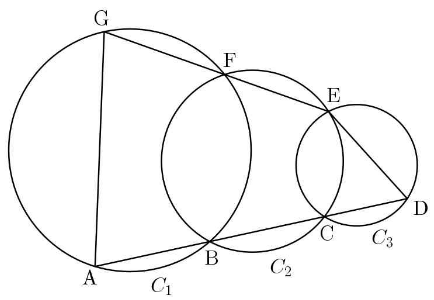
을 만족시킨다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 두 상수 M, m에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (다) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=8m$
> (라) $\lim\limits_{x\to 10M}\frac{g(x)-g(10M)}{x-10M}$의 값은 존재하지 않는다.

$g(-1)=3$일 때, $g(4)$의 최댓값을 S, $g(2)$의 최솟값을 s라 하자. 또한, 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2, r_3인 세 원 C_1, C_2, C_3가 있다. 세 원 위의 점 A, B, C, D, E, F, G에 대하여 네 점 A, B, C, D와 세 점 E, F, G가 각각 한 직선 위에 있다.

$$r_1:r_2:r_3=4:3:2,\ \overline{\mathrm{AG}}=S,\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=s$$

일 때, 선분 CE의 길이는? (단, 두 원 C_1, C_2의 교점은 B, F이고 두 원 C_2, C_3의 교점은 C, E이다.) [4점]



① $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$
④ $\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

14. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(1)=1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_1^x(|f(t)-t|-|t-1|)dt$$

가 다음 조건 (가), (나)를 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=\alpha$ $(\alpha>5)$에서 극값을 갖는다.

상수 $k(k>0)$에 대하여 곡선 $y=\cos\frac{\pi x}{k}$ 위의 제1사분면의 점 A와 제4사분면의 점 B가 있다. 점 A의 x좌표는 $\frac{k}{2}$보다 작은 값이고 점 B의 x좌표는 k보다 크고 $\frac{3k}{2}$보다 작은 값이다. 점 $\mathrm{C}(-k,0)$라 할 때, 직선 AC의 기울기와 직선 OB의 기울기의 절댓값이 같고 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{k}$이다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이가 $|f(-1)|$이고 상수 k는 조건 (라)를 만족시킨다.
또한, 곡선 $y=2^x$ 위에 서로 다른 두 점 D, E가 있다. 점 D를 직선 $y=x$에 대칭이동한 점을 P라 하고 점 E를 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 두 점 D, E를 x축에 대칭이동한 점을 D′, E′라 할 때, 여섯 개의 점 D, E, D′, E′, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (다) 두 직선 DE, D′E′의 기울기 곱은 $-\frac{49}{9}$이다.
> (라) (직선 EQ의 y절편)−(직선 DP의 x절편)$=k-2$

선분 D′E의 길이는? [4점]

① $\sqrt{86}$ ② $\sqrt{87}$ ③ $2\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{89}$ ⑤ $\sqrt{90}$

15. 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \left|1-2^{x+1}\right| & (x \le p \text{ 또는 } x \ge q) \\ \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) & (p<x<q) \end{cases}$$

일 때, 두 실수 p, q $(p<q)$와 이차함수 $k(x)=-x^2+4x$ 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} k(x) & (x \ge 0) \\ (q-p)\times k(x+4)+8 & (x<0) \end{cases}$$

이다. 2보다 큰 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le g'(r)(x-r)+g(r)$$

을 만족시키는 실수 r의 범위가 $r \le -1$ 또는 $r \ge t$일 때, 삼차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $i(x)$가

$$i(x)=\begin{cases} -2h(x) & (x<0) \\ |h(x)|-\left|27-x^3\right| & (x \ge 0) \end{cases}$$

일 때, t가 아닌 양수 α에 대하여 함수 $i(x)$는 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다. α의 값은? [4점]

① $\frac{2+9\sqrt{5}}{22}$ ② $\frac{3+9\sqrt{5}}{22}$ ③ $\frac{4+9\sqrt{5}}{22}$

④ $\frac{3+10\sqrt{5}}{22}$ ⑤ $\frac{3+11\sqrt{5}}{22}$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x+2)=\log_3(4x-7)-1$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. $3\log_3 18 + \log_{\frac{1}{9}} 64$의 값을 구하시오. [3점]

19. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$3a_1 + a_9 = 8,\ a_3 + a_4 = 7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

20. 세 양수 a, b, c와 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=a$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_2^x \{f(t)-f(x)\}dt$$

가 $x=0$에서 유일한 극값 a를 갖는다.
또한, 곡선 $y=2^{1-x}+b$ 위의 점 A를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 B라 할 때, 점 B는 곡선 $y=2^{1-x}+b$위의 점이다. 점 P$(1,\ -2)$에 대하여 두 삼각형 OPA, OPB의 넓이가 모두 $\frac{a}{2}$이다.
한편, $A \subset B$인 두 집합 A, B가

$$A=\left\{x \,\middle|\, \cos(c\sin x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\sin x\right)\right\},$$

$B=\{x \mid 0 \le x \le 2\pi\}$

이고 집합 A의 모든 원소의 합이 $\frac{(3a+1)\pi}{b}$일 때, $c=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점, k는 상수이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

수학 영역 (랑데뷰)

21. 닫힌구간 $[0, 6]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2(x-3) & (0 \le x < 3) \\ -x^2+9x-18 & (3 \le x \le 6) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 6$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합을 α라 할 때, 상수 α와 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2+1$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 $\dfrac{\alpha}{10}$이다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{\dfrac{\alpha}{4}}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\sqrt{x-1}$와 만나는 점의 개수가 2일 때의 두 점의 x좌표 중 큰 값을, 또는 만나는 점의 개수가 1일 때의 x좌표를 x_n이라 할 때, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$(x_1-x_3)k^2+4x_1k \le g(k-1)-g(k) \le k+\frac{x_2+x_4+x_6}{4}$$

를 만족시킨다. $g'\left(-\dfrac{\alpha}{20}\right)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 A_n의 x좌표가 점 B_n의 x좌표보다 작고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=-1$이고 $f(x)$의 모든 항의 계수는 정수이다.
>
> (나) 모든 실수 t에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to t}\frac{f(3x-2)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

모든 삼차함수 $f(x)$ 중 $f(3)$의 값이 최소인 함수를 $f_1(x)$, $f(3)$의 값이 최대인 함수를 $f_2(x)$라 할 때, 곡선 $y=f_1(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f_2(x)$이고 $g(g(x))=2x$이다.

$g\left(\dfrac{26}{k^3-3k^2+2k}\right)=\alpha$일 때, 사차함수 $h(x)$에 대하여 함수

$$k(x)=\begin{cases} h(x) & (x<0) \\ -x^2+\dfrac{\alpha}{3}x & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (다) 함수 $k(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (라) x에 대한 방정식 $k'(x)\times k'(x-2)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$k(\alpha-7)=-\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, α는 상수이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 『**선택과목(확률과 통계)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

눈으로 보는 모의고사&수험생은 풀지 마시길!!

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_3\Pi_2 + {}_3\mathrm{H}_2$ 의 값은? [2점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B) = \frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A^C|B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

수학 영역(확률과 통계)

25. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(9, \frac{1}{3}\right)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 방정식 $a+b+c=10$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [3점]

① 36 ② 42 ③ 48 ④ 54 ⑤ 60

27. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$\mathrm{P}(A \mid B)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B \mid A)=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{7}$ ⑤ $\dfrac{1}{8}$

28. 두 자연수 m_1, m_2에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수가 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

> 모든 실수 x에 대하여
> $\mathrm{P}(Y \le x)=\mathrm{P}(X \le x+16)$이고
> $h(x)=\{f(x)-g(x)\}\{f(x+2)-g(x+2)\}$
> 에 대하여 $h(k)<0$을 만족시키는
> 자연수 k의 값은 14 뿐이다.

$\mathrm{P}(15 \le X \le 23)+\mathrm{P}(15 \le Y \le 23)$의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구하면 0.3413일 때, 다음 시행을 $\sqrt{2\sigma_2 - m_1}$ 번 반복한다.

그림과 같이 탁자 위에 4개의 동전이 일렬로 놓여 있고 이 4개의 동전 중 4번째 자리의 동전만 뒷면이 보이도록 놓여 있고 나머지 자리의 3개의 동전은 앞면이 보이도록 놓여 있다. 이 4개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

앞면 앞면 앞면 뒷면

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, $k \le 4$이면 k번째 자리의 동전을 한 번 뒤집어 제자리에 놓고, $k \ge 5$이면 모든 동전을 한 번씩 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 마친 후 이 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\dfrac{q}{p}$일 때, 아래 함수 f에서 $f(1) \times f(8)$의 값이 $(p-4q)$의 약수이다. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수는? (단, $n=1,2,3,4$) [4점]

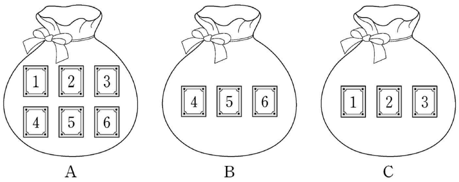
> (가) $f(n) \le f(2n)$
> (나) $3f(1) \le f(3)$

① 354 ② 358 ③ 362 ④ 371 ⑤ 372

수학 영역(확률과 통계)

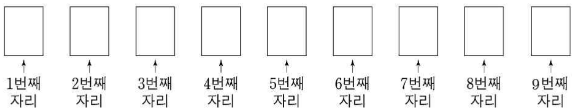
단답형

29. 그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B에는 4부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각각 임의로 1장의 카드를 꺼낸다.



이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 작을 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수와 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합이 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 확률이 $\dfrac{1}{p}$이다.

숫자 0이 적혀 있는 카드 3장, 숫자 1이 적혀 있는 카드 3장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 3장과 그림과 같은 9개의 자리가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 9개의 자리에 놓은 뒤 카드 9장 중 연속된 두 수를 선택할 때, 두 수의 차가 2가 되는 경우의 수가 p가 되는 경우의 수를 q라 하자.



한편, 주머니 속에 자연수 $1,\ 2,\ 3, \cdots,\ k-1,\ k$가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 $2k-1,\ 2k-3,\ 2k-5, \cdots,\ 3,\ 1$개씩 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(40X+13)=3q$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

30. 하나의 주머니와 세 상자 A, B, C가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 12개 이상 들어 있고, 두 상자 B, C는 비어 있다. 이 주머니와 세 상자 A, B, C를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다. 확인한 수가 1이면 상자 A에서 상자 B에 흰 공 1개를 넣고, 상자 C에는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 넣는다. 확인한 수가 2 또는 3이면 상자 A에서 상자 B에 흰 공 1개와 검은 공 1개를 넣고, 상자 C에는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 넣는다. 확인한 수가 4이면 상자 A에서 상자 B에는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 넣고, 상자 C에는 흰 공 1개, 검은 공 2개를 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 C에 들어 있는 검은 공의 개수가 짝수일 확률은 자연수 p에 대하여 $\dfrac{p}{35}$이다.

n이하의 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여

$$a \le c \le d \text{이고 } b \le c \le d$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p-1} \frac{f(n)}{(n+1)^2} = \frac{165}{q}$이다.

자연수 q와 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(2,\ \dfrac{t^2}{q}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \ge qt) \le \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여

$$\mathrm{P}\left(\frac{t^2}{2}-t+2 \le X \le \frac{t^2}{2}+t+2\right)$$

의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.152
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 『**선택과목(미적분)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{3x}$ 의 값은? [2점]

① e^{3} ② e^{6} ③ e^{9} ④ e^{12} ⑤ e^{15}

24. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-6x)}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

25. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>1$, $f'(x)>0$인 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고 모든 실수 x에 대하여

$$(\ln f(x))^2-\ln f(2x)-\ln(x+e^2)=0$$

을 만족시킬 때, 그림과 같이 한 변의 길이가 $g'(f(0))$인 정사각형 ABCD가 있다. 변 AD와 변 AB의 중점을 각각 M, N이라 하고 변 BC를 지름으로 하는 반 원 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{NMP}=\theta$라 하자. 삼각형 MNP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다.

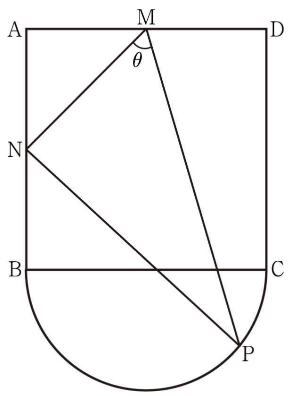
구간 $(0, (p+q)\pi)$의 두 양수 a, b에 대하여 함수

$h(x)=\cos(a\sin x+b)$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최댓값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

(가) 방정식 $h'(x)=a$의 해가 존재한다.

(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\cos x\,dx=-\frac{2}{a}$



① 6π ② $\frac{13\pi}{2}$ ③ 7π ④ $\frac{15\pi}{2}$ ⑤ 8π

26. 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{\pi}\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$$

이다. 상수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{e^{x-a}} & (x\ge a)\\ (x-a+2)^2 & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 양수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 하자.

함수 $h(x)=\int_0^x (s+a)^2(s-a)^2\,ds$와 두 상수 α, $\beta(\beta>0)$에 대하여 함수

$$k(x)=\begin{cases}h(x) & (x\ge\alpha)\\ -h(x-\beta) & (x<\alpha)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능 할 때,

$\lim_{t\to(\alpha+\beta-a)+} g(t)\times g'(f(\beta))$의 값은? [3점]

① $5e$ ② $5e^2$ ③ $5e^3$ ④ $5e^4$ ⑤ $5e^5$

27. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 할 때, 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n(n+2m)}$$

을 만족시키고 함수 $f(x)$는 $f'(1)=\frac{4}{3}a_1 - \frac{\pi}{2}$, $f(0)=12a_2$이고 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=xf'(x^2)+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 3\int_0^1 xf'(x^2)dx+3$$

를 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $i(x)$에 대하여 $i(0)$의 최댓값을 $h(k)$라 할 때, $h(-3)\times h(2)$의 값은? [3점]

모든 양의 실수 x에 대하여 $i'(x)=k-f(1)x$이고 $i(x) \le k-f(1)x$이다.

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

28. 두 정수 α, β $(\alpha > \beta)$에 대하여 모든 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$인 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + b_n i = (\alpha + i\beta)\times i^{n-1}$ 이고, $a_1 \times a_3 \times b_5 \times b_7 = 9$이다. (단, $i=\sqrt{-1}$)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 등비수열 $\{c_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})}{\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)} = \frac{b_{4n-2}}{a_{4n}}$$

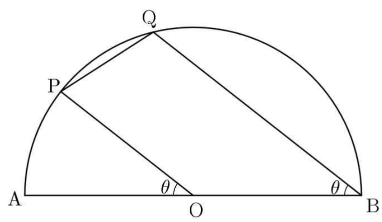
이다. c_1의 값이 최소일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} = k$이다.

한편, 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 그림과 같이 길이가 $g(1)\times e$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $e^{3f(x)} - ke^{2f(x)} + ke^{f(x)} + g(x) = \frac{x+1}{e^x}+1$ 이다. (다) $f(-2)f(2) < 0$

반원의 호 AB위의 두 점 P, Q가 반원의 중심 O에 대하여
$\angle \mathrm{POA} = \angle \mathrm{QBO} = \theta$

일 때, 사각형 OPQB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{BQ}}^2 = \frac{56}{25}$이 되도록 하는 θ의 값을 p라 할 때, $S'(p)$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{100}$ ② $\frac{1}{75}$ ③ $\frac{1}{50}$ ④ $\frac{1}{25}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

단답형

29. $f(0)=f''(0)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+2}$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 모든 실수 k에 대하여

$$\lim_{t\to k+}h(t)+\lim_{t\to k-}h(t)=2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값을 M이라 하자. 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2a_n+a_{2n}}{a_{n+1}+2a_n}=\frac{64}{5}$$

을 만족시킬 때, 집합 $A=\left\{n \,\middle|\, n\text{은 } a_n \text{ 중 } \frac{M+2}{2}\text{ 이하의 자연수}\right\}$의 원소의 개수가 3이상이다.
집합 A의 원소 중 최솟값을 m이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이
열린구간 $(0, m)$에서 $\cos\left(\frac{\pi}{b_n}x\right)+1=0$을 만족시키는 x의 개수는 $3n$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{M\times m}{nb_n}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다. (나) $f''(2)=2$

양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g'(2)=\alpha$일 때, 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_n)=\alpha^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}-a_n)=-2\alpha$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)\times a_{m+k}\right\}>\frac{3}{20}$$

을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 β라 할 때, 두 상수 a, b $(b>0)$에 대하여 함수 $h(x)=\cos(ax+\sin(x+b))$가

$$h(0)=\frac{\alpha}{4},\quad h(\pi)=a\pi-\frac{2\pi}{\beta}$$

을 만족시킨다. $ab=2\pi$일 때, 열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $h(x)$가 극대가 되는 모든 x값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 γ라 할 때, $\alpha\times\beta\times\gamma=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ **확인 사항** ○ **답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.**

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 풀지마세요 모의고사

공통과목

1	⑤	2	①	3	②	4	②	5	③
6	④	7	④	8	⑤	9	③	10	④
11	③	12	②	13	⑤	14	⑤	15	②
16	13	17	4	18	6	19	14	20	11
21	9	22	11						

확률과 통계

23	②	24	②	25	③	26	①	27	③
28	④	29	20	30	927				

미적분

23	③	24	⑤	25	②	26	③	27	①
28	③	29	96	30	67				

수학 콘텐츠 반	"상위권의 차이는 재능이 아니라 관리에서 갈린다!!"
콘텐츠 소개 (샘플 1회 참고)	① 주간지 - 매주 60문항 → 사고 흐름을 점검하고 실력을 유지, 확장하기 위한 일일테스트 양식의 훈련지 ② 평가원 기출분석서 - 매주 약 50문항 → 출제자의 시선으로 문제를 다시 해석하는 고급 훈련 콘텐츠 ③ 2026년 (EBS/전국 모의고사) 리빌드 문항 제공 "문항 수는 많지만, 목적 없는 문제는 단 한 문제도 없다!!"
개강일	1월
일주일 콘텐츠 소화 인증샷	매주 토요일 오후 1시 ~ 일요일 밤 10시 [개인톡 사진으로 검증] "상위권은 주말에 무너지는 것이 아니라, 주말에 완성된다!!"
콘텐츠 제작 및 관리 강사 소개	황보 백 [수학 콘텐츠 제작 전문가] [유명 인강 강사님들 문항 공급책] [오르비 출판사 출간 도서] 랑데뷰세미나 랑데뷰 라이트N제 시리즈 랑데뷰 기출과 변형 시리즈 랑데뷰 N제 폴포 시리즈 랑데뷰 N제 쉬사준킬 시리즈 랑데뷰 N제 킬러극킬 시리즈 랑데뷰★수학 모의고사 시리즈 랑데뷰 평가원-싱크로율99% 모의고사 [랑데뷰수학 출판사 출간 도서] 랑데뷰 평기출 2027 시리즈 랑데뷰 상수 시리즈 랑데뷰 프리미엄N제 시리즈
관리 추천 대상	수학 영역 1~2등급, 독학생
가격	비대면 [온라인 : 월 5만] 대면 [장소 : 송원학원]
문의	문자 : 010-5673-8601 카톡 : hbb100

랑데뷰수학 콘텐츠 온라인 관리반

상위권을 유지하는 공부가 아니라, 상위권을 완성하는 시스템

1. 이 반은 무엇이 다른가

이 반은 문제를 무작정 **많이 푸는 반이 아닙니다.**
문제를 **해석하고 통제하는 힘**을 기르는 반입니다.
이미 수학 1~2등급의 실력을 갖춘 학생들이 실수로 흔들리지 않고 시험 상황에서도 사고 흐름을 유지하며 기출을 '예상 가능한 영역'으로 만드는 것
이것이 이 반의 목표입니다.
상위권의 차이는 재능이 아니라, 관리에서 갈립니다.

2. 대상 학생

수학 영역 **1~2등급 학생**
문제는 풀리지만, **왜 풀리는지 명확하지 않은 학생**
기출을 여러 번 풀었는데도 시험에서 불안한 학생
고난도 문항에서 **접근 방향이 흔들리는 학생**

3. 제공되는 핵심 콘텐츠 [샘플 참고]

① 주간지 (매주 60문항)–필수

주간지는 **실력을 유지하는 자료가 아니라, 점검하고 보완하는 자료**입니다.
매주 5회분 일일 테스트 구성
난이도와 사고 유형을 의도적으로 배치
각 1회분의 구성 [3단계 공통A형→공통B형→선택과목]
A형
쉬운 4점 × 2문제
어려운 4점 × 3문제
→ 실수 지점, 사고 붕괴 지점 훈련
B형
어려운 3점 × 3문제
쉬운 4점 × 2문제
→ 기본기를 속도로 전환
선택 과목
확통 / 미적분 / 기하 각 4점 2문제
→ 선택과목에서도 사고 일관성 유지
킬러는 갑자기 등장하지 않습니다. 이미 연습한 사고의 다른 모습일 뿐입니다.

② 평가원 기출분석서 (매주 약 50문항)–선택

기출을 "외우는 자료"가 아니라
출제자의 시선으로 다시 해석하는 자료입니다.

하나의 기출 문항을 여러 관점에서 분석
단계별 사고 흐름을 따라가며 해결
문제를 푸는 과정 자체가 '분석'이 되도록 설계
기출을 외운 학생은 불안하고, 기출을 이해한 학생은 흔들리지 않습니다.

③ 2026년 (EBS/전국 모의고사) 리빌드 문항 제공– 선택
EBS 수능특강·수능완성,
평가원·교육청·더프 등 전국 모의고사의 이슈 문항을
출제 의도를 보존한 리빌드 문항으로 재구성하여 제공합니다.
EBS 문항은 외우는 대상이 아니라 출제자가 의도한 사고 흐름을 재구성하는 대상이며,
모의고사의 가치는 적중 여부가 아니라 출제 실험에서 무엇을 보려 했는지에 있습니다.

4. 관리 운영 방식

관리 시간 : 토요일 오후 1시~일요일 밤 10시
주중 학습 결과 점검 + 다음 주 학습 방향 설정
주말을 **실력 회복 시간이 아닌, 실력 도약 시간**으로 활용
① 핵심 자료 중 주간지 60문항은 필수 제공
② 주간지 소화량과 정도에 따라 평가원 기출분석서와 2026년 주요 리빌드 문항 선택 제공
→ 자료가 쌓이면 스트레스가 쌓이므로 주간지 소화할 수 있는 역량이 될 때 나머지 자료 제공 ⇨ 추가 금액 없는 같은 가격인데 열심히 해서 선택 자료도 받아야겠죠?

상위권은 주말에 무너지지 않습니다. 주말에 완성됩니다.

5. 이 반을 통해 기대할 수 있는 변화

✔ 문제 접근 속도 안정
✔ 고난도 문항에서의 방향성 확보
✔ 실수 패턴의 구조적 교정
✔ 기출에 대한 불안감 감소
✔ 시험장에서 사고 흐름 유지

6. 한 문장으로 정리하면

이 반은
수학 실력을 '운에 맡기지 않는 상태'로 만드는 반입니다.

랑데뷰 풀지마세요 모의고사

공통과목

〔출제자 : 황보백 010-5673-8601〕

1) 정답 ⑤

$\dfrac{3^{\sqrt{5}+2}}{3^{\sqrt{5}-2}}=3^4=81$

2) 정답 ①

$3^{-\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}=3^{-\frac{1}{2}}\times\left(3^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$=3^{-\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{3}{2}}$

$=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

3) 정답 ②

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\times 4^{\frac{3}{8}}=2^{-\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{3}{4}}$

$=2^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2}$

4) 정답 ②

$2^{\sqrt{24}+1}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{6}+1}=2^{2\sqrt{6}+1}\times 2^{-2(\sqrt{6}+1)}$

$=2^{2\sqrt{6}+1-2(\sqrt{6}+1)}$

$=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

5) 정답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-4x-6$에서

$f'(x)=3x^2+4x-4$

한편, $f(2)=2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

따라서

$f'(2)=12+8-4=16$

6) 정답 ④

$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=\int_{-3}^{3}\left(4x^3+ax^2+1\right)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{3}\left(ax^2+1\right)dx$

$=2\left[\dfrac{1}{3}ax^3+x\right]_0^3$

$=2\{(9a+3)-(0+0)\}$

$=24$

따라서 $18a+6=24$, $a=1$

$f(x)=4x^3+x^2+1$이므로 $f(1)=4+1+1=6$

7) 정답 ④

함수 $f(x)=\dfrac{1}{27}x^3+5x$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{1}{9}x^2+5$

이므로 구하는 값은

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=6$

8) 정답 ⑤

$f(x)=2x^3+x-2$에서

$f'(x)=6x^2+1$

따라서 $f'(1)=7$

9) 정답 ③

[그림 : 최성훈T]

[그림 : 배용제T]

$f(0)=f(p)=f'(p)=0$에서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x(x-p)^2$이다.

$\therefore$ $\mathrm{R}(p,\,0)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{OS}}=4$, $\overline{\mathrm{QS}}=2$이다.

따라서 $\mathrm{Q}(4,\,2)$

$f(4)=2\ \to\ f(4)=\dfrac{1}{2}\times4\times(4-p)^2=2$

$(4-p)^2=1$에서 $p=3$이다. ($\because\ 0<p<4$)

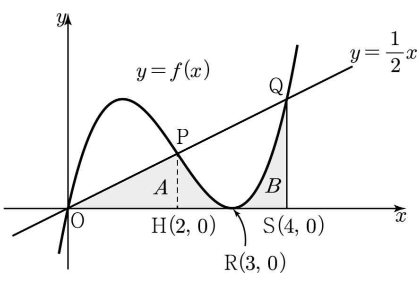
$f(x)=\dfrac{1}{2}x(x-3)^2$이고 $f(x)=\dfrac{1}{2}x$에서

$\dfrac{1}{2}x(x-3)^2=\dfrac{1}{2}x$

$(x-3)^2=1$

$x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore$ $\mathrm{P}(2,\,1)$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$A = \triangle\mathrm{OPH} + \int_2^3 f(x)dx$

$B = \int_3^4 f(x)dx$

이다.

따라서

$$
\begin{aligned}
A+B &= \frac{1}{2}\times 2\times 1 + \int_2^4 f(x)dx \\
&= 1 + \int_2^4 \frac{1}{2}x(x-3)^2 dx \\
&= 1 + \frac{1}{2}\int_2^4 (x^3-6x^2+9x)dx \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_2^4 \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{256-16}{4} - 2(64-8) + \frac{9(16-4)}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(60-112+54) \\
&= 1+1 = 2
\end{aligned}
$$

이다.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to k}\frac{(g(x))^2-(g(k))^2}{x-k} \\
&= \lim_{x\to k}\left\{\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times(g(x)+g(k))\right\} \\
&= 2g'(k)g(k) \ \cdots\cdots \ ㉠
\end{aligned}
$$

따라서 $\lim_{x\to k}\frac{t|x|g(x)-(g(k))^2}{x-k} = 2g'(k)g(k)$이다.

$x\to k$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to k}\frac{t|x|g(x)-(g(k))^2}{x-k}$의 (분자)에서 $x=k$일 때,

$t|k|g(k)-(g(k))^2 = 0$

$g(k)(t|k|-g(x)) = 0$

$g(x)\neq 0$ ($\because g(k) \ge A+B=2$)이므로 $g(k)=t|k|$만족시키는 k의 값이 t, $-t$뿐이므로

$g(t)=t^2$, $g(t)=-t^2$ 이다.$\cdots\cdots$ ㉡

또한

$\lim_{x\to k}\frac{t|x|g(x)-(g(k))^2}{x-k}$

에서 $l(x)=t|x|f(x)$라 하면 $x\to t$일 때, $l(x)=txf(x)$이고

$l(t)=t^2f(t)=t^4$이므로 $k=t$라 하면

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to t}\frac{t|x|g(x)-t^4}{x-t} \\
&= \lim_{x\to t}\frac{l(x)-l(t)}{x-t} \\
&= l'(t) \\
&= tg(t)+t^2g'(t) \quad (\because l'(x)=tg(x)+txg'(x)) \\
&= t^3+t^2g'(t)
\end{aligned}
$$

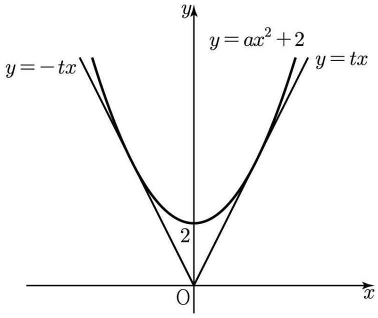
㉠에서 $2g'(k)g(k)=2g'(t)(t^2)=2t^2g'(t)$

$2t^2g'(t)=t^3+t^2g'(t)$

$g'(t)=t$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=tx$에 $x=t$에서 접하고 $y=-tx$에 $x=-t$에서 접해야 한다. $\cdots\cdots$ ㉣

따라서 $g(x)$는 y축 대칭함수이다.



즉, $g(x)=ax^2+2$이다.

㉣에서 $f(x)-tx=a(x-t)^2$

$g(x)=a(x-t)^2+tx=ax^2+(1-2a)tx+at^2$

$1-2a=0$, $at^2=2$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $t=2$이다.

$g(x)=\frac{1}{2}x^2+2$이므로 $g(t)=g(2)=\frac{1}{2}\times 4+2=4$이다.

[랑데뷰팁]

㉡에서 이차함수 $f(x)$는 y축 대칭이므로 $f(x)=ax^2+2$라 할 수 있고 $f(x)=t|x|$를 만족시키는 x의 값의 개수가 2이므로 (t, t^2)에서 직선 $y=tx$에 접한다는 것을 알 수 있다.

따라서

$$h(x)=\begin{cases}4-2^x & (x<1)\\ \log_2(a-x) & (1 \le x < a)\end{cases}$$

$x<1$일 때, $h(x)=4-2^x$의 그래프는 점근선이 $y=4$이고 감소하는 그래프이다. $1 \le x < a$에서 $h(x)=\log_2(a-x)$의 그래프도 감수하므로 함수 $h(x)$가 최댓값을 갖기 위해서는 $h(1)=\log_2(a-1) \ge 4$이어야 한다.

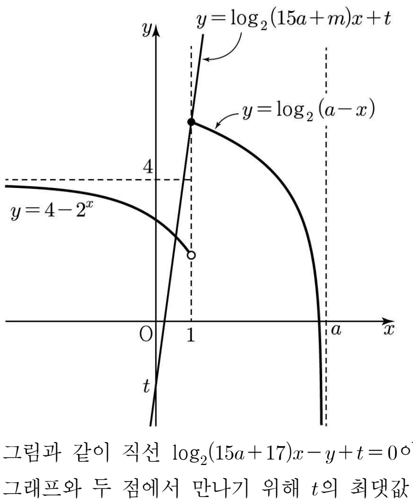
$a-1 \ge 16$

$\therefore\ a \ge 17$

따라서 $m=17$

$\log_2(15a+17)x-y+t=0 \to y=\log_2(15a+17)x+t$

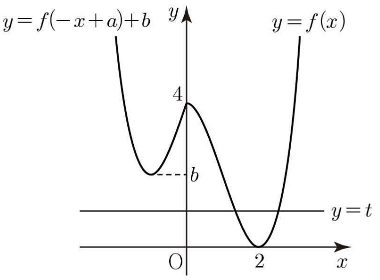
직선 $\log_2(15a+17)x-y+t=0$은 기울기가 양수 $\log_2(15+17)$이고 y절편이 t이다.



그림과 같이 직선 $\log_2(15a+17)x-y+t=0$이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 두 점에서 만나기 위해 t의 최댓값 $t=-4$는 직선

$\log_2(15a+17)x-y+t=0$이 $(1,\ \log_2(a-1))$을 지날 때 나타난다.
$\log_2(15a+17)-\log_2(a-1)-4=0$
$\log_2\dfrac{15a+17}{a-1}=4$
$\dfrac{15a+17}{a-1}=16$
$15a+17=16a-16$
$\therefore\ a=33$

10) 정답 ④
[그림 : 도정영T]
$x \geq 0$일 때, 함수 $g(x)=(x+1)(x-2)^2$는 $x=2$에서 극솟값이자 최솟값인 0을 갖는 그래프이다.
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}g(x) \rightarrow f(a)+b=4$ …… ㉠
곡선 $y=f(-x+a)+b$는 곡선 $y=f(x)$를 y축 대칭이동한 뒤 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 곡선이다.
따라서 $x<0$에서 함수 $g(x)$도 극솟값을 가지므로 그래프 개형은 그림과 같다.



함수 $h(t)$가 $t=0,\ t=2,\ t=4$에서 불연속이므로 $x<0$에서 함수 $g(x)$의 극솟값은 2이어야 하고 극댓값은 존재하지 않아야 한다. …… ㉡
따라서 $0<a<2$이고 $b=2$이다. …… ㉢
㉠에서 $f(a)=2$
$(a+1)(a-2)^2=2$
$(a+1)(a^2-4a+4)=2$
$a^3-3a^2+2=0$
$(a-1)(a^2-2a-2)=0$
$a=1$ 또는 $a=1\pm\sqrt{3}$
$\therefore\ a=1\ (\because$ ㉢$)$
$g(x)=\begin{cases} f(-x+1)+2 & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$
이므로 $g(-2)=f(3)+2=4+2=6$이다.
[랑데뷰팁]-㉡설명
$x<0$에서 극댓값 M이 존재하면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위해서는 그래프 개형에서 $M>4$이므로 함수 $h(t)$는 $t=0,\ 2,\ M$에서 불연속이 되어 모순이다.
따라서 $a_7=g(-2)+ab=6+2=8$이다.
(나)에서 네 항 $a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$ 중 짝수인 항의 개수는 1이하이므로 다음과 같은 경우로 나눠서 구할 수 있다.

(i) 네 항 $a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$ 이 모두 홀수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	홀	홀	홀	8

a_3과 a_4이 홀수이면 $a_5=a_3+a_4$의 값은 짝수이어야 하므로 모순이다.
(ii) a_3이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
짝	홀	홀	홀	8

a_4과 a_5가 홀수이면 $a_6=a_4+a_5$의 값은 짝수이어야 하므로 모순이다.
(iii) a_4이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	짝	홀	홀	8
④ $8-3m$	① $2m$ (m은 홀수)	③ $8-m$	② m	8

④에서 a_3이 자연수이므로 가능한 홀수 m의 값은 1뿐이다.
따라서

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
② 1 10	① 4	5	2	7	1	8

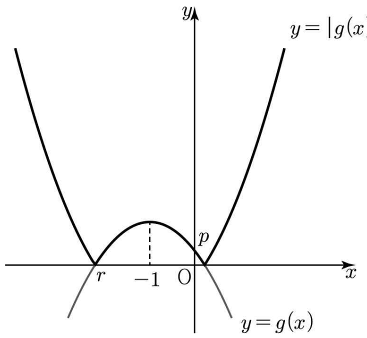
그러므로 $a_1=1$ 또는 $a_1=10$
(iv) a_5이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	홀	짝	홀	8
		16		8

a_5가 $g(-2)+ab=8$보다 큰 짝수이므로 모순이다.
(v) a_6이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	홀	홀	짝	8

a_5가 짝수이면 $a_7=a_5+a_6$에서 홀수가 되어야 하는데 8로 모순이다.
(i)~(v)에서 a_1의 최솟값 $m=1$이다.
따라서 $h(x)=-x^2-2x+p$이다.
함수 $k(x)$는 함수 $|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점에서만 미분가능하지 않는다.
함수 $|h(x)|$가 미분가능하지 않는 점의 x좌표는 이차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 두 실근이다. …… ㉠
따라서 이차함수 $h(x)$는 이차항의 계수가 음수이고 축의 방정식이 $x=-1$이고 함수 $|h(x)|$가 $x=r\ (r<0)$에서만 미분가능하지 않으므로 y절편 p는 양수이어야 한다.



$$|h(x)|=\begin{cases} x^2+2x-p & (|h(x)|<0 \cap x \le 0) \\ -x^2-2x+p & (|h(x)| \ge 0 \cap x \le 0) \end{cases}$$

에서 방정식 $h(x)=0$의 음수근이 r이므로

$$|h(x)|=\begin{cases} x^2+2x-p & (x<r) \\ -x^2-2x+p & (r \le x \le 0) \end{cases}$$

이므로

$$k(x)=\begin{cases} 2x^2+2x-p & (x<r) \\ -2x+p & (r \le x \le 0) \\ q\{h(x)\}^2+qx & (x>0) \end{cases}$$

이다.

$$k'(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<r) \\ -2 & (r<x<0) \\ 2qh(x)h'(x)+q & (x>0) \end{cases}$$

에서 함수 $k(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$h(x)=-x^2-2x+p \rightarrow h(0)=p$

$h'(x)=-2x-2 \rightarrow h'(0)=-2$

에서

$x=0$에서 연속 $\rightarrow p=q\{h(0)\}^2 \rightarrow p=q\times p^2 \rightarrow \therefore\ pq=1$

$x=0$에서 미분가능 $\rightarrow -2=2q\times p\times(-2)+q \rightarrow \therefore\ q=2$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$

$h(x)=-x^2-2x+\dfrac{1}{2}$이므로 ㉠에서 방정식 $-x^2-2x+\dfrac{1}{2}=0$의 두 실근 중 음의 실근이 r이다.

$2x^2+4x-1=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$에서 $r=-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다.

따라서

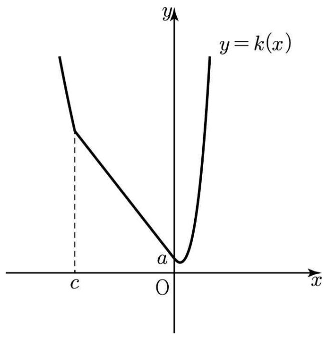
$$p+q+r=\frac{1}{2}+2-1-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

이다.

[랑데뷰팁]

$[\{h(x)\}^2]'=\{h(x)\times h(x)\}'=h'(x)h(x)+h(x)h'(x)=2h(x)h'(x)$

이고 함수 $k(x)=\begin{cases} 2x^2+2x-\dfrac{1}{2} & \left(x<-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \\ -2x+\dfrac{1}{2} & \left(-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \le x \le 0\right) \\ 2\{h(x)\}^2+2x & (x>0) \end{cases}$의 그래프는 그림과 같다.



11) 정답 ③

$g(x)=\displaystyle\int_p^x f(t)dt$에서 $g(p)=0$, $g'(x)=f(x)$이다.

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{4}$이고 최솟값이 -4인 사차함수이다.

$$h(x)=\frac{|g(x)-g(1)|}{|x|-1}=\begin{cases} \dfrac{|g(x)-g(1)|}{x-1} & (x \ge 0) \\ \dfrac{|g(x)-g(1)|}{-x-1} & (x<0) \end{cases}$$

이고 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위해서는

$\displaystyle\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$이어야 한다.

$g(x)-g(1)=(x-1)i(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1-}\frac{|g(x)-g(1)|}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)i(x)|}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|x-1||i(x)|}{x-1}=-|i(1)|$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{|g(x)-g(1)|}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)i(x)|}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|x-1||i(x)|}{x-1}=|i(i)|$$

$-|i(1)|=|i(1)|$이므로 $i(1)=0$이다.

따라서 함수 $g(x)-g(1)$은 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

(ii) 함수 $h(x)$가 $x=-1$에서 연속이기 위해서는

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}h(x)=\lim_{x\to-1+}h(x)$이어야 한다.

$g(x)-g(1)=(x+1)j(x)$라 하면

$$\lim_{x\to-1-}\frac{|g(x)-g(1)|}{-x-1}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{|(x+1)j(x)|}{-x-1}=\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1||j(x)|}{-x-1}=|(j(-1))|$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{|g(x)-g(1)|}{-x-1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{|(x+1)j(x)|}{x-1}=\lim_{x\to-1+}\frac{|x+1||j(x)|}{-x-1}=-|(j(-1))|$$

$|j(-1)|=-|j(-1)|$이므로 $j(-1)=0$이다.

따라서 함수 $g(x)-g(1)$은 $(x+1)^2$을 인수로 가진다.

(i), (ii)에서 $g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)^2+g(1)$이다.

함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(-1)=g(1)$이므로 $g(1)=-4$이다.

$g(x)=\frac{(x^2-1)^2}{4}-4$

$g(p)=0 \to (p^2-1)^2=16 \to p^2=5$

$g'(x)=f(x)=x^3-x$

이므로 $f(p^2)=f(5)=125-5=120$이다.

따라서

$$k(x)=\begin{cases} 2\log_a(x+b)-b & (-b<x\le 0) \\ a^{\frac{x}{2}} & (x>0) \end{cases}$$

이다.

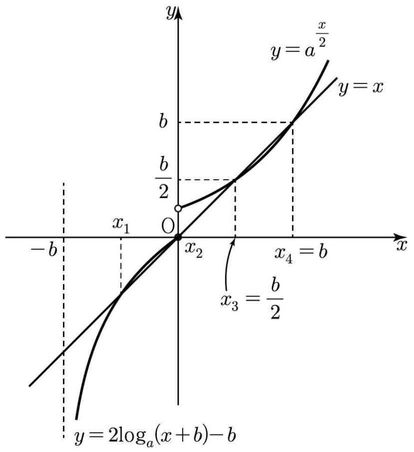
함수 $y=a^{\frac{x}{2}}$의 역함수는 $y=2\log_a x$이고 함수 $y=2\log_a x$를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하면 $y=2\log_a(x+b)-b$이다. …… ㉠

곡선 $y=a^{\frac{x}{2}}$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고 함수 $k(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수가 4이므로

곡선 $y=a^{\frac{x}{2}}$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수는 2이어야 한다.

따라서 $x>0$에서 만나는 점의 x좌표가 x_3, x_4 이고

$k(0)=0$이므로 $x_2=0$이다.



㉠에서 $x_4=b$이고 $x_1=x_3-b$이다.

$x_1+x_3=0 \to 2x_3=b \to \therefore\ x_3=\frac{b}{2}$

$(x_3, x_3) \to \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$가 $y=a^{\frac{x}{2}}$ 위에 있으므로 $\frac{b}{2}=a^{\frac{b}{4}}$ …… ㉡

$(x_4, x_4) \to (b, b)$가 $y=a^{\frac{x}{2}}$ 위에 있으므로 $b=a^{\frac{b}{2}}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$\left(\frac{b}{2}\right)^2=b \to b^2=4b \to b=4$ ($\because b>0$)

$b=4$이므로 ㉢에서 $a=2$이다.

$$k(x)=\begin{cases} 2\log_2(x+4)-4 & (-4<x\le 0) \\ 2^{\frac{x}{2}} & (x>0) \end{cases}$$

$k(a)=2$, $k(a+b)=k(6)=2^3=8$이다.

따라서 $\overline{CE}=\sqrt{k(a+b)-p^2}=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$이고

$\sin(\angle ACE)=\frac{1}{k(a)}=\frac{1}{2}$이다. $\angle ACE>\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle ACE=\frac{5}{6}\pi$이다.

따라서 $\angle BCE=\frac{\pi}{6}$, $\angle BDE=\frac{\pi}{3}$이다.

삼각형 BDE는 정삼각형이다.

이등변삼각형 DCE에서 $\angle CDE=\frac{2}{3}\pi$, $\overline{CE}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{CD}=\overline{DE}=x$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$3=x^2+x^2-2x^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\overline{CD}=x=1$

이다.

$\overline{AC}=1$이므로 삼각형 ACE에서

$\overline{AE}^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\quad=1+3+3=7$

따라서 $\overline{AE}=\sqrt{7}$이다.

사각형 BCFE가 원에 내접하므로

$\angle ACF=\angle AEB$, $\angle AFC=\angle ABE$

따라서 $\triangle ACF \backsim \triangle AEB$이고 $\overline{BE}=1$이므로

$\overline{AC}:\overline{CF}=\overline{AE}:\overline{BE} \to 1:\overline{CF}=\sqrt{7}:1$

$\therefore\ \overline{CF}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

12) 정답 ②

$a^x-k=k(a^{-x}+1)-\frac{1}{2}$

$a^x-2k+\frac{1}{2}-\frac{k}{a^x}=0$

$a^{2x}+\left(-2k+\frac{1}{2}\right)a^x-k=0$

$(a^x-2k)\left(a^x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore\ a^x=2k \to x=\log_a 2k$

$\mathrm{A}(\log_a 2k, k)$이고 점 A는 곡선 $y=\frac{a^x}{2}$위의 점이기도 하다.

직선 AB의 기울기가 -1이고 곡선 $y=\frac{a^{x-3}}{2}-3$은 곡선

$y=\frac{a^x}{2}$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프이므로 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이다.

$\therefore\ \overline{AB}=3\sqrt{2}$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-(x-\log_a 2k)+k=-x+\log_a 2k+k$

따라서

$\overline{OH}=\frac{|-\log_a 2k-k|}{\sqrt{2}}=\frac{\log_a 2k+k}{\sqrt{2}}$ $\left(\because k>\frac{a}{2}\right)$

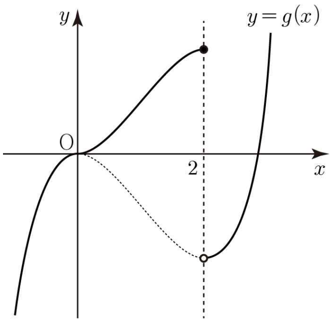
$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{AB}} \rightarrow \dfrac{\log_a 2k+k}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$에서 $\log_a 2k+k=6$이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0,\ x>2) \\ |f(x)| & (0 \le x \le 2) \end{cases}$

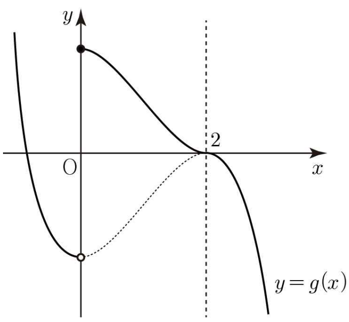
삼차함수 $f(x)$가 $0 \le x \le 2$에서 $f(x) \ge 0$이면 $g(x)=f(x)$으로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 (나)에 모순이다.
따라서 $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) \le 0$인 x가 존재해야 한다.
즉, $f(c)=0$ $(0 \le c \le 2)$인 c가 존재한다. …… ㉠

(가)에서 $\lim_{h\to 0}\dfrac{g(p+h)-g(p-h)}{h}=g'(p-)+g'(p+)$

이므로
$g'(p-)+g'(p+)=0$
에서 함수 $g(x)$의 $x=p$에서의 좌미분계수와 우미분계수의 합이 0이기 위해서는
함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능할 때, $g'(p)=0$ …… ㉡
이거나
함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않을 때. $g(p)=0$이고 $x=p$의 좌우에서 함수 $g(x)$의 값의 부호가 다르면 된다. …… ㉢
㉡ → $f'(p)=0$
㉢ → ㉠에서 $p=c$이다.
(가)에서 p의 개수가 2이기 위해서는 $c=0$ 또는 $c=2$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.
따라서 $S=2$이다.
(i) 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,



x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록하는 실수 t의 최댓값이 $2S=4$이므로 $f(2)=-4$이다.
$f(x)=\alpha x^2(x-3)$ $(\alpha>0)$
$f(2)=-4\alpha=-4$
$\therefore\ \alpha=1$
따라서 $f(x)=x^2(x-3)$
$g(4)=f(4)=16$
(ii) 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때,



x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록하는 실수 t의 최댓값이 4이므로 $f(0)=-4$이다.
$f(x)=\beta(x+1)(x-2)^2$ $(\beta<0)$
$f(0)=4\beta=-4$
$\therefore\ \beta=-1$
따라서 $f(x)=-(x+1)(x-2)^2$
$g(4)=-20$
(i), (ii)에서 $g(4)$의 최댓값 $M=16$이고 최솟값 $m=-20$이다.
따라서 $5M+4m=0$
(다)에서 $a_2+a_4=5M+4m=0$
(라)에서
$a_{n+1}=|a_n|-2$ 또는 $a_{n+1}=3a_n$
이다.
$a_2=x$라 하면

a_2	a_3	a_4	$a_2+a_4=0 \rightarrow a_4=-a_2$
		$\lvert\lvert x\rvert-2\rvert-2$	$\lvert\lvert x\rvert-2\rvert=-x+2$ $-x+2 \ge 0 \rightarrow x \le 2$ …… ㉠ 양변 제곱하면 $x^2-4\lvert x\rvert+4=x^2-4x+4$ $\lvert x\rvert=x \rightarrow x \ge 0$ …… ㉡ $0 \le x \le 2$ $\therefore\ a_2=0$ 또는 1 또는 2
	$\lvert x\rvert-2$	$3\lvert x\rvert-6$	$3\lvert x\rvert-6=-x$ $x \ge 0$일 때, $3x-6=-x$ $x=\dfrac{3}{2}$ $x<0$일 때, $-3x-6=-x$ $x=-3$ $\therefore\ a_2=-3$
x			
	$3x$	$\lvert 3x\rvert-2$	$\lvert 3x\rvert=-x+2$ $x \ge 0$일 때, $x=\dfrac{1}{2}$ $x<0$일 때, $x=-1$ $\therefore\ a_2=-1$
		$9x$	$9x=-x \rightarrow x=0$ $\therefore\ a_2=0$

따라서 a_2의 값은 -3, -1, 0, 1, 2이 가능하다.
$a_2=|a_1|-2$ 또는 $a_2=3a_1$이다.
(i) $a_2=|a_1|-2$에서 $|a_1|=a_2+2$
a_1의 값은 ±1, ±2, ±3, ±4이 가능하다.
(ii) $a_2=3a_1$에서 $a_1=\dfrac{a_2}{3}$
a_1의 값은 -1, 0이 가능하다.
(i), (ii)에서 a_1의 최솟값은 -4, 최댓값은 4이다.
따라서 $-4\times4=-16$이다.

13) 정답 ⑤

(가)에서

$a_n > 0$일 때, $a_{n+1} = -2a_n + 1$

$a_n < 0$일 때, $a_{n+1} = a_n{}^2$

이다.

즉, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n{}^2 & (a_n < 0) \\ -2a_n + 1 & (a_n > 0) \end{cases}$ 이다.

(나)에서 $a_1 \times a_2 > 0$이므로

$a_1 > 0$, $a_2 > 0$ 또는 $a_1 < 0$, $a_2 < 0$이다.

$a_1 < 0$이면 $a_2 = a_1{}^2 > 0$이므로 (나)에 모순이다.

$a_1 > 0$이면 $a_2 = -2a_1 + 1 > 0$이다.

$\therefore\ 0 < a_1 < \dfrac{1}{2}$

$a_3 = -2a_2 + 1 = 4a_1 - 1$

(i) $a_3 > 0$일 때, 즉, $\dfrac{1}{4} < a_1 < \dfrac{1}{2}$

a_3	a_4	a_5
a_3	$-2a_3+1$	$(-2a_3+1)^2$ $(a_4 < 0)$ $\to$ ①
		$4a_3-1$ $(a_4 > 0)$ $\to$ ②

① $a_4 = -2a_3 + 1 < 0 \to a_3 > \dfrac{1}{2} \to 4a_1 - 1 > \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{3}{8} < a_1 < \dfrac{1}{2}$

$a_3 + a_5 =$에서 $a_3 + (-2a_3+1)^2 = 0 \to 4a_3{}^2 - 3a_3 + 1 = 0$

$D = 9 - 16 < 0$에서 실수 a_3의 값이 존재하지 않는다. (모순)

※ $a_3 > 3$이고 $a_4 < 0$이면 $a_5 > 0$이므로 $a_3 + a_5 > 0$이 된다.

② $a_4 = -2a_3 + 1 > 0 \to a_3 < \dfrac{1}{2} \to 4a_1 - 1 < \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{1}{4} < a_1 < \dfrac{3}{8}$

$a_3 + a_5 = 0$에서 $a_3 + 4a_3 - 1 = 0 \to a_3 = \dfrac{1}{5}$

$4a_1 - 1 = \dfrac{1}{5}$에서 $a_1 = \dfrac{3}{10}$

(ii) $a_3 < 0$일 때, 즉, $0 < a_1 < \dfrac{1}{4}$

a_3	a_4	a_5
a_3	$a_3{}^2$	$-2a_3{}^2+1$

$a_3 + a_5 = 0$에서 $a_3 - 2a_3{}^2 + 1 = 0 \to\ 2a_3{}^2 - a_3 - 1 = 0$

$(2a_3+1)(a_3-1) = 0$

$a_3 = -\dfrac{1}{2}\ (\because a_3 < 0)$

$4a_1 - 1 = -\dfrac{1}{2}$

$a_1 = \dfrac{1}{8}$

(i), (ii)에서 a_1의 최댓값은 $\dfrac{3}{10}$이고 최솟값은 $\dfrac{1}{8}$이다.

$10M = 3$, $8m = 1$

따라서 (다)에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 1$이므로

사차함수 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로 $f(x) = x^2(ax^2 + bx + 1)$라 할 수 있다.

따라서 $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$라 하면 $h(x) = ax^3 + bx^2 + x$이다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\{g(x) - x\}\{g(x) - h(x)\} = 0$를 만족시키므로 함수 $g(x)$는 $g(x) = x$ 또는 $g(x) = h(x)$이다.

(라)에서 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{g(x) - g(3)}{x-3}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x = 3$에서 미분가능하지 않다.

$0 \le x < 3$일 때, $g(x) = x$, $x \ge 3$일 때, $g(x) = h(x)$

또는

$0 \le x < 3$일 때, $g(x) = h(x)$, $x \ge 3$일 때, $g(x) = x$

이어야 한다.

함수 $g(x)$가 $x = 3$에서 연속이므로 $h(3) = 3$이다.

$h(3) = 27a + 9b + 3 = 3$

$\therefore\ b = -3a$

$h(x) = ax^3 - 3ax^2 + x$

$g(-1) \neq -1$이므로 $x < 0$일 때, $g(x) = h(x)$이다.

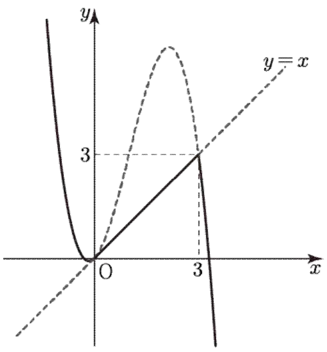
$g(-1) = h(-1) = -a - 3a - 1 = 3$

$\therefore\ a = -1$

따라서 $h(x) = -x^3 + 3x^2 + x$

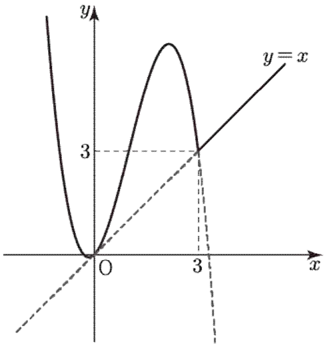
그러므로

$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + x & (x < 0) \\ x & (0 \le x < 3) \\ -x^3 + 3x^2 + x & (x \ge 3) \end{cases}$ …… ㉠



또는

$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + x & (x < 3) \\ x & (x \ge 3) \end{cases}$ …… ㉡



이다.

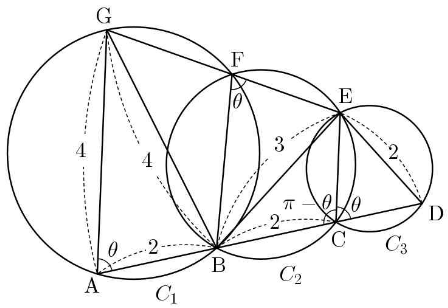
㉠, ㉡에서 $g(4)$의 최댓값은 4이고 $g(2)$의 최솟값은 2이다.

$S=4$, $s=2$

따라서

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DE}=2$이고 $\overline{AG}=4$이다.

그림과 같이 $\angle DCE=\theta$라 하면 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합이 π임을 이용하면 $\angle BFE=\angle BAE=\theta$이다.



$\dfrac{\overline{DE}}{\sin(\angle DCE)}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2r_3$,

$\dfrac{\overline{BE}}{\sin(\angle BCE)}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin(\pi-\theta)}=2r_2$,

$\dfrac{\overline{BG}}{\sin(\angle BAG)}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin\theta}=2r_1$

$r_1 : r_2 : r_3 = 4 : 3 : 2$에서 $\overline{BE}=3$, $\overline{BG}=4$이다.

삼각형 ABG에서 $\overline{AG}=4$, $\overline{BG}=4$, $\overline{AB}=2$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$이다.

삼각형 BCE에서 $\overline{CE}=x$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$3^2=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$9=4+x^2+x$

$x^2+x-5=0$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\overline{CE}=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

14) 정답 ⑤

$h(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.

$g(x)=\displaystyle\int_0^x (|h(t)|-|t-1|)dt$라 하면

$g'(x)=|h(x)|-|x-1|$이고 $f(1)=1$이므로 $h(1)=0$이다.

따라서 $g'(1)=0$

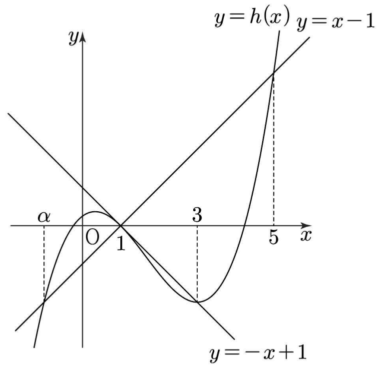
(가)에서 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 4개의 실근 중 하나가 $x=1$이다.

(나)에서 $g'(x)=0$의 실근 중 극값을 갖는 x의 값에 $x=1$이 포함되므로 방정식 $g'(x)=0$은 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

즉, 함수 $|h(x)|-|x-1|$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

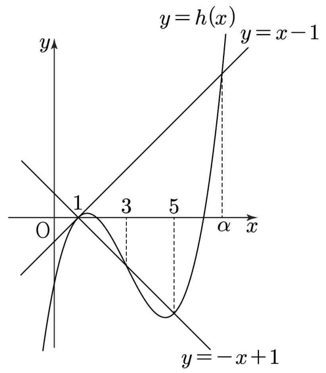
따라서 곡선 $y=h(x)$는 $x=1$에서 직선 $y=-x+1$와 접하거나 $y=x-1$에서 접한다.

(i) 곡선 $y=h(x)$는 $x=1$에서 직선 $y=-x+1$와 접할 때,



$x>1$에서 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+1$과 만나는 점의 개수가 각각 1개이므로 (나) 조건에 모순이다.

(ii) 곡선 $y=h(x)$는 $x=1$에서 직선 $y=x-1$와 접할 때,



$h(x)-(x-1)=a(x-1)^2(x-\alpha)$

$h(x)=a(x-1)^2(x-\alpha)+x-1$

(나)에서

$g'(3)=0 \rightarrow |h(3)|=2 \rightarrow h(3)=-2$ …… ㉠

$g'(5)=0 \rightarrow |h(5)|=4 \rightarrow h(5)=-4$ …… ㉡

㉠에서 $h(3)=4a(3-\alpha)+2=-2$

$a(3-\alpha)=-1$ …… ㉢

㉡에서 $h(5)=16a(5-\alpha)+4=-4$

$a(5-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\dfrac{3-\alpha}{5-\alpha}=2 \rightarrow 3-\alpha=10-2\alpha$

$\therefore\ \alpha=7$

㉢에 $\alpha=7$을 대입하면 $a=\frac{1}{4}$이다.

따라서 $h(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-7)+x-1$

$f(x)-x=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-7)+x-1$

$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-7)+2x-1$

그러므로 $f(-1)=\frac{1}{4}\times4\times(-8)-3=-11$

따라서 $|f(-1)|=11$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는 11이다.

점 A와 점 $\mathrm{C}(-k, 0)$을 지나는 직선의 기울기를 $t(t>0)$라 하면 직선 AC의 방정식은

$y=t(x+k)$

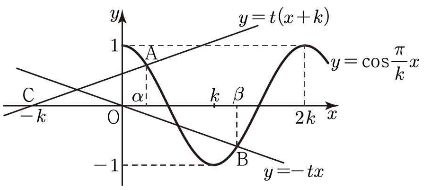
이고 직선 OB의 방정식은 $y=-tx$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$0<\alpha<\frac{k}{2}$인 α에 대하여 점 $\mathrm{A}(\alpha, t(\alpha+k))$

$k<\beta<\frac{3k}{2}$인 β에 대하여 점 $\mathrm{B}(\beta, -t\beta)$

이다.



$\cos\frac{\pi\alpha}{k}=t(\alpha+k)$ …… ㉤

$\cos\frac{\pi\beta}{k}=-t\beta$ …… ㉥

이다.

㉤에서 $\gamma=\alpha+k$라 하면 $k<\gamma<\frac{3k}{2}$이고

$\cos\frac{\pi(\gamma-k)}{k}=t\gamma \rightarrow \cos\left(-\pi+\frac{\pi\gamma}{k}\right)=t\gamma \rightarrow -\cos\frac{\pi\gamma}{k}=t\gamma$

$\rightarrow \cos\frac{\pi\gamma}{k}=-t\gamma$ …… ㉦

이다.

㉥, ㉦에서 $\beta=\gamma$ $\left(\because k<\gamma<\frac{3k}{2}\right)$

따라서 $\alpha=\beta-k$

$\mathrm{A}(\beta-k, t\beta)$, $\mathrm{B}(\beta, -t\beta)$

직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2k}$이므로

$\frac{2t\beta}{-k}=-\frac{1}{k} \rightarrow t\beta=\frac{1}{2}$

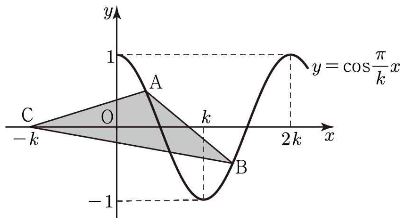
따라서 $\mathrm{A}\left(\beta-k, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta, -\frac{1}{2}\right)$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$에서

두 점 A, B가 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{k}$의 그래프 위의 점이므로

$\alpha=\frac{k}{3}$, $\beta=\frac{4k}{3}$이다.

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{k}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{4k}{3}, -\frac{1}{2}\right)$



선분 AB의 중점은 $\mathrm{M}\left(\frac{5k}{6}, 0\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle\mathrm{ACM}+\triangle\mathrm{BCM}=2\triangle\mathrm{ACM}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{5k}{6}+k\right)\times\frac{1}{2}=\frac{11k}{12}=11$

따라서 $k=12$이다.

두 점 D, E의 x좌표를 각각 a, b라 하면

$\mathrm{D}(a, 2^a)$, $\mathrm{E}(b, 2^b)$

이고 두 점을 x축에 대칭이동한 점은

$\mathrm{D}'(a, -2^a)$, $\mathrm{E}'(b, -2^b)$

이므로

직선 DE의 기울기는 $\frac{2^b-2^a}{b-a}$이고 직선 D′E′의 기울기는

$\frac{-2^b+2^a}{b-a}=-\frac{2^b-2^a}{b-a}$이다.

(다)에서 $-\left(\frac{2^b-2^a}{b-a}\right)^2=-\frac{49}{9}$이다.

따라서 $\left|\frac{2^b-2^a}{b-a}\right|=\frac{7}{3}$이다. …… ㉧

두 직선 DP와 EQ의 기울기는 모두 -1이므로 두 직선의 방정식은 각각 $y=-x+a+2^a$, $y=-x+b+2^b$이다.

직선 EQ의 y절편은 $b+2^b$이고 직선 DP의 x절편은 $a+2^a$이다.

$k=12$이므로

(라)에서 $(b+2^b)-(a+2^a)=k-2=10$

$\therefore\ (b-a)+(2^b-2^a)=10$ …… ㉨

따라서 $b+2^b>a+2^a$이므로 $\frac{2^b-2^a}{b-a}>0$이므로 ㉧에서

$\frac{2^b-2^a}{b-a}=\frac{7}{3}$이다. …… ㉩

따라서 ㉨의 양변을 $b-a$로 나누면

$1+\frac{7}{3}=\frac{10}{b-a}$

$b-a=3$

$\therefore\ b=a+3$

㉩에 대입하면 $2^{a+3}-2^a=7$이다.

$7\times2^a=7$

$2^a=1$

$\therefore\ a=0,\ b=3$

$\therefore\ \mathrm{D}'(0, -1)$, $\mathrm{E}(3, 8)$

$\overline{\mathrm{D'E}}=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}$

15) 정답 ②

곡선 $y=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$은 주기가 2이므로 점근선 $x=-1$, $x=1$을 갖고 곡선 $y=\left|1-2^{x+1}\right|$은 $(-1, 0)$, $(0, 1)$을 지난다.

함수 $y=\left|1-2^{x+1}\right|$의 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이고 함수 $y=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$의 치역은 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일이기 위해서는 함수 $f(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이어야 한다.

따라서 $p \leq -1$ …… ㉠

$p<x<q$에서 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일이기 위해서는 함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이어야 한다.

따라서 $p \geq -1$ …… ㉡

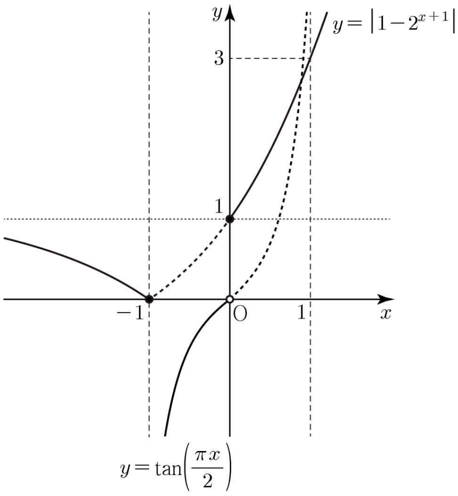
㉠, ㉡에서 $p=-1$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}\left|1-2^{x+1}\right| & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq q) \\ \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) & (-1<x<q)\end{cases}$$

$x<-1$일 때, $f(x)<1$이므로 $x \geq q$일 때, $f(x) \geq 1$이어야 한다.

곡선 $y=\left|1-2^{x+1}\right|$이 $(0, 1)$을 지나고 증가하므로 $q=0$이다.



따라서 $q-p=1$이다.

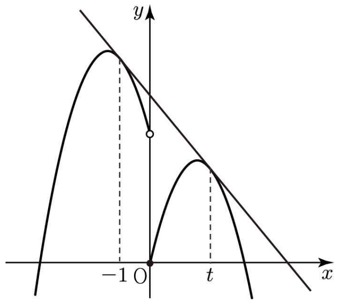
$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (x \geq 0) \\ k(x+4)+8 & (x<0)\end{cases}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $(r, g(r))$에서의 접선의 방정식이 $y=g'(r)(x-r)+g(r)$이므로

부등식 $g(x) \leq g'(r)(x-r)+g(r)$을 만족시키는 x범위는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 접선 $y=g'(r)(x-r)+g(r)$의 그래프보다 아래쪽에 위치하는 범위다.

따라서

모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq g'(r)(x-r)+g(r)$을 만족시키는 실수 r의 범위가 $r \leq -1$ 또는 $r \geq t$이려면 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$위의 두 점 $(t, g(t))$, $(-1, g(-1))$에서의 접선이 일치해야 한다.



(i) $x \geq 0$에서

곡선 $y=-x^2+4x$ 위의 점 $(t, -t^2+4t)$에서 접선의 방정식은

$y'=-2x+4 \rightarrow y'=-2t+4$

$y=(-2t+4)(x-t)+(-t^2+4t)=(-2t+4)x+t^2$ …… ㉢

(ii) $x<0$에서

$g(x)=-(x+4)^2+4(x+4)+8$

$=-x^2-4x+8$

$g(-1)=11$

$g'(x)=-2x-4 \rightarrow g'(-1)=-2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, 11)$에서 접선의 방정식은

$y=-2(x+1)+3+8=-2x+9$ …… ㉣

㉢=㉣에서

$t=3$

이다.

따라서 함수 $i(x)=\begin{cases}-2h(x) & (x<0) \\ |h(x)|-\left|27-x^3\right| & (x \geq 0)\end{cases}$는 $x=3$이 아닌 양수 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않는다.

(i) 함수 $i(x)$가 $x=\alpha$ $(0<\alpha<3, \alpha>3)$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $i(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$\lim_{x\to 0-} i(x)=-2h(0)$

$\lim_{x\to 0+} i(x)=|h(0)|-27$

$-2h(0)=|h(0)|-27$

$h(0)<0$라면 $-2h(0)=-h(0)-27 \rightarrow h(0)=27$ (모순)

$h(0) \geq 0$라면 $-2h(0)=h(0)-27 \rightarrow \therefore\ h(0)=9$

따라서

$\lim_{s\to 0-}\frac{i(0+s)-i(0)}{s}$

$=\lim_{s\to 0-}\frac{-2h(0+s)+2h(0)}{s}$

$=-2\lim_{s\to 0-}\frac{h(0+s)-h(0)}{s}$

$=-2h'(0)$

$\lim_{s\to 0+}\frac{i(0+s)-i(0)}{s}$

$=\lim_{s\to 0+}\frac{|h(0+s)|-27+s^3-|h(0)|+27}{s}$

$=\lim_{s\to 0+}\frac{h(0+s)-h(0)}{s}+\lim_{s\to 0+}s^2$

$=h'(0)$

$-2h'(0)=h'(0) \rightarrow \therefore\ h'(0)=0$

따라서

$h(0)=9$, $h'(0)=0 \to h(x)=x^2(ax+b)+9$라 할 수 있다. …… ㉤

(ii) 함수 $i(x)$가 $x=\alpha$ $(0<\alpha<3,\ \alpha>3)$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $i(x)$는 $x=3$에서 미분가능하다.

$$\lim_{s\to 0-}\frac{i(3+h)-i(3)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0-}\frac{|h(3+s)|-|27-(3+s)^3|-|h(3)|}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0-}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim_{s\to 0-}\frac{\{27-(3+s)^3\}}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0-}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim_{s\to 0-}\frac{-27s-9s^2}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0-}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}+27$$

$$\lim_{s\to 0+}\frac{i(3+s)-i(3)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{|h(3+s)|-|27-(3+s)^3|-|h(3)|}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim_{s\to 0+}\frac{-\{27-(3+s)^3\}}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim_{s\to 0+}\frac{27s+9s^2}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-27$$

에서

$$\lim_{s\to 0-}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}+27=\lim_{s\to 0+}\frac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-27$$

이기 위해서는 함수 $|h(x)|$가 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$\therefore$ $h(3)=0$

$-|h'(3)|+27=|h'(3)|-27 \to |h'(3)|=27$

$\therefore$ $h(3)=0$, $h'(3)=27$ 또는 $h(3)=0$, $h'(3)=-27$ …… ㉥

㉤에서 $h(x)=x^2(ax+b)+9$, $h'(x)=2x(ax+b)+ax^2$이므로

㉥에서

$h(3)=9(3a+b)+9=0$, $3a+b=-1$

$h'(3)=6(3a+b)+9a=-27$, $27a+6b=-27$, $9a+2b=-9$

$h'(3)=6(3a+b)+9a=27$, $27a+6b=27$, $9a+2b=9$

① $3a+b=-1$, $9a+2b=-9$ 에서 $a=-\dfrac{7}{3}$, $b=6$

$$h(x)=x^2\left(-\frac{7}{3}x+6\right)+9$$

$$=-\frac{7}{3}x^3+6x^2+9$$

$$=-\frac{1}{3}\left(7x^3-18x^2-27\right)$$

$$=-\frac{1}{3}(x-3)\left(7x^2+3x+9\right)$$

$7x^2+3x+9=0$의 $D<0$이므로 실근이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $i(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모순이다.

② $3a+b=-1$, $9a+2b=9$에서 $a=\dfrac{11}{3}$, $b=-12$

$$h(x)=x^2\left(\frac{11}{3}x-12\right)+9$$

$$=\frac{11}{3}x^3-12x^2+9$$

$$=\frac{1}{3}\left(11x^3-36x^2+27\right)$$

$$=\frac{1}{3}(x-3)\left(11x^2-3x-9\right)$$

$11x^2-3x-9=0$에서 $x=\dfrac{3\pm 9\sqrt{5}}{22}$

$0<\alpha<3$, $\alpha>3$이므로 함수 $i(x)$는 $x=\dfrac{3+9\sqrt{5}}{22}$에서 미분가능하지 않다.

$\therefore$ $\alpha=\dfrac{3+9\sqrt{5}}{22}$

16) 정답 13

$\log_3(x+2)=\log_3(4x-7)-\log_3 3$

$=\log_3\dfrac{4x-7}{3}$

이므로

$x+2=\dfrac{4x-7}{3}$

$3x+6=4x-7$

$x=13$

17) 정답 4

$f(2)-f(1)=\displaystyle\int_1^2 f'(x)dx$

$\to f(2)=\displaystyle\int_1^2\left(3x^2-4x\right)dx+3$ ($\because$ $f(1)=3$)

$=\left[x^3-2x^2\right]_1^2+3$

$=4$

18) 정답 6

$3\log_3 18+\log_{\frac{1}{9}}64=3\log_3\left(2\times 3^2\right)+\log_{3^{-2}}2^6$

$=3\log_3 2+6\log_3 3-3\log_3 2$

$=6$

19) 정답 14

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $3a_1+a_9=8$에서

$2a_1+\left(a_1+a_9\right)=8$

$2a_1+2a_5=8$

$4a_3=8$

이므로 $a_3=2$

이때 문제에서 $a_3+a_4=7$이라 하였으므로

$a_4=7-2=5$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_4-a_3=5-2$

$=3$

이므로 구하는 값은

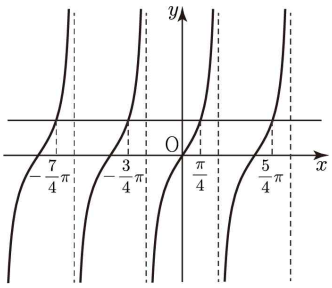
$a_7=a_4+3\times3$
$=5+3\times3=14$

20) 정답 11

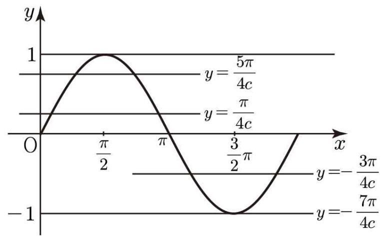
$g(x)=\int_2^x\{f(t)-f(x)\}dt$
$=\int_2^x f(t)dt-f(x)\int_2^x 1dt$
$=\int_2^x f(t)dt-f(x)(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 관하여 미분하면
$g'(x)=f(x)-f'(x)(x-2)-f(x)$
$=-f'(x)(x-2)$
이다.
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로
$g'(0)=0\ \rightarrow\ f'(0)=0$
또한 함수 $g(x)$가 극값의 개수가 1이므로
$g'(x)=0$을 만족시키는 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호 변화가 없어야 한다.
$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이므로
$f'(x)=3x(x-2)$
이다.
$f(0)=a$이므로
$f(x)=\int(3x^2-6x)dx=x^3-3x^2+a$이다.
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극값 a을 가지므로
$g(0)=\int_2^0\{f(t)-f(x)\}dt=a$이다.
㉠에서
$a=\int_2^0 f(t)dt+2a$
$a=-\int_2^0 f(t)dt=\int_0^2(t^3-3t^2+a)dt$
$=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+at\right]_0^2$
$=4-8+2a$
$\therefore\ a=4$
두 삼각형 OPA, OPB가 한 변 OP를 공유하고 넓이가 $\frac{a}{2}=2$로 같으므로 직선 OP와 직선 AB는 평행하다.
직선 OP의 기울기가 -2이므로 상수 k의 값은 -2이다.
점 A의 x좌표를 t라 하면
$\mathrm{A}(t,\ 2^{1-t}+b)$, $\mathrm{B}(t+1,\ 2^{1-t}+b-2)$이다.
점 B가 곡선 $y=2^{1-x}+b$위에 있으므로
$2^{-t}+b=2^{1-t}+b-2$
$\frac{1}{2^t}-\frac{2}{2^t}=-2$
$2^t=\frac{1}{2}$
$\therefore\ t=-1$이다.
따라서 $\mathrm{A}(-1,\ 4+b)$
삼각형 OPA의 넓이는 $\frac{a}{2}=2$

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & (4+b) & 0\end{vmatrix}=2$
$4+b-2=4$
$\therefore\ b=2$
집합 A에서
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\sin x\right)=\sin(c\sin x)$이므로
$\cos(c\sin x)=\sin(c\sin x)$
$c\sin x=t$라 하면 $\cos t=\sin t$이다.
$\tan t=1\ (-c\le t\le c)$인 t에 대하여 …… ㉡
$\sin x=\frac{t}{c}\ \ (0\le x\le 2\pi)$인 x의 합이 $\frac{13\pi}{2}$이다. …… ㉢
㉡을 만족시키는 t의 값을 절댓값이 작은 순서로 나열하면
$t=\frac{\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ -\frac{7\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4},\ \cdots$이다.

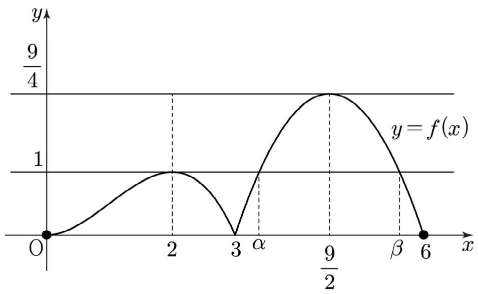


㉢에서



(i) 곡선 $y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=\frac{\pi}{4c}$가 두 점에서 만나면 교점의 x좌표의 합은 π이다.
(ii) 곡선 $y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=-\frac{3\pi}{4c}$가 두 점에서 만나면 교점의 x좌표의 합은 3π이다.
(iii) 곡선 $y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=\frac{5\pi}{4c}$가 두 점에서 만나면 교점의 x좌표의 합은 π이다.
(i), (ii), (iii)에서 x의 합이 5π이므로
곡선 $y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=-\frac{7\pi}{4c}$의 한 점 $x=\frac{3\pi}{2}$에서만 만나야 ㉢을 만족시킬 수 있다.
즉, $-\frac{7\pi}{4c}=-1$
$\therefore\ c=\frac{7\pi}{4}$이다.
$p=4,\ q=7$이므로 $p+q=11$이다.

21) 정답 9
[그림 : 서태욱T]
$0 \le x < 3$에서 함수 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2(x-3)$은 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=1$을 가진다.
$3 \le x \le 6$에서 함수 $f(x)=-x^2+9x-18=-(x-3)(x-6)$으로 축의 방정식이 $x=\frac{9}{2}$인 그래프이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이기 위해서는 $f(t)$의 값이 0 또는 1일 때다.
(i) $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은
$t=0$, $t=3$, $t=6$이므로 모든 t의 합은 9이다.
(ii) $f(t)=1$을 만족시키는 t의 값은
$t=2$, $t=\alpha$, $t=\beta$이고 $\alpha+\beta=9$이므로 모든 t의 값의 합은 11이다.
(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 20이다.
$\alpha=20$이므로 조건 (가), (나)에서 직선 A_nB_n의 기울기는
$\frac{\alpha}{10}=2$, $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{\frac{\alpha}{4}}=n\times\sqrt{5}$이다.
따라서 두 점 A_n, B_n의 x좌표의 차이가 n임을 알 수 있다.
그러므로 $A_n(a, a^2+1)$, $B_n(a+n, (a+n)^2+1)$라 할 수 있다.
두 점을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{\{(a+n)^2+1\}-(a^2+1)}{n}=2$$

$$2an+n^2=2n$$

$$a=1-\frac{n}{2}$$

두 함수 $y=x^2+1(x \ge 0)$와 $y=\sqrt{x-1}$는 역함수 관계이므로 중심이 직선 $y=x$위에 있는 원과 곡선 $y=x^2+1$가 만나는 점을 $y=x$에 대칭이동한 점이 곡선 $y=\sqrt{x-1}$위에 있다.
따라서 x_n은 점 B_n의 y좌표이다. (단, 점 A_n의 x좌표가 음수일 때 $y=x$에 대칭이동한 점은 $y=\sqrt{x-1}$위에 있지 않는다.)

$$\therefore\ x_n=(a+n)^2+1=\left(1+\frac{n}{2}\right)^2+1$$

$$=\frac{n^2}{4}+n+2$$

따라서
$x_1=\frac{13}{4}$, $x_3=\frac{29}{4}$이므로 $x_1-x_3=-4$이다.

$x_2=5$, $x_4=10$, $x_6=17$이므로 $\frac{x_2+x_4+x_6}{4}=8$이다.
그러므로

$$(x_1-x_3)k^2+4x_1k \le g(k-1)-g(k) \le k+\frac{x_2+x_4+x_6}{4}$$

$$\rightarrow -4k^2+13k \le g(k-1)-g(k) \le k+8$$

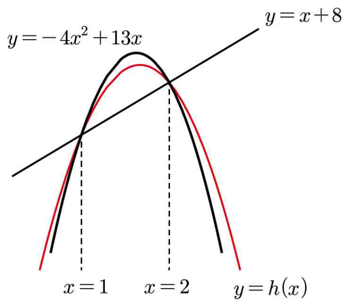
가 모든 정수 k에 대하여 성립해야 한다.
$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

$$g(x-1)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a+3)x+(a-b+c-1)$$
$$g(x-1)-g(x)=-3x^2+(3-2a)x+(a-b-1) \cdots\cdots ㉠$$

$h(x)=g(x-1)-g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이다.
한편,

$$-4k^2+13k=k+8$$
$$4k^2-12k+8=0$$
$$4(k-1)(k-2)=0$$

$k=1$ 또는 $k=2$
따라서 세 함수 $y=-4x^2+13x$, $y=h(x)$, $y=x+8$의 관계는 다음 그림과 같다.



그러므로 $h(x)=-3(x-1)(x-2)+x+8$이다.

$$g(x-1)-g(x)=-3x^2+10x+2 \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$3-2a=10 \rightarrow a=-\frac{7}{2}$$

$$a-b-1=2 \rightarrow b=-\frac{13}{2}$$

$g(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{13}{2}x+c$ 이므로

$$g'(x)=3x^2-7x-\frac{13}{2}$$

$$g'\left(-\frac{\alpha}{20}\right)=g'(-1)=3+7-\frac{13}{2}=\frac{7}{2}$$

$p=2$, $q=7$이므로 $p+q=9$이다.

22) 정답 11
조건(나)에서 삼차방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 존재한다.
모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t}\frac{f(3x-2)}{f(x)}$의 값이 존재하므로
$f(\alpha)=0$인 α에 대하여

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=0$이고, $\lim_{x\to\alpha} f(3x-2)=0$
함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(3\alpha-2)=0$
즉, $3\alpha-2$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
마찬가지 방법으로 $3\alpha-2$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면
$3(3\alpha-2)-2=9\alpha-8$도 방정식 $f(x)=0$의 근이고
$3(9\alpha-8)-2=27\alpha-26$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
만약 $\alpha\neq 3\alpha-2$ 즉 $\alpha\neq 1$이면 α, $3\alpha-2$, $9\alpha-8$, $27\alpha-26$이
삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 근이 되어 모순이다.
따라서 $\alpha=1$이어야 한다.
즉, 삼차방정식 $f(x)=0$은 $x=1$만 실근으로 갖는다.
조건(가)에서 따라서 $f(x)=(x-1)^3$ 또는 $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$
(a, b는 정수이고 $a^2<4b$)이다.
$f(0)=-1 \rightarrow b=1$
$f(x)=(x-1)^3$ 또는 $f(x)=(x-1)(x^2+ax+1)$ $(a=-1, 0, 1)$
(i) $f(x)=(x-1)^3$일 때, $f(3)=8$
(ii) $f(x)=(x-1)(x^2-x+1)$일 때, $f(3)=2\times 7=14$
(iii) $f(x)=(x-1)(x^2+1)$일 때, $f(3)=2\times 10=20$
(iv) $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$일 때, $f(3)=2\times 13=26$
따라서
$f_1(x)=(x-1)^3$, $f_2(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$
곡선 $y=f_1(x)=(x-1)^3$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표가
k이므로 $(k-1)^3=k$이다.
$y=(x-1)^3$과 $y=x$의 그래프에서 $2<k<3$이다.
$k^3-3k^2+3k-1=k$
$k^3-3k^2+2k=1$
따라서 $g\left(\dfrac{26}{k^3-3k^2+2k}\right)=g(26)$이고
$x>k$일 때, $g(g(x))=2x \rightarrow g(x^3-1)=2x \rightarrow x=3$을 대입하면
$g(26)=6$
$\therefore\ \alpha=6$
따라서 사차함수 $h(x)$에 대하여

$$k(x)=\begin{cases} h(x) & (x<0) \\ -x^2+2x & (x\geq 0)\end{cases},\quad k'(x)=\begin{cases} h'(x) & (x<0) \\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases}$$ 이고 함수

$k(x)$가 조건(다)에서 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$h(0)=0$, $h'(0)=2$이다.
$x>0$일 때, $k'(x)=-2x+2$이고 방정식 $k'(x)=0$의 실근이
$x=1$이다.
따라서 조건(라)에서 방정식 $k'(x)\times k'(x-2)=0$의 서로 다른
실근의 개수가 5이기 위해서는
$x<0$일 때, 방정식 $k'(x)=0$의 실근이 $x=-1$, $x=-3$,
$x=-5$이어야 한다.
즉, $h'(-5)=h'(-3)=h'(-1)=0$이다.

$h'(x)=a(x+5)(x+3)(x+1) \rightarrow h'(0)=15a=2 \rightarrow a=\dfrac{2}{15}$

$$h'(x)=\frac{2}{15}(x^3+9x^2+23x+15)$$
$$=\frac{1}{30}(4x^3+36x^2+92x+60)$$
$$h(x)=\frac{1}{30}(x^4+12x^3+46x^2+60x)+C$$

이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$
따라서 $h(x)=\dfrac{1}{30}(x^4+12x^3+46x^2+60x)$이다.

$$k(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4+12x^3+46x^2+60x}{30} & (x<0) \\ -x^2+2x & (x\geq 0)\end{cases}$$ 이고

$$k(\alpha-7)=h(-1)=\frac{1-12+46-60}{30}=\frac{-25}{30}=-\frac{5}{6}$$

$p=6$, $q=5$이므로 $p+q=11$이다.

확률과 통계
[출제자 : 황보백 010-5673-8601]

23) 정답 ②
${}_3\Pi_2+{}_3\mathrm{H}_2=9+6=15$

24) 정답 ②
$\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이므로
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$
이때
$B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$
이고
$(A\cap B)\cap(A^C\cap B)=\varnothing$
이므로
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
따라서
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

25) 정답 ③
$\mathrm{E}(X)=9\times\dfrac{1}{3}=3$

26) 정답 ①
a, b, c는 자연수이므로
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$
(a', b', c'은 음이 아닌 정수)
로 놓으면 $a+b+c=10$에서
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=10$
$a'+b'+c'=7$ ……㉠
㉠을 만족시키는 세 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍
(a', b', c')의 개수는
${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$
이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의
개수도 36이다.

27) 정답 ③
두 사건 A, B는 서로 독립이므로

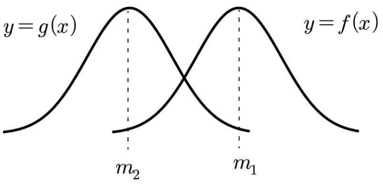
$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

28) 정답 ④

$\mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X \le x+16)$에서 $y = f(x)$, $y = g(x)$는 평행이동의 관계이므로 $\sigma_1 = \sigma_2$임을 알 수 있고, $m_1 = m_2 + 16$임을 알 수 있다.

따라서 두 확률밀도함수를 그래프로 나타내면 아래와 같다.

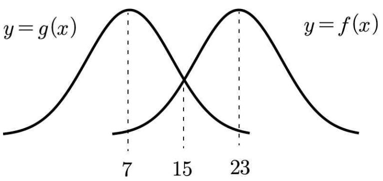


이때, $h(x) = \{f(x) - g(x)\}\{f(x+2) - g(x+2)\} < 0$을 만족시키는 값은 구간 $(x,\ x+2)$에서 두 함수의 교점이 발생해야 하므로 두 함수의 교점이 $14 < x < 16$ 구간에 존재함을 알 수 있다.

이 값을 $x = a$라 하였을 때,

$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{m_1 + m_1 - 16}{2} = m_1 - 8$에서 정수임을 알 수 있다.

따라서 $a = 15$, $m_1 = 23$, $m_2 = 7$이고 확률밀도함수는 아래와 같이 그려짐을 알 수 있다.



따라서

$\mathrm{P}(15 \le X \le 23) + \mathrm{P}(15 \le Y \le 23)$

$= \mathrm{P}(15 \le X \le 23) + \mathrm{P}(15 \le 30 - X \le 23)$

$= \mathrm{P}(15 \le X \le 23) + \mathrm{P}(7 \le X \le 15)$

$= \mathrm{P}(7 \le X \le 23)$의 값이 0.3413

이므로 표준정규분포표에서 $\sigma_1 = \sigma_2 = 16$임을 알 수 있다.

따라서 $\sqrt{2\sigma_2 - m_1} = \sqrt{32 - 23} = 3$

(i) 3번 시행 후 모두 앞면이 보이는 경우

5 또는 6의 눈이 나오는 횟수가 1 또는 3이면 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 5, 6의 눈이 나온 횟수가 2이고 나머지 한 번은 4가 나오면 되므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$(4, 5, 6) \rightarrow 3! = 6$

$(4, 5, 5) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$

$(4, 6, 6) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$

(ii) 3번 시행 후 모두 뒷면이 보이는 경우

5, 6의 눈이 나온 횟수가 0이고 1, 2, 3이 한 번씩 나오면 조건을 만족시키므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$(1, 2, 3) \rightarrow 3! = 6$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{6+3+3+6}{6^3} = \frac{1}{12}$

따라서 $p = 12$, $q = 1$이므로 $p - 4q = 12 - 4 = 8$이다.

함수 f에서 $f(1) \times f(8)$의 값이 $p - 4p = 8$의 약수인 1, 2, 4, 8이므로

$f(1) \times f(8) = 1$ 또는 $f(1) \times f(8) = 2$

또는 $f(1) \times f(8) = 4$ 또는 $f(1) \times f(8) = 8$

또한, 조건 (가), (나)에서

$f(1) \le f(2) \le f(4) \le f(8)$, $3f(1) \le f(3) \le f(6)$

① $f(1) \times f(8) = 1$일 때

$f(1) = f(8) = 1$

$1 \le f(2) \le f(4) \le 1$, $3 \le f(3) \le f(6)$

즉, $f(2) = f(4) = 1$ 이고 $f(3)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $1 \times {}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$이다.

② $f(1) \times f(8) = 2$일 때

$f(1) \le f(8)$이므로 $f(1) = 1$, $f(8) = 2$

따라서 $1 \le f(2) \le f(4) \le 2$ 이고 이것은 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

또한 $3 \le f(3) \le f(6)$이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_2\mathrm{H}_2 \times {}_4\mathrm{H}_2 = {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 30$이다.

③ $f(1) \times f(8) = 4$일 때

$f(1) \le f(8)$이므로 $f(1) = 1$, $f(8) = 4$ 또는 $f(1) = 2$, $f(8) = 2$

㉠ $f(1) = 1$, $f(8) = 4$ 일 때

따라서 $1 \le f(2) \le f(4) \le 4$ 이고 이것은 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

또한 $3 \le f(3) \le f(6)$이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{H}_2 \times {}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 100$이다.

㉡ $f(1) = 2$, $f(8) = 2$ 일 때

$2 \le f(2) \le f(4) \le 2$, $6 \le f(3) \le f(6)$

즉, $f(2) = f(4) = 2$ 이고 $f(3)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1 \times {}_2\mathrm{H}_2 = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$이다.

④ $f(1) \times f(8) = 8$일 때

$f(1) \le f(8)$이므로

$f(1) = 1$, $f(8) = 8$ 또는 $f(1) = 2$, $f(8) = 4$

㉠ $f(1) = 1$, $f(8) = 8$일 때

따라서 $1 \le f(2) \le f(4) \le 8$ 이것은 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

또한 $3 \le f(3) \le f(6)$이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_6\mathrm{H}_2 \times {}_4\mathrm{H}_2 = {}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 210$이다.

㉡ $f(1) = 2$, $f(8) = 4$일 때

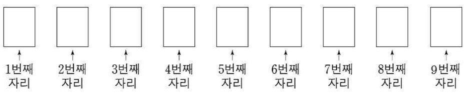
따라서 $2 \le f(2) \le f(4) \le 4$ 이고 이것은 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

또한 $6 \le f(3) \le f(6)$이다.
따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 18$이다.
①~②에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$10+30+100+3+210+18=371$
이다.

29) 정답 20
을이 꺼낸 카드에 적힌 수를 기준으로 을이 꺼낸 카드에 적힌 수가 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 경우는 다음과 같다.

을	갑	병	경우의 수
4	1, 2, 3	1, 2, 3	① $3\times3=9$
5	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	② $4\times3=12$
6	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3	③ $5\times3=15$
			총 36

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수와 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합이 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 경우를 순서쌍 (갑, 병)으로 나타내면 다음과 같다.
①에서 $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$ → 3가지
②에서 $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$ → 3가지
③에서 $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$ → 3가지
따라서 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$
$\therefore\ p=4$



연속된 두 수의 차가 2가 되는 경우는 숫자 0과 2가 이웃하는 경우이고 카드 2와 0이 이웃하는 경우가 $p=4$인 경우의 예는 다음과 같다. 세 자리 A, B, C에 숫자 1이 적힌 카드를 넣는 개수를 a, b, c라 하자.

A	2	0	2	0	2	B	0	C

①

A	2	0	2	0	2	B	0	C

$a+b+c=3$, $a \ge 0$, $b \ge 1$, $c \ge 0$
→ ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
따라서 $6\times2=12$ (위치 전체 바뀌는 경우)
②

A	0	2	0	2	0	B	2	C

마찬가지로 12
③

A	2	0	2	B	0	2	0	C

$a+b+c=3$, $a \ge 0$, $b \ge 1$, $c \ge 0$
→ ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
따라서 $6\times2=12$
④

A	2	0	B	0	2	0	2	C

→ ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$

A	2	0	B	2	0	2	0	C

→ ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
따라서 $16\times2=32$
⑤

A	0	2	B	0	2	0	2	C

→ ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$

A	0	2	B	2	0	2	0	C

→ ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
따라서 $16\times2=32$

①~⑤에서
$12+12+12+32+32=100$
이다.
$\therefore\ q=100$
한편,
공의 총 개수는 $1+3+5+\cdots+2k-1=k^2$이고
1이 적힌 공은 $2k-1$개이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{2k-1}{k^2}$
2가 적힌 공은 $2k-3$개이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{2k-3}{k^2}$
⋮ ⋮
k가 적힌 공은 1개이므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{k^2}$
따라서 확률변수 X에 대한 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	$\cdots$	$k-1$	k	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{2k-1}{k^2}$	$\dfrac{2k-3}{k^2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{k^2}$	$\dfrac{1}{k^2}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{k^2}\{1\times(2k-1)+2\times(2k-3)+\cdots+(k-1)\times3+k\times1\}\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k} n(2k-2n+1)\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k} -2n^2+(2k+1)n\\ &= \frac{1}{k^2}\left\{\frac{-2k(k+1)(2k+1)}{6}+(2k+1)\frac{k(k+1)}{2}\right\}\\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{6k}\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(40X+13)=3q=300$
$\mathrm{E}(40X+13)=40\mathrm{E}(X)+13=300$
$\mathrm{E}(X)=\dfrac{287}{40}$
$\dfrac{(k+1)(2k+1)}{6k}=\dfrac{287}{40}$

$20(2k^2+3k+1)=861k$
$40k^2-801k+20=0$
$(40k-1)(k-20)=0$
$k=\frac{1}{40},\ 20$
k는 자연수이므로 $k=20$

30) 정답 927
4번의 독립시행에서
주머니에서 카드 1을 뽑은 횟수를 α,
카드 2 또는 3을 뽑은 횟수를 β,
카드 4를 뽑은 횟수를 γ
라 하자. (단, α, β, γ는 4 이하의 음이 아닌 정수이다.)
4번의 독립시행이 끝났을 때의 상황을 보기 편하게 표로 정리하면 다음과 같다.

	상자 B	상자 C
전체	$\alpha+2\beta+3\gamma$	$2\alpha+3\beta+3\gamma$
검은 공	$\beta+\gamma$	$\alpha+\beta+2\gamma$
흰 공	$\alpha+\beta+2\gamma$	$\alpha+2\beta+\gamma$

4번의 독립시행을 했으므로 $\alpha+\beta+\gamma=4$이다. …… ㉠
그리고 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8이므로
$\alpha+2\beta+3\gamma=8$ …… ㉡
㉡−㉠하면 $\beta+2\gamma=4$이므로 $(\beta, \gamma)=(4, 0)$ 또는 $(2, 1)$, $(0, 2)$
이를 ㉠에 대입하면 $(\alpha, \beta, \gamma)=(0, 4, 0)$ 또는 $(1, 2, 1)$, $(2, 0, 2)$
상자 C에 들어 있는 검은 공의 개수는 각각
4 또는 5 또는 6
이므로 짝수이려면 $(\alpha, \beta, \gamma)=(0, 4, 0)$ 또는 $(2, 0, 2)$이어야 한다.
(i) $(\alpha, \beta, \gamma)=(0, 4, 0)$일 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$
(ii) $(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 2, 1)$일 확률은 $\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$
(iii) $(\alpha, \beta, \gamma)=(2, 0, 2)$일 확률은 $\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128}$
따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{16}+\frac{3}{128}}{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{128}}=\frac{8+3}{8+24+3}=\frac{11}{35}$
이다.
따라서 $p=11$
그러므로 $\sum_{n=1}^{p-1}\frac{f(n)}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{f(n)}{(n+1)^2}=\frac{165}{q}$이다.
$f(n)$을 구해보자.
c를 기준으로 분류하면 다음과 같다.
① $c=1$일 때,
(a, b)의 개수는 $1\times1=1$
d의 개수는 n
따라서 $1\times n=n$
② $c=2$일 때,
(a, b)의 개수는 $2\times2=4$
d의 개수는 $n-1$
따라서 $2^2\times(n-1)$
③ $c=3$일 때,
(a, b)의 개수는 $3\times3=9$
d의 개수는 $n-2$
따라서 $3^2\times(n-2)$
⋮
$c=m$ $(1\le m\le n)$일 때,
(a, b)의 개수는 $m\times m=m^2$
d의 개수는 $n-(m-1)=n-m+1$
따라서 $m^2\times(n-m+1)$이다.

$$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\{m^2(n-m+1)\}$$
$$=(n+1)\sum_{m=1}^{n}m^2-\sum_{m=1}^{n}m^3$$
$$=(n+1)\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
$$=\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=\frac{2n(n+1)^2(2n+1)-3n^2(n+1)^2}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

따라서
$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{f(n)}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{10}n(n+2)$$
$$=\frac{1}{12}\left(\sum_{n=1}^{10}n^2+2\sum_{n=1}^{10}n\right)$$
$$=\frac{385+110}{12}=\frac{495}{12}=\frac{165}{4}$$
따라서 $q=4$이다.
그러므로 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(2, \frac{t^2}{4}\right)$을 따른다.
확률변수 X의 평균은 2이므로, $\mathrm{P}(X\ge qt)=\mathrm{P}(X\ge 4t)\le\frac{1}{2}$이 성립하려면 $4t\ge2$ 이어야 한다.
따라서 양수 t의 범위는 $t\ge\frac{1}{2}$이다.
구하고자 하는 확률을 표준화하기 위해 확률변수 $Z=\dfrac{X-2}{\frac{t}{2}}$를 이용한다.

$$\mathrm{P}\left(\frac{t^2}{2}-t+2\le X\le\frac{t^2}{2}+t+2\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{t^2}{2}-t+2-2}{\frac{t}{2}}\le Z\le\frac{\frac{t^2}{2}-t+2-2}{\frac{t}{2}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(t-2\le Z\le t+2)$$
이 확률 구간의 길이 $(t+2)-(t-2)=4$는 일정하다.
따라서 구간의 중심인 t가 표준정규분포의 평균 0에 가까울수록 확률값은 최대가 된다.

$t \geq \frac{1}{2}$ 범위에서 t가 0에 가장 가까운 값은 $t=\frac{1}{2}$이다.

최댓값 k는 $t=\frac{1}{2}$일 때의 확률인 $\mathrm{P}(-1.5 \leq Z \leq 2.5)$이다.

따라서

$\mathrm{P}(-1.5 \leq Z \leq 2.5)$

$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5)$

$=0.433+0.494$

$=0.927$

$k=0.927$이므로 $1000 \times k=927$이다.

미적분
[출제자 : 황보백 010-5673-8601]

23) 정답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\times 9}=e^9$$

24) 정답 ⑤

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-6x)}{e^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-6x)}{-6x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\left(-\frac{6}{3}\right)$$

$=-2$

25) 정답 ②

$(\ln f(x))^2-\ln f(2x)-\ln(x+e^2)=0$에 $x=0$을 대입하면

$(\ln f(0))^2-\ln f(0)-2=0$

$\{\ln f(0)-2\}\{\ln f(0)+1\}=0$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $\ln f(x)>0$이다.

따라서 $\ln f(0)=2$이고 $f(0)=e^2$이다.

이다.

$(\ln f(x))^2-\ln f(2x)-\ln(x+e^2)=0$을 미분하면

$$2\ln f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{2f'(2x)}{f(2x)}-\frac{1}{x+e^2}=0$$

$x=0$을 대입하면

$$\frac{4f'(0)}{e^2}-\frac{2f'(0)}{e^2}-\frac{1}{e^2}=0$$

$2f'(0)=1$

$f'(0)=\frac{1}{2}$

$f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이다.

$x=e^2$을 대입하면

$f'(g(e^2))g'(e^2)=1 \rightarrow f'(0)g'(f(0))=1$

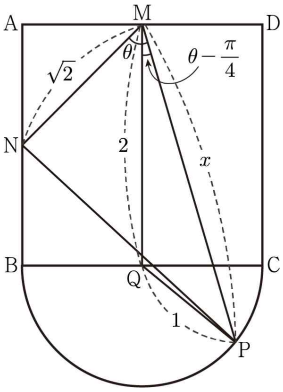
$\therefore\ g'(f(0))=\frac{1}{f'(0)}=2$

직각이등변삼각형 AMN에서 $\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{2}$이다.

$\overline{\mathrm{MP}}=x$라 하자.

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times x\times\sin\theta$ …… ㉠

선분 BC의 중점을 Q라 하면 $\angle\mathrm{NMQ}=\frac{\pi}{4}$이고 $\overline{\mathrm{MQ}}=2$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이다.



삼각형 MQP에서 $\angle\mathrm{PMQ}=\theta-\frac{\pi}{4}$이므로 코사인법칙을 적용하면

$$1=2^2+x^2-2\times2\times x\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x^2-4x\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+3=0 \ \cdots\cdots \ ㉡$$

㉡에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때,

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=3\ (\because x>2)$

㉡의 양변을 θ에 관하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta}-4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dx}{d\theta}-4x\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$6\frac{dx}{d\theta}-4\frac{dx}{d\theta}=0$$

$\therefore\ \frac{dx}{d\theta}=0$

㉠의 양변을 θ에 관하여 미분하면

$$S'(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\frac{dx}{d\theta}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\theta$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$$

$p=2,\ q=3$이므로 $p+q=5$이다.

(가)에서

$h(x)=\cos(a\sin x+b)$

$h'(x)=-\sin(a\sin x+b)\times a\cos x=a$

$\rightarrow\ \sin(a\sin x+b)\cos x=-1$

$-1 \leq \sin(a\sin x+b) \leq 1,\ -1 \leq \cos x \leq 1$

이므로

$$\begin{cases}\sin(a\sin x+b)=-1,\ \cos x=1\\ \sin(a\sin x+b)=1,\ \cos x=-1\end{cases}$$

이다.

$\cos\alpha=1$ 또는 $\cos\alpha=-1$인 α에 대하여 $\sin\alpha=0$이므로

$\sin b=-1$ 또는 $\sin b=1$이다.

(나)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\cos x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(a\sin x+b)\cos x\}dx$$

$\sin x=t$라 하면

$\cos x\,dx=dt$이고 $x:0\to\frac{\pi}{2}$ 일 때, $t:0\to 1$이므로

$$=\int_0^1(\cos at+b)dt$$

$$=\left[\frac{\sin(at+b)}{a}\right]_0^1$$

$$=\frac{\sin(a+b)}{a}-\frac{\sin b}{a}$$

(i) $\sin b=-1$일 때,

$$\frac{\sin(a+b)}{a}+\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}$$

$\sin(a+b)=-3$

으로 모순이다.

(ii) $\sin b=1$일 때,

$$\frac{\sin(a+b)}{a}-\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}$$

$\sin(a+b)=-1$

$\sin a\cos b+\cos a\sin b=-1$

$\cos b=0$이므로 $\cos a=-1$이다.

$p+q=5$이므로 (i), (ii)에서

$0<a<5\pi,\ 0<b<5\pi$

$\cos a=-1\ \to\ a=\pi,\ a=3\pi$

$\sin b=1\ \to\ b=\frac{\pi}{2},\ b=\frac{5\pi}{2},\ b=\frac{9\pi}{2}$

$a+b$의 최댓값은 $3\pi+\frac{9\pi}{2}=\frac{15\pi}{2}$

26) 정답 ③

[그림 : 강민구T]

곡선 $y=\tan x$의 점근선의 방정식은 $x=\frac{2n-1}{2}\pi$ (n은 정수)이고

$x=a_n$에 가장 가까운 점근선은 $x=\frac{2n-3}{2}\pi$이다. $(\because a_1=0)$

$b_n=a_n-\frac{2n-3}{2}\pi$라 하면 $n\to\infty$일 때, $b_n\to 0$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)=0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}+\frac{2n-1}{2}\pi-b_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n+\pi)$$

$=0-0+\pi=\pi$ 이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{\pi}=-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}+\frac{2n-1}{2}\pi}{b_n+\frac{2n-3}{2}\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{n}+\frac{2n-1}{2n}\pi}{\frac{b_n}{n}+\frac{2n-3}{2n}\pi}=1$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{\pi}\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=(-1)\times 1=-1$이다.

$\therefore\ a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{e^{x+1}} & (x\ge -1)\\ (x+3)^2 & (x<-1)\end{cases}$ 이고

$x\ge -1$일 때, $f(x)=\frac{(x-1)^2}{e^{x+1}}$

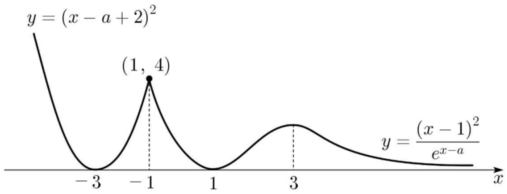
$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(x-1)^2}{e^{x+1}}$$

$$=\frac{(x-1)(3-x)}{e^{x-a}}$$

$f'(x)=0\ \to\ x=1,\ x=3$이고

함수 $f(x)$의 증감에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0,

$x=3$에서 극댓값 $\frac{4}{e^4}$을 갖는다.



양수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최댓값이 $g(t)$이므로

위의 그래프에서 함수 $g(t)$는 $t=4$와 $t=\frac{4}{e^4}$에서 불연속이다.

또한,

$h(x)=\int_0^x(s+a)^2(s-a)^2ds$에서 $a=-1$이므로

$h(x)=\int_0^x(s-1)^2(s+1)^2ds$에서 $h(0)=0$이고

$$h'(x)=(x+1)^2(x-1)^2$$

$$=(x^2-1)^2$$

$$=x^4-2x^2+1$$

따라서

$h(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x$이고 $h'(x)\ge 0$이다.

함수 $k(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$k'(x)=\begin{cases}h'(x) & (x>\alpha)\\ -h'(x-\beta) & (x<\alpha)\end{cases}$$

$\lim_{x\to\alpha+} h'(x) = \lim_{x\to\alpha-} h'(x) \rightarrow h'(\alpha) = -h'(\alpha-\beta)$

$h'(\alpha) + h'(\alpha-\beta) = 0$

$f'(\alpha) \geq 0$, $f'(\alpha-\beta) \geq 0$이므로 $f'(\alpha)=0$, $f'(\alpha-\beta)=0$이어야 한다.

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$, $x=1$뿐이다.

$\beta>0$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{e^{x+1}} & (x \geq -1)\\ (x+3)^2 & (x<-1)\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x-1)(x-3)}{e^{x+1}} & (x>-1)\\ 2(x+3) & (x<-1)\end{cases}$$

에서

$f(\beta)=f(2)=\dfrac{1}{e^3}$이고 $f\left(g\left(\dfrac{1}{e^3}\right)\right)=\dfrac{1}{e^3}$에서 $g\left(\dfrac{1}{e^3}\right)=2$이다.

$f(g(t))=t$에서 양변을 t에 관하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$이므로 $g'(t)=\dfrac{1}{f'(g(t))}$이므로

$g'(f(\beta))$

$=g'(f(2))$

$=g'\left(\dfrac{1}{e^3}\right)$

$=\dfrac{1}{f'\left(g\left(\dfrac{1}{e^3}\right)\right)}$

$=\dfrac{1}{f'(2)}$

$=-e^3$

$x<-1$일 때, $f(x)=(x+3)^2$이고 $\alpha+\beta-a=4$이므로 $t=4$일 때, $g(t)=-1$이다.

이차함수의 축이 $x=-3$이므로 $\lim_{t\to(\alpha+\beta-a)+} g(t) = \lim_{t\to4+} g(t) = -5$이다.

따라서 $\lim_{t\to(\alpha+\beta-a)+} g(t)\times g'(f(\beta)) = 5e^3$이다.

27) 정답 ①

$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m}{n(n+2m)}$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2m}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2m}\right)$

$S_{m-1} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2m-2}\right)$ $(m \geq 2)$

$a_m = S_m - S_{m-1} = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2m-1}+\dfrac{1}{2m}\right) = \dfrac{4m-1}{4m(2m-1)}$,

$a_1 = S_1 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$

따라서 $a_n = \dfrac{4n-1}{4n(2n-1)}$

$a_1 = \dfrac{3}{4}$이므로 $f'(1) = \dfrac{4}{3}a_1 - \dfrac{\pi}{2} = 1-\dfrac{\pi}{2}$

$a_2 = \dfrac{7}{24}$이므로 $f(0) = 12a_2 = \dfrac{7}{2}$

$g(x) = xf'(x^2) + \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x$에서 $g(0)=0$, $g(1)=1$이다.

Young's의 법칙에서

$\int_0^1 g(x)dx + \int_{g(0)}^{g(1)} g^{-1}(x)dx$

$= \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^{-1}(x)dx$

$=1$

따라서 $\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 g(x)dx$ …… ㉠

$xf'(x^2) = g(x) - \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x$이므로

$\int_0^1 xf'(x^2)dx = \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x dx$

$= \int_0^1 g(x)dx + \left[\cos\dfrac{\pi}{2}x\right]_0^1$

$= \int_0^1 g(x)dx - 1$

$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 3\left(\int_0^1 g(x)dx - 1\right) + 3$

$= 3\int_0^1 g(x)dx$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\int_0^1 g(x)dx = \dfrac{1}{4}$이다.

$\int_0^1 xf'(x^2)dx = \int_0^1 g(x)dx - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$

$x^2=t$라 하면 $x\,dx = \dfrac{1}{2}dt$이고

$x=0$일 때, $t=0$

$x=1$일 때, $t=1$이므로

$\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'(t)dt = -\dfrac{3}{4}$

따라서 $\int_0^1 f'(x)dx = -\dfrac{3}{2}$

$\Big[f(x)\Big]_0^1 = -\dfrac{3}{2}$

$f(1) - f(0) = -\dfrac{3}{2}$

$f(0) = 12a_2 = \dfrac{7}{2}$이므로 $f(1) = -\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2} = 2$

따라서 $i'(x) = k - f(1)x = k-2x$에서

$i(x) = -x^2+kx+C$

$i(0)=C$이다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $i(x) \leq k-2x$이므로

$-x^2+kx+C \leq k-2x$

$x^2-(k+2)x+k-C \geq 0$

$p(x) = x^2-(k+2)x+k-C$라 하면 함수 $p(x)$의 축의 방정식은 $x=\dfrac{k+2}{2}$이다.

(i) $\dfrac{k+2}{2}<0$, 즉, $k<-2$일 때, $p(0) \geq 0$이어야 한다.

따라서 $k-C \geq 0$

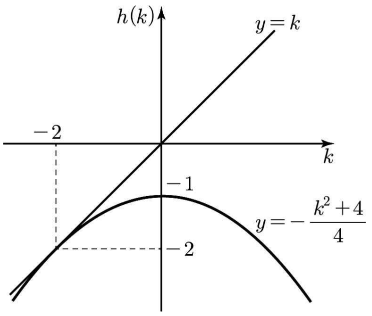
$\therefore\ C=h(k) \leq k$

(ii) $\frac{k+2}{2} \geq 0$, 즉, $k \geq -2$일 때, 이차방정식 $p(x)=0$의 실근의 개수가 1이하이므로 $D \leq 0$이어야 한다.

따라서 $D=(k+2)^2-4k+4C \leq 0$

$k^2+4+4C \leq 0$

$\therefore\ C=h(k) \leq -\frac{k^2+4}{4}$



(i), (ii)에서 $h(k)=\begin{cases} k & (k < -2) \\ -\frac{k^2+4}{4} & (k \geq -2) \end{cases}$ …… ㉠

$h(-3)\times h(2)=(-3)\times(-2)=6$

28) 정답 ③

(가)에서 복소수의 실수부분이 a_n이고 허수부분이 b_n이므로 다음 표와 같다.

n	i^{n-1}	$(\alpha+\beta i)i^{n-1}$	a_n	b_n
1	1	$\alpha+\beta i$	α	β
2	i	$-\beta++\alpha i$	$-\beta$	α
3	-1	$-\alpha-\beta i$	$-\alpha$	$-\beta$
4	$-i$	$\beta-\alpha i$	β	$-\alpha$
5	1	$\alpha+\beta i$	α	β
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$a_{n+4}=a_n$, $b_{n+4}=b_n$이므로

$a_1=\alpha$, $a_3=-\alpha$, $b_5=b_1=\beta$, $b_7=b_3=-\beta$이다.

$a_1\times a_3\times b_5\times b_7=9 \rightarrow \alpha^2\beta^2=9$이다.

$\alpha>\beta$이므로 순서쌍 (α, β)는 다음과 같다.

$(3, 1)$, $(3, -1)$, $(1, -3)$, $(-1, -3)$ …… ㉠

$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})}{\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)}=\frac{b_{4n-2}}{a_{4n}}$에서 $a_{4n-1}=-\alpha$, $b_{4n-3}=\beta$, $a_{4n}=\beta$,

$b_{4n-2}=\alpha$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{c_n\}$의 공비를 r이라 하면 $-1<r<1$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})$

$=-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}$

$=-\alpha\times\frac{c_2}{1-r^2}$

$=-\alpha\times\frac{c_1 r}{1-r^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)$

$=\beta\times\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\beta\times\frac{c_1}{1-r}$

이므로

$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})}{\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)}=\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \frac{-\alpha\times\frac{c_1 r}{(1-r)(1+r)}}{\beta\times\frac{c_1}{1-r}}=\frac{\alpha}{\beta}$

$\rightarrow -\frac{r}{1+r}=1 \rightarrow r=-\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \frac{c_1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\alpha}{\beta}$

$c_1=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{3}{2}$

㉠에서 $\alpha=3$, $\beta=-1$일 때, $c_1=-\frac{9}{2}$로 최소이다.

그러므로

$\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}=\frac{c_2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}}=3$

이다.

$\therefore\ k=3$

(나)에서

$e^{3f(x)}-3e^{2f(x)}+3e^{f(x)}-1+ax+b=\frac{x+1}{e^x}$

$\left(e^{f(x)}-1\right)^3=\frac{x+1}{e^x}-(ax+b)$

이다.

(다)에서

사이값 정리에 의해 $f(\alpha)=0$인 $-2<\alpha<2$의 α가 존재한다.

$h(x)=\left(e^{f(x)}-1\right)^3$라 하면 $h(x)=\frac{x+1}{e^x}-(ax+b)$이다.

$h(\alpha)=\left(e^{f(\alpha)}-1\right)^3=\left(e^0-1\right)^3=0$

이므로 $h(\alpha)=\frac{\alpha+1}{e^\alpha}-(a\alpha+b)=0$ …… ㉡

$h'(x)=3\left(e^{f(x)}-1\right)^2e^{f(x)}f'(x)$에서

$h'(\alpha)=3\left(e^0-1\right)^2e^0 f'(0)=0$

$h'(\alpha)=0$이므로

$h'(x)=\frac{-x}{e^x}-a$에서 $h'(\alpha)=\frac{-\alpha}{e^\alpha}-a=0$ …… ㉢

이다.

$h''(x)=6\left(e^{f(x)}-1\right)e^{2f(x)}(f'(x))^2+3\left(e^{f(x)}-1\right)\left(e^{f(x)}f'(x)\right)'$에서

$h''(\alpha)=0+0=0$이므로

$h''(x)=\dfrac{-1+x}{e^x}$에서 $h''(\alpha)=\dfrac{-1+\alpha}{e^\alpha}=0$이므로 $\alpha=1$이다.

㉡에서 $\dfrac{-1}{e^1}-a=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{e}$

㉡에서 $h(\alpha)=\dfrac{\alpha+1}{e^\alpha}-(a\alpha+b)=0$

$\dfrac{2}{e}-\left(-\dfrac{1}{e}+b\right)=0 \ \rightarrow\ b=\dfrac{3}{e}$

따라서 $g(x)=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{3}{e}$이다.

$\therefore\ g(1)=\dfrac{2}{e}$

따라서 선분 AB의 길이는 $g(1)\times e=2$이다.

삼각형 OBQ에 대하여 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로

$\angle\mathrm{OBQ}=\angle\mathrm{OQB}=\theta$

이다.

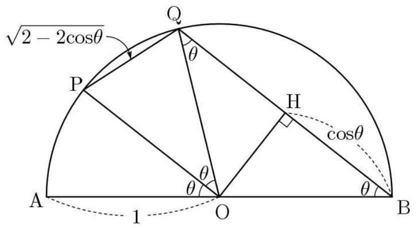
따라서 $\angle\mathrm{QOA}=2\theta$

$\therefore\ \angle\mathrm{POQ}=\theta$

그러므로 사각형 OPQB의 넓이는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta}{2}$ …… ㉣



삼각형 OPQ에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=1+1-2\cos\theta=2-2\cos\theta$

점 O에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=\cos\theta$

따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\cos\theta$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2=\dfrac{56}{25}$

$2-2\cos\theta+4\cos^2\theta=\dfrac{56}{25}$

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-\dfrac{6}{25}=0$

$50\cos^2\theta-25\cos\theta-3=0$

$(5\cos\theta-3)(10\cos\theta+1)=0$

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}\ \left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2=\dfrac{56}{25}$을 만족시키는 θ의 값이 p이므로

$\cos p=\dfrac{3}{5}$, $\sin p=\dfrac{4}{5}$이다.

㉣에서 $S'(\theta)=\dfrac{\cos\theta+2\cos2\theta}{2}$이므로

$S'(p)=\dfrac{\cos p+2\cos2p}{2}$

$=\dfrac{\dfrac{3}{5}+2\left(\dfrac{9}{25}-\dfrac{16}{25}\right)}{2}=\dfrac{1}{50}$

29) 정답 96

① $|x|>1$일 때, $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{f(x)}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{2}{x^n}}=x$

② $|x|<1$일 때, $g(x)=\dfrac{f(x)}{2}$

③ $x=1$일 때, $g(1)=\dfrac{1-1+f(1)}{1+1+2}=\dfrac{f(1)}{4}$

④ $x=-1$일 때, $g(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1-(-1)^n+f(-1)}{1+(-1)^n+2}$에서 $g(-1)$의 값이 존재하기 위해서는 $f(-1)=-2$이어야 하고 $g(-1)=-1$이다.

$f(0)=f''(0)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 홀수차 함수이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이므로 $f(1)=2$, $f(0)=0$이다.

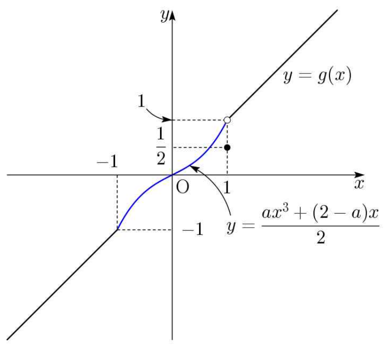
따라서 $f(x)=ax^3+(2-a)x$라 할 수 있다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ \dfrac{ax^3+(2-a)x}{2} & (|x|<1) \\ \dfrac{1}{2} & (x=1) \\ -1 & (x=-1) \end{cases}$$

이때, 함수 $h(t)$가 모든 실수 k에 대하여

$\lim\limits_{t\to k+}h(t)+\lim\limits_{t\to k-}h(t)=2$를 만족시키기 위해서는 그림과 같이

$g(x)=\dfrac{ax^3+(2-a)x}{2}$가 $-1<x<1$에서 극값을 가지지 않고 증가해야 한다.



$g(x)=\dfrac{ax^3+(2-a)x}{2}$

$g'(x)=\dfrac{3a}{2}x^2+1-\dfrac{a}{2}$

$a>0$이므로

$1-\dfrac{a}{2} \geq 0$이거나

$g'(x)=0$을 만족시키는 x가 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$일 때, 즉 $x^2 \geq 1$이면 된다.

㉠ $1-\dfrac{a}{2} \geq 0 \rightarrow a \leq 2$

㉡ $\dfrac{3a}{2}x^2=\dfrac{a}{2}-1 \rightarrow x^2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3a} \geq 1 \rightarrow a-2 \geq 3a \rightarrow a \leq -1$ (모순)

㉠, ㉡에서 $0<a \leq 2$이다.

$f(x)=ax^3+(2-a)x$에서 $0<a \leq 2$이므로

$f(2)=8a+4-2a=6a+4 \leq 16$이다.

$f(2)$의 최댓값은 16이다.

$\therefore\ M=16$

따라서 $\dfrac{M+16}{2}=9$이므로 $A=\{n \mid n$는 a_n 중 9이하의 자연수$\}$이다.

등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 집합 A의 값이 다른 것이 존재하므로 $-1<r<1$이다.

한편,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_2a_n+a_{2n}}{a_{n+1}+2a_n}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{a_1}^2r^n+a_1r^{2n-1}}{a_1r^n+2a_1r^{n-1}}$

$=\dfrac{a_1r}{r+2}=\dfrac{64}{5}$ …… ㉢

이고

집합 A의 원소의 개수가 3일 때, 3개의 자연수를 a, b, c $(a>b>c)$라 하고 원소의 개수가 4일 때, 4개의 자연수를 a, b, c, d $(a>b>c>d)$, ⋯

라 하자.

$a=9$일 때, $r=\dfrac{1}{3}$ 또는 $r=\dfrac{2}{3}$이면 집합 A의 원소가 3으로 만족시킨다.

$r=\dfrac{1}{3}$일 때, $(a,\ b,\ c)=(9,\ 3,\ 1)$

$r=\dfrac{2}{3}$일 때, $(a,\ b,\ c)=(9,\ 6,\ 4)$

$c=8$일 때, $r=\dfrac{1}{2}$이면 집합 A의 원소가 4로 만족시킨다.

$(a,\ b,\ c,\ d)=(8,\ 4,\ 2,\ 1)$

$c=4$일 때, $r=\dfrac{1}{2}$이면 집합 A의 원소가 3으로 만족시킨다.

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 1)$

따라서 ㉢에서

(i) $r=\dfrac{1}{3}$일 때,

$\dfrac{a_1\times\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}+2}=\dfrac{a_1}{7}=\dfrac{64}{5}$

$a_1=\dfrac{7\times2^6}{5}$

$a_n=\dfrac{7\times2^6}{5}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{7\times2^6}{5\times3^{n-1}}$으로 항의 값이 자연수가 존재하지 않으므로 조건에 모순이다.

(ii) $r=\dfrac{2}{3}$일 때,

$\dfrac{a_1\times\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3}+2}=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{2^6}{5}$

$a_1=\dfrac{2^8}{5}$

$a_n=\dfrac{2^6}{5}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{2^{n+5}}{5\times3^{n-1}}$으로 항의 값이 자연수가 존재하지 않으므로 조건에 모순이다.

(iii) $r=\dfrac{1}{2}$일 때,

$\dfrac{a_1\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+2}=\dfrac{a_1}{5}=\dfrac{2^6}{5}$

$a_1=2^6$

$a_n=2^6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_3=16,\ a_4=8,\ a_5=4,\ a_6=2,\ a_7=1,\ a_8=\dfrac{1}{2},\ \cdots$

이므로 $A=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이다.

따라서 집합 A의 원소 중 최솟값은 4이다.

$\therefore\ m=4$

따라서

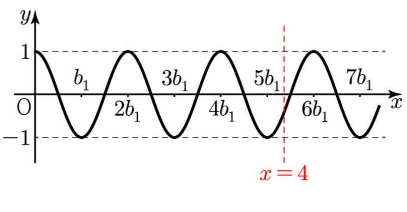
$0<x<4$에서 곡선 $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{b_n}x\right)$와 직선 $y=-1$이 만나는 점의 개수가 $3n$이어야 한다.

곡선 $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{b_n}x\right)$는 주기가 $2b_n$인 그래프이고 자연수 k에 대하여 $((2k-1)b_n,\ -1)$을 지난다.

(i) $b_1=3$이기 위해서는

$k=3$일 때, $5b_1<4$이어야 하고

$k=4$일 때, $7b_1 \geq 4$이어 한다.

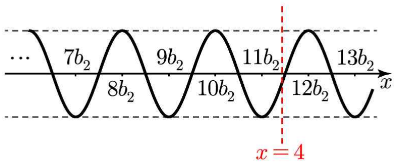


$\therefore\ \dfrac{4}{7} \leq b_1 < \dfrac{4}{5}$

(ii) $b_2=6$이기 위해서는

$k=6$일 때, $11b_2<4$이어야 하고

$k=7$일 때, $13b_2 \geq 4$이어 한다.



∴ $\frac{4}{13} \le b_2 < \frac{4}{11}$

같은 방법으로 생각해 보면

$\frac{4}{6n+1} \le b_n < \frac{4}{6n-1}$

따라서

$\frac{4n}{6n+1} \le nb_n < \frac{4n}{6n-1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty} nb_n = \frac{2}{3}$이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{M\times m}{nb_n} = \frac{16\times 4}{\frac{2}{3}} = 64\times\frac{3}{2} = 96$이다.

30) 정답 67

(가)에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록한 그래프 개형을 가지므로 양수 t에 대하여 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)\ (x>0)$의 교점은 점 $(t,\ f(t))$ 하나이고, 접선은 곡선의 아래쪽에 위치한다.

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$$g(t)=\int_0^t \{f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)\}dx$$
$$=\int_0^t f(x)dx - f'(t)\int_0^t x\,dx + \int_0^t \{tf'(t)-f(t)\}dx$$
$$=\int_0^t f(x)dx - \frac{t^2f'(t)}{2} + t^2f'(t) - tf(t)$$
$$=\int_0^t f(x)dx + \frac{t^2f'(t)}{2} - tf(t)$$

따라서

$$g'(t)=f(t)+tf'(t)+\frac{t^2f''(t)}{2}-f(t)-tf'(t)$$
$$=\frac{t^2f''(t)}{2}$$

그러므로 $\alpha=g'(2)=\frac{4\times f''(2)}{2}=4$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_n)=\alpha^2=16,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}-a_n)=-2\alpha=-8$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r라 하자.

준식을 변변 빼면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=12 \rightarrow \frac{a_1}{1-r}=12$

$a_1=12-12r,\ -1<r<1$ …… ㉠

준식을 변변 더하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}=4 \rightarrow \frac{a_1r^2}{1-r^3}=4$

$12(1-r)r^2=4(1-r)(1+r+r^2)$

$3r^2=1+r+r^2$

$2r^2-r-1=0$

$(2r+1)(r-1)=0$

∴ $r=-\frac{1}{2}$

㉠에서 $a_1=18$

따라서 $a_n=18\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

한편, $b_k=\sum_{i=1}^{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)$라 하면

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=0,\ b_4=0,\ b_5=1,\ b_6=1,\ \cdots$

이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)\times a_{m+k}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\{b_k\times a_{m+k}\}$$
$$=a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+5}+a_{m+6}+\cdots$$
$$=(a_{m+1}+a_{m+5}+a_{m+9}+\cdots)+(a_{m+2}+a_{m+6}+a_{m+10}+\cdots)$$
$$=\frac{a_{m+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4}+\frac{a_{m+2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4}$$
$$=\frac{16}{15}(a_{m+1}+a_{m+2})$$
$$=\frac{16}{15}\left(18\left(-\frac{1}{2}\right)^m+18\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right)$$
$$=\frac{96}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{48}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{3}{20}$$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{64} \rightarrow m=2,\ m=4$

따라서 m의 최댓값 $\beta=4$이다.

$h(0)=\frac{\alpha}{4}=1,\ h(\pi)=a\pi-\frac{2\pi}{\beta}=a\pi-\frac{\pi}{2}$

$h(0)=\cos(\sin b)=1 \rightarrow \sin b=0\ (\because -1\le \sin b\le 1) \rightarrow b=\pi.\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \cdots$

$h(\pi)=\cos(a\pi)=a\pi-\frac{\pi}{2} \rightarrow \cos x=x-\frac{\pi}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$뿐 $\rightarrow$

$a=\frac{1}{2}$

$ab=2\pi$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=4\pi$이다. $\rightarrow$

$h(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\sin(x+4\pi)\right)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)$

$h'(x)=-\sin\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\cos x\right) \rightarrow h'(x)=0$의 해는

$\frac{1}{2}x+\sin x=n\pi$ (n은 정수) 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

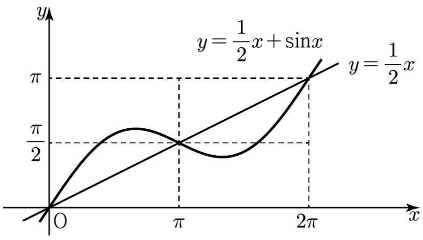
$h''(x)=-\cos\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2+\sin\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)\sin x$

(i) $k(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$라 할 때, $k(x)=n\pi$의 해를 c라 하면

$h''(c)=-\cos n\pi\left(\frac{1}{2}+\cos c\right)^2 \rightarrow$ 함수 $h(x)$는 n이 홀수이면

$h''(c) > 0$이므로 $x=c$에서 극솟값을 갖고, n이 짝수이면
$h''(c) < 0$이므로 $x=c$에서 극댓값을 갖는다.

다음 그림에서 $\frac{1}{2}x+\sin x=n\pi$의 해는 $x=2n\pi$이다.



따라서
함수 $h(x)$는 $x=2\pi,\ 6\pi,\ 10\pi,\ \cdots$에서 극솟값을 갖고,
$x=4\pi,\ 8\pi,\ 12\pi,\ \cdots$에서 극댓값을 갖는다.

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \cdots$

$h''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $0<\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}<\pi$이므로

$h''\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{2\pi}{3}$에서 극솟값을 갖고,

$h''\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고 $0<\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}<\pi$이므로

$f''\left(\frac{4\pi}{3}\right)<0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{4\pi}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$가 극대가 되는 x값의 집합 A에서 가장 작은 원소 $\gamma=\frac{4\pi}{3}$이다.

그러므로

$\alpha\times\beta\times\gamma=4\times4\times\frac{4\pi}{3}=\frac{64\pi}{3}$

$p=3.\ q=64$이므로 $p+q=67$이다.