제 2 교시

2027학년도 대학수학능력시험 수학 영역

콘텐츠 관리반-1주차

성명	

수험 번호					—				

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

   1주차-샘플

3. 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
4. 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
5. 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 3점 또는 4점입니다.
6. 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 A형 ⇨ 4점 5문항 / 공통과목 B형 ⇨ 3점 3문항&4점 2문항

선택과목 확률과 통계 / 미적분 / 기하 ⇨ 4점 2문항

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 황보백

온라인 콘텐츠 관리반에서 제공되는
자료는
① 주간지
② 기출 분석서
③ 수능특강·수능완성·주요 모의고사
변형 자료
총 세 가지로 구성되어 있습니다.

이 중 주간지 1회분은 샘플로
공개합니다.
실제 관리반에서 어떤 방식으로 학습이
진행되는지 확인해 보세요.

주간지를 확인한 뒤
기출 분석서
수특·수완·주요 모의고사 변형 자료도
함께 살펴보고 싶은 분은
황보백 선생님께 연락 주시면 추가
샘플을 보내드립니다.
〔문자 : 010-5673-8601〕
〔카톡 : hbb100〕

자료의 길이와 방향이 자신과 맞는지,
관리반이 본인에게 적합한지 충분히
확인한 뒤 결정하셔도 됩니다.

〔자세한 설명은 풀이지 앞에 있습니다!〕

For 2027학년도 대학수학능력시험

제 2 교시

공통A-제1회

공통과목

1. 시각 $t=0$일 때 가속도가 -6으로 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 가속도 $a(t)$가 $a(t)=6t+k$이다. 점 P가 $t=0$에서 $t=b$ $(b>0)$까지 이동 거리가 27이고, $t=b$에서 운동 방향을 바꾼다. $t=\frac{4}{3}b$일 때 점 P 위치가 0일 때, 점 P의 처음 위치는? [4점]

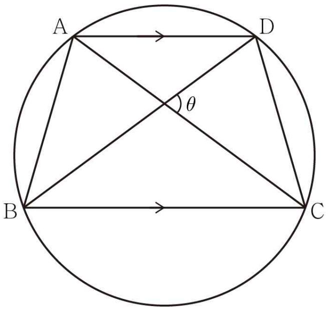
① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

2. 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{\mathrm{AD}} \mathbin{/\!/} \overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{BD}}=4,\ \cos(\angle \mathrm{BAD})=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이다. 두 대각선 AC, BD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{5\sqrt{7}}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ③ $\frac{7\sqrt{7}}{16}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{7}}{16}$



3. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1-b_1|=4$
(나) $a_k=b_k$, $a_{k+1}>b_{k+1}$

$\sum_{n=1}^{k} a_n=10$일 때, $\sum_{n=1}^{k} b_n$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

4. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 2$일 때, $f(x) = -x^3 + ax^2$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x) + b$이다.

$\int_4^8 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

5. $k > 1$인 상수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} \log_8(-x) - k & (x < 0) \\ \left| \dfrac{\log_2(x+8)}{3} - k \right| & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t $(t > 0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 부등식 $g(t) \le -8$을 만족시키는 t의 최솟값이 3일 때, $\{f(-2k)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

공통B-제1회

공통과목

1. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4 + a_5 = \frac{3}{2}\ ,\ a_5 = 4a_3$$

이 성립한다. 이때 a_4의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

2. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(2x+3)f(x) - 2xg(x) = \int_0^x g(t)dt + x^2 + 3,\ f(0) = g(0)$$

일 때, $f'(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

3. 정의역이 $\{x \mid 0 < x < 2\pi\}$인 함수

$y = \sin^2\left(x + \frac{5}{3}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{13}{6}\pi\right) + 1$가 $x = a\pi$에서 최댓값 M을 갖는다. $a \times M$의 값은? (단, a는 유리수이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

4. 좌표평면 위의 두 점 $(0,\ 0)$, $(k,\ \log_3 8)$를 지나는 직선이 함수 $f(x)=x^2+2$의 그래프 위의 점 $(\log_2 9,\ f(\log_2 9))$에서의 접선과 수직일 때, k의 값은? [4점]

① -13 ② -12 ③ -11 ④ -10 ⑤ -9

5. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-at$$

이다. 실수 b에 대하여 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 b이고, 시각 $t=a$에서 점 P의 위치는 0이다. 점 P가 움직이는 동안 위치의 최솟값이 -14일 때, $a\times b$의 값은? [4점]

① $-\frac{73}{2}$ ② $-\frac{75}{2}$ ③ $-\frac{77}{2}$ ④ $-\frac{79}{2}$ ⑤ $-\frac{81}{2}$

선택과목-제1회

확률과통계

6. 탁자 위에 놓은 5개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

> 5개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 2개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 하는 경우의 수를 a라 할 때, $\frac{a}{2}$의 값을 구하시오. [4점]

앞면 앞면 앞면 뒷면 뒷면

7. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? (단, $d \neq 1$) [4점]

> (가) $abc^2d^3 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2$
> (나) a와 b는 서로소가 아니다.

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

미적분

8. 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$x=e^{-t}+5,\ y=(t^2+2t-2)e^{-t}$$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, $\frac{a}{b}$의 값은? 〔4점〕

① $\frac{2+e}{3}$ ② $\frac{1+4e^2}{5}$ ③ $\frac{1+5e^2}{6}$
④ $\frac{1+4e^3}{7}$ ⑤ $\frac{1+3e^4}{8}$

9. 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=-x^2+2nx+2$, $y=x^2-2nx+2n^2$가 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-n)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n$의 무게중심은 $\mathrm{G}(x_n, y_n)$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n\times x_n}$의 값은? 〔4점〕

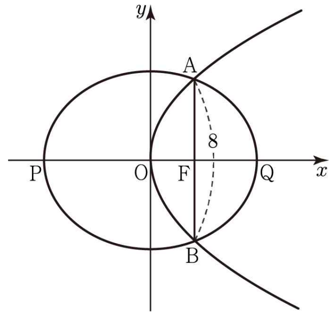
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

기하

10. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$와 원 $x^2+y^2=p^2$이 제 1사분면 위의 점 A에서 만날 때, 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 포물선의 초점을 점 P라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}=k\overline{\mathrm{AB}}$을 만족한다. 상수 k의 값은? 〔4점〕

① $\frac{4+\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{6+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{8+3\sqrt{5}}{2}$

11. 그림과 같이 꼭짓점이 원점인 포물선과 중심이 원점인 타원이 초점 F를 공유하고 있다. 타원이 x축과 만나는 점을 각각 P,Q, 타원과 포물선이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}$가 초점 F를 지나며 그 길이가 8일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{BQ}}^2$의 값은? (단, 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표보다 작다.) 〔4점〕



① $8(1+\sqrt{2})$ ② $10(1+\sqrt{2})$ ③ $12(1+\sqrt{2})$
④ $14(1+\sqrt{2})$ ⑤ $16(1+\sqrt{2})$

제 2 교시

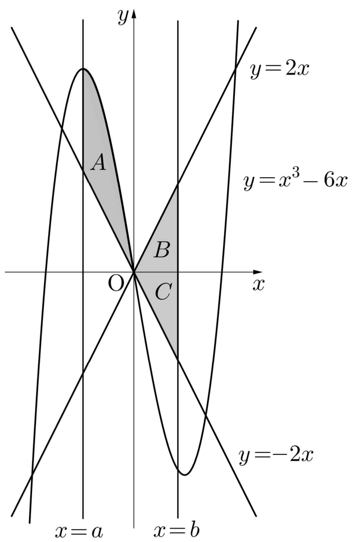
공통A-제2회

공통과목

1. $-2<a<0,\ 0<b<2$이고 $|a|:b=2:\sqrt{3}$인 상수 $a,\ b$에 대하여 곡선 $y=x^3-6x\,(x\leq 0)$과 직선 $y=-2x$ 및 $x=a$로 둘러싸인 영역을 A라 하고, 직선 $y=2x,\ y=-2x$ 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 영역 중에서 $y\geq 0$인 영역을 $B,\ y\leq 0$인 영역을 C다 하자.

(A의 넓이) − (C의 넓이) = (B의 넓이)

일 때, $16(a^2+b^2)$의 값은? [4점]



① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_2\dfrac{1}{a-x} & (x<2)\\ b^{x-4}-c & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, abc의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, $b>0$이다.) [4점]

방정식 $f(x)=t$의 실근이 오직 한 개이기 위한 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t\,\vert\,t\leq -3$ 또는 $t>6\}$이다.

3. 모든 항이 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$에 대하여

$$a_7=b_7,\ a_8=b_9$$

이다. $a_9=33,\ b_9\leq 30$일 때, a_1+b_1의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

4. 실수 $a\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x<a) \\ x^2-x-a^2+a & (x \geq a) \end{cases}$$

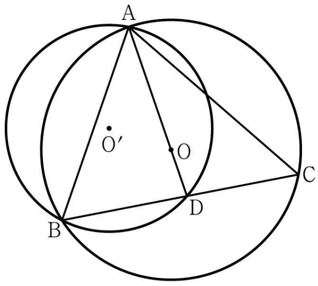
이다 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 최솟값이 0이 되도록 하는 a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

5. 그림과 같이

$$\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3},\ \overline{\mathrm{AC}}=5\sqrt{3}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 중심이 O′인 삼각형 ABD의 외접원의 넓이가 $\frac{64}{3}\pi$일 때, 삼각형 AOO′의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{17}{3}\pi$ ② 6π ③ $\frac{19}{3}\pi$ ④ $\frac{20}{3}\pi$ ⑤ 7π

제 2 교시

공통B-제2회

공통과목

1. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 9$ 를 만족시킨다. $g(x) = xf(x)$ 라 할 때, $g'(1)$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2. 상수 a $(a>0)$에 대하여 함수 $y=2^{x-2a}+a$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2 2x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}$일 때, a의 값은? (단, A의 x좌표가 B의 x좌표보다 크다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax-3$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A$(0,\ -3)$, B$(3,\ f(3))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, a의 값을 구하시오. [3점]

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = 4 + 2a_{n+1}$$

이고 $a_3 = 3$일 때, $a_1 \times a_4$의 값은? 〔4점〕

① 12　② 24　③ 36　④ 48　⑤ 60

5. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)(x-2)g(x) = |f(x)|$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이고 $g(4)=0$일 때, $f(5)$의 값은? 〔4점〕

① 27　② 36　③ 45　④ 54　⑤ 63

선택과목-제2회

확률과통계

6. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(6)$의 값이 6의 약수이다.
(나) $2f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 2f(6)$

① 92 ② 98 ③ 104 ④ 116 ⑤ 126

7. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 그림카드 3장과 같은 종류 볼펜 9자루를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 볼펜은 모든 학생이 적어도 한 자루씩은 받는다.) [4점]

(가) 그림 카드를 받지 못하는 학생이 존재한다.
(나) 각 학생이 받는 그림 카드 수와 볼펜의 개수의 합은 6개 이하이다.

미적분

8. 실수 $k(-3<k<3)$와 임의의 상수 a에 대하여 이차함수

$$y=x^2-2|\cos\pi a|x+\cos^2\pi a+\cos\pi a+k\pi a$$

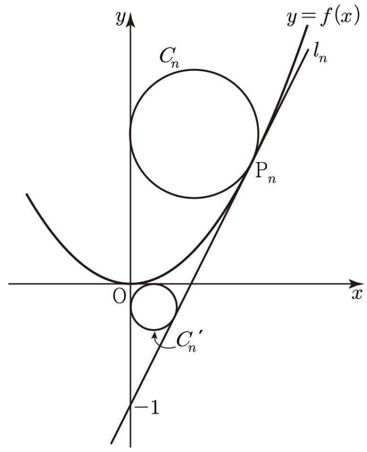
의 꼭짓점의 x좌표를 $f(a)$, y좌표를 $g(a)$라 할 때, 실수 전체 집합에서 연속인 함수 $h(a)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$에서 함수 $h(a)$는 $h(a)=2f(a)+g(a)$이다.
(나) 실수 전체 범위에서 함수 $h(a)$는 $h\left(a+\frac{1}{2}\right)=h\left(a-\frac{1}{2}\right)+\cos\pi a+\underline{h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)}$를 만족한다.

함수 $h(x)$가 $x=b$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 b를 작은 수부터 크기대로 나열할 때, n번째 수를 b_n이라 하자. $b_4-b_1=\frac{7}{3}$이 될 때, k^2이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

9. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=4n^2x^2$이라 하자.

점 $(0, -1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. y축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심이 1사분면에 있는 원을 C_n이라 하고, 접선 l_n과 x, y축에 동시에 접하는 원을 $C_n{}'$이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 R_n, 원 $C_n{}'$의 반지름의 길이를 r_n이라고 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}\{n(R_n-r_n)\}$의 값을 구하시오. [4점]

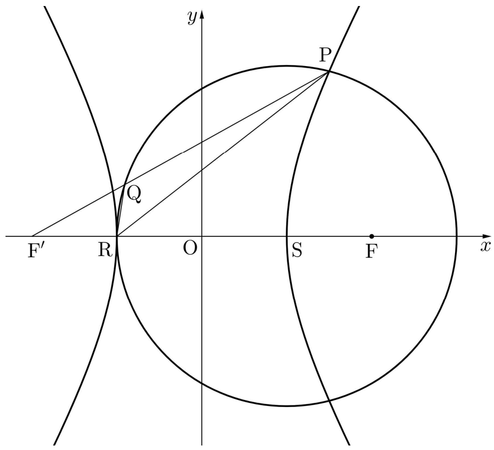


기하

10. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. y축 위의 점 $A(0,1)$에 대하여 $\triangle$PFA와 $\triangle$PF′A의 넓이비가 $\overline{\mathrm{PF}}$와 $\overline{\mathrm{PF'}}$의 길이비와 같고, $\angle\mathrm{FPF'}=\theta$라 할 때 $\cos\theta=\frac{23}{27}$을 만족한다. 삼각형 FPF′의 둘레와 양수 a의 합은? [4점]

① 40 ② 41 ③ 42 ④ 43 ⑤ 44

11. 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선이 점 S를 중심으로 하고 반지름이 c인 원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 선분 PF′가 원과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하고 원과 쌍곡선이 접하는 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{5}{2}$라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이 $\frac{q}{p}\sqrt{15}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



제 2 교시

공통A-제3회

공통과목

1. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_5+S_{15}=0,\ S_{10}=10$$

일 때, a_3의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$f(x)=x(x^2-1)\ (-1\le x\le 1),\ f(x+2)=f(x)$$

함수 $f(x)$와 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(4x)g(x)$가 $\int_{-1}^{1}h(x)dx=\frac{1}{4}$을 만족시킬 때, $h\left(-\frac{7}{8}\right)+h\left(\frac{7}{8}\right)$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{8}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

3. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=6t^2-4t-14,\ v_2(t)=3t^2-2t-8$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

4. 공차가 d $(-1<d<0)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값은? [4점]

(가) a_7은 정수이다.
(나) $\sum_{n=1}^{14} a_n = \frac{119}{5}$ 이다.

① $\frac{27}{5}$ ② $\frac{28}{5}$ ③ $\frac{29}{5}$ ④ 6 ⑤ $\frac{31}{5}$

5. $f(0)\neq 0$이고 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\{f(x)-1\}=2\int_1^x\left\{\left(t^2-1\right)f(t)-\frac{1}{2}f'(t)\right\}dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

For 2027학년도 대학수학능력시험

제 2 교시

공통B-제3회

공통과목

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = 3a_n + 2^n \\ a_{2n+1} = 2a_{n+1} - 3^n \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 = 17$일 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하시오. [3점]

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)f(x)+(x^2+1)g(x)=x^3+x^2-4x-2$ 를 만족시킨다. $f(1)=g(1)$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos bx-12+a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이다. (나) $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

4. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(\log_3 8,\ 0)$, $\mathrm{B}(\log_3 5,\ 3a)$, $\mathrm{C}(a,\ -\log_3 8)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(\log_{27}5,\ 2b)$일 때, 3^{b-a}의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xg(x) = (x^2-2)f(x) - 2x^4 + x^2 + x$$

을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=0,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)}{f(x-1)}\times\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2 g(x)}=7$$

일 때, $f(7)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

선택과목-제3회

확률과통계

6. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$에 대하여 $f : X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$이 짝수일 확률은? [4점]

> $a \in X,\ b \in X$에 대하여
> b가 a의 배수이면 $f(b)$는 $f(a)$의 배수이다.

① $\frac{15}{34}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{36}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{31}{36}$

7. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1) \le f(2)$
> (나) $f(3) < f(4) < f(5)$
> (다) 집합 X의 서로 다른 두 원소 중 $f(a)=b,\ f(b)=a$를 만족시키는 두 원소 $a,\ b$가 존재한다.

미적분

8. 함수 $f(x)=(x^2-ax)e^{bx}$ (a, b는 상수)에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 두 실근을 각각 t, $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? 〔4점〕

(가) 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 최댓값을 가진다.
(나) $g(-a)=a$

① $\frac{7}{3}e^3$ ② $\frac{8}{3}e^3$ ③ $3e^3$ ④ $\frac{10}{3}e^3$ ⑤ $\frac{11}{3}e^3$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m $(m>4)$에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n f(x)+m^n(x-3)}{x^n+m^n}$$

라 하자. 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하며 $h'(m+4)>0$이고 $h(m+4)\ge 0$이다.
(나) $h(p)h(p+1)=0$을 만족시키는 자연수 p의 개수는 5이다.

$h(10)$의 값을 구하시오. 〔4점〕

기하

10. 양수 t에 대하여 원 $(x-3t)^2+(y-4t)^2=20t^2$ 위의 점 P와 점 A$(-2,\ -4)$가 있다. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$의 최댓값과 최솟값의 곱이 84일 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

11. 포물선 $y^2=12x$의 초점 F_1, 포물선 $y^2=-4x$의 초점 F_2라 하자. 선분 F_2F_1를 지름으로 하는 원과 포물선 $y^2=12x$의 제1사분면에서의 교점을 P라 할 때, $\left(\overline{PF_2}\right)^2$의 값은 $p\sqrt{7}-q$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.) [4점]

제 2 교시

공통A-제4회

공통과목

1. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_{p-1}|+a_{p+1}=0,\ \sum_{k=1}^{p-2}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{2-p}{4(1-p)}$$

일 때, $a_{p-3}+a_{p+1}$의 값은? (단, p는 4이상의 자연수이다.) [4점]

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

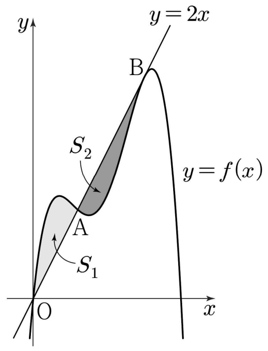
2. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 $x>0$에서 $g(x)\geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\leq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(1)$이다.
(나) $x>1$인 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)=g(x-1)|f(x)-f(4)|$이다.

$g(4)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

3. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 원점 O가 아닌 점에서 만나는 점을 x좌표가 작은 순서로 A, B라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$는 점 B에서 접한다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{5}$이고 $S_1=S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

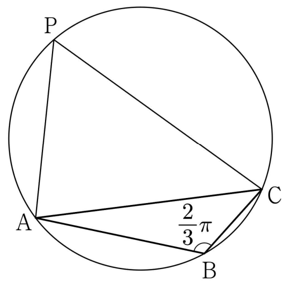
① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2



4. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}},\ \angle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\pi$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 사각형 ABCP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{QA}}=4$이다. 점 Q를 지나고 원 O에 접하는 직선과 두 직선 AB, BC의 교점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 BDE의 넓이는? [4점]



① $\frac{64\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{81\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{128\sqrt{3}}{7}$ ④ $\frac{162\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{256\sqrt{3}}{7}$

5. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n>n)\\ 3n-3+2a_n & (a_n\le n)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=24$가 되도록 하는 모든 a_1의 합을 S, 모든 a_1의 개수를 m이라 하자. $S+m$의 값은? [4점]

① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

제 2 교시

공통B-제4회

공통과목

1. 곡선 $y = x^3 - 2x$에 접하고 기울기가 1인 두 직선 사이의 거리를 l이라 할 때 l^2의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{9}(a_n+1)^2 = 84,\ \sum_{n=1}^{9}(a_n-2)^2 = 21$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{9}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

3. 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x) = (x-1)(x-2)$ 이고, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{2}$ 일 때, $\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\int_x^0 f(t)dt$ 의 값을 구하시오. [3점]

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5 = 3,\ \sum_{k=1}^{7}|a_k| = \sum_{k=1}^{7}a_k + 36$$

일 때, 가능한 모든 a_1의 합은? [4점]

① 22　② 23　③ 24　④ 25　⑤ 26

5. 실수 a에 대하여 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도를 각각

$$v_1(t) = 2t - \frac{3}{2},\ v_2(t) = t^2 - at$$

라 하자. 점 P의 $t=2$에서의 위치와 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리가 같을 때, 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$　② $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$　③ $\frac{2-\sqrt{21}}{2}$　④ $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$　⑤ $\frac{2+\sqrt{21}}{2}$

확률과통계

6. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2$일 때, $f(x)\le f(x-1)$이다.
> (나) X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)-|x|\in X$이다.

7. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a+b+c+d+e=13$
> (나) $a+b+c$는 3의 배수이다.
> (다) $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중에서 2의 배수의 개수는 2이상이다.

미적분

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 치역이 정수 전체의 집합의 부분집합인 함수 $g(x)$에 대하여 $\{f(x)-x-g(x)\}\{f(x)+x-g(x)\}=0$
(나) $x \geq 0$일 때, $f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \geq 0$

$\int_0^8 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$의 최댓값은 $\frac{m\pi+n}{\pi^2}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 정수이다.) [4점]

9. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

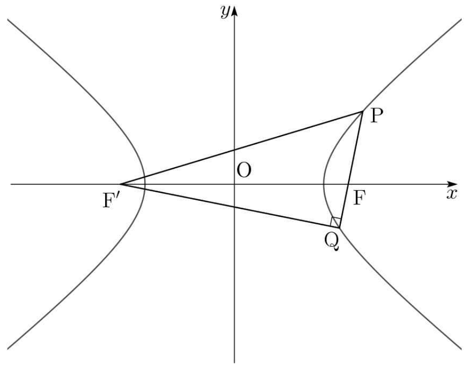
$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\dfrac{3}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases} \quad (\alpha\text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킬 때, $a_1 \times p$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$
(나) $\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고, $\sum_{n=1}^{p} b_n = -11$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = -\frac{1}{16}$이다.

기하

10. 그림과 같이 두 초점이 F(c,0) , F$'$($-$c,0) (c양수) 인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0\ ,\ b>0)$과 제1사분면 위의 점 P 에 대하여 직선 FP가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\angle$FQF$'=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 FQF$'$의 넓이가 10이고 내접원의 반지름의 길이가 $6-\sqrt{26}$ 일 때, 삼각형 PQF$'$의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{80}{3}$ ② $\dfrac{82}{3}$ ③ 28 ④ $\dfrac{86}{3}$ ⑤ $\dfrac{88}{3}$

11. 두 초점이 F$(c, 0)$과 F$'(-c, 0)(c>0)$인 타원 G_1이 있다. 타원 G_1의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 두점 A , F$'$를 초점으로 하고 원점 O를 지나는 쌍곡선을 G_2라 하자. 두 곡선 G_1, G_2의 교점 중 제1사분면에 있는 교점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}'}+\overline{\mathrm{BA}}=2\overline{\mathrm{AO}}+1$이 성립한다. 이때 쌍곡선의 주축의 길이가 2일 때, $3\times(c-1)^2$의 값을 구하시오. [4점]

For 2027학년도 대학수학능력시험

제 2 교시

공통A-제5회

공통과목

1. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f(x-1)=x^3+6x^2-x$$

를 만족시킬 때, $2\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{-1}^{1}(3x^2+f(x))dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f'(0)x^2+f(0) & (x<0) \\ f(x) & (0\le x<2) \\ f'(2)(x-2)^2+f(2) & (x\ge 2) \end{cases}$$

일 때, $\lim_{x\to 0}\left\{x^2\times g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=-2g'(1)$가 성립한다. $g(3)=5$일 때, $g(-1)+g(4)$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

3. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P와 $2a$를 출발하여 수직선 위를 움직이는 Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-12t,\ v_2(t)=-9$$

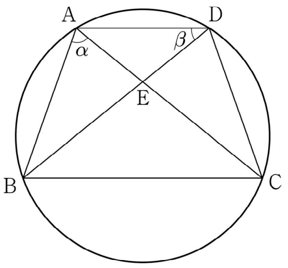
이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 최소인 자연수 a에 대하여 시각 $t=0$에서 $t=4$사이에 점 P와 Q의 거리가 가장 가까울 때의 시각 $t=t_1$이라 하자. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=5t_1$까지 움직인 거리는? [4점]

① 39 ② 41 ③ 43 ④ 45 ⑤ 47

4. 그림과 같이 한 원에 내접하고 선분 AD와 선분 BC가 평행한 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=4\,,\ \overline{BC}=6$$

이다. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ADB=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 삼각형 ABE의 외접원의 반지름의 길이는? $\left(단,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\,,\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\frac{10\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{81\sqrt{2}}{56}$ ③ $\frac{41\sqrt{2}}{28}$ ④ $\frac{83\sqrt{2}}{56}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. $f(0)=1$, $f'(2)=\frac{3}{2}$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 2) \\ f(x-2)+3 & (x>2) \end{cases}$$

은 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 방정식 $2g'(x)-3=0$의 모든 실근의 합은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

공통B-제5회

공통과목

1. 함수 $f(x)=-x^2+4$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=m(x-2)$가 이등분할 때, m의 값은? [3점]

① $-4+2^{\frac{2}{3}}$ ② $-4+2^{\frac{4}{3}}$ ③ $-4+2^{\frac{5}{3}}$
④ $-3+2^{\frac{5}{3}}$ ⑤ $-2+2^{\frac{4}{3}}$

2. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\sin x \ge \cos\frac{\pi}{5}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha=\frac{q}{p}\pi$이다. $p-q$의 값을 구하시오. [3점]

3. 세 실수 $a=2\log\frac{1}{\sqrt{5}}+\log_2 40$, $b=\log\frac{1}{20}$, $c=\frac{1}{\log_2 10}$에 대하여 $(a+b)c$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

4. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}\left(\log_3 a,\ 8\right)$, $\mathrm{B}\left(\log_3 \dfrac{3}{4},\ \log_2 \sqrt{2}\right)$가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 직선 $y=3x$위에 있을 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

5. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=nx^2+x-1$, $g(x)=\sin\dfrac{\pi}{n}x$에 대하여 집합 A가

$$A=\{x \mid f(g(x))=g(x),\ 0<x<4n\}$$

이다. 집합 A의 모든 원소의 합을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

선택과목-제5회

확률과통계

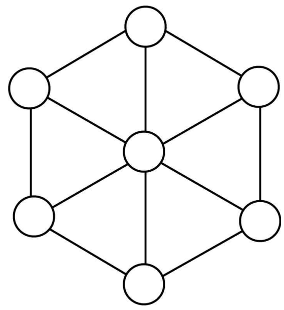
6. 빨간 공 3개, 노란 공 3개, 흰 공 3개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수도 있다.) [4점]

(가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
(나) 학생 B가 받는 빨간 공의 개수는 1 이상이다.
(다) 학생 C가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

① 244 ② 246 ③ 248 ④ 250 ⑤ 252

7. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개를 이어 만든 육각형이 있다. 각 꼭짓점에 1에서 7까지의 수를 배치할 때, 아래 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

한 직선 위의 수의 합은 언제나 12이하이다.



미적분

8. 공비가 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 최댓값과 최솟값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k} = \frac{1}{(-5)^n}$

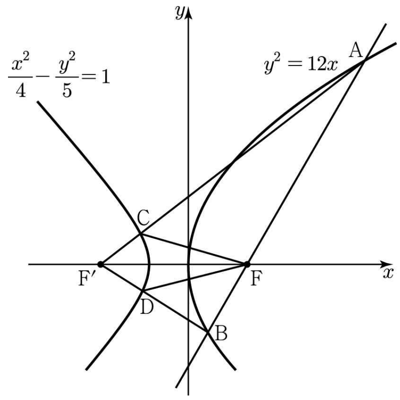
(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{5}$

9. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} (12a_{2n} + 13|a_{3n-1}|) = 0$이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5|a_n| + b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1 \times b_3 = \frac{p}{q}$일 때, 서로소인 두 자연수 $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

기하

10. 평면 α위에 있지 않은 두 점 A, B가 있고 두 점을 평면 α위에 내린 수선의 발을 각각 M_1, M_2라 할 때, $\overline{AM_1} = 10$, $\overline{BM_2} = 4$이다. 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P라 하고 점 P를 지나고 직선 AB에 수직인 평면을 β라 할 때, 평면 α와 평면 β가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta = \frac{3}{5}$이다. 평면 β위의 새로운 점 Q를 잡으면 선분 $\overline{PQ}$는 평면 α와 평행하고 $\overline{PQ} = 4$이다. 삼각형 AQM_1의 평면 β위로의 정사영 넓이와 삼각형 BPQ의 평면 α위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 값을 구하시오. (단, 선분 AB과 평면α는 교점이 생기지 않는다.) [4점]

11. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1\ (x < 0)$의 초점을 F′ 이라 하고 포물선 $y^2 = 12x$의 초점을 F 라 하자. 이때 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$이면서 점 F를 지나는 직선이 포물선 $y^2 = 12x$과 제1 사분면에서 만나는 점을 A , 제4 사분면에서 만나는 점을 B 이고 선분 AF′ 과 쌍곡선이 제2 사분면에서 만나는 점을 C , 선분 BF′ 과 쌍곡선이 제3 사분면에서 만나는 점을 D 라 하자.



삼각형 ACF 의 둘레의 길이와 삼각형 BFD 의 둘레의 길이의 합은 $p + q\sqrt{7}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오 [4점]

〔출제자 : 황보백 010-5673-8601〕

2027 랑데뷰콘텐츠-1주차

제1회 빠른답

A	1	④	2	①	3	③	4	①	5	9
B	1	③	2	①	3	①	4	②	5	⑤
선택	6	511	7	④	8	③	9	④	10	④
	11	⑤								

제2회 빠른답

A	1	①	2	2	3	④	4	⑤	5	③
B	1	②	2	③	3	1	4	③	5	②
선택	6	⑤	7	372	8	13	9	5	10	⑤
	11	176								

제3회 빠른답

A	1	③	2	④	3	④	4	②	5	41
B	1	10	2	③	3	11	4	②	5	96
선택	6	④	7	36	8	⑤	9	4	10	69
	11	24								

제4회 빠른답

A	1	④	2	21	3	④	4	④	5	③
B	1	④	2	15	3	1	4	⑤	5	②
선택	6	21	7	128	8	28	9	15	10	①
	11	21								

제5회 빠른답

A	1	③	2	⑤	3	①	4	②	5	④
B	1	③	2	3	3	③	4	①	5	872
선택	6	⑤	7	64	8	25	9	34	10	3
	11	32								

수학 영역

수학 콘텐츠 반	"상위권의 차이는 재능이 아니라 관리에서 갈린다!!"
콘텐츠 소개 (샘플 1회 참고)	① 주간지 - 매주 60문항 → 사고 흐름을 점검하고 실력을 유지, 확장하기 위한 일일테스트 양식의 훈련지 ② 평가원 기출분석서 - 매주 약 50문항 → 출제자의 시선으로 문제를 다시 해석하는 고급 훈련 콘텐츠 ③ 2026년 (EBS/전국 모의고사) 리빌드 문항 제공 "문항 수는 많지만, 목적 없는 문제는 단 한 문제도 없다!!"
개강일	1월 초
일주일 콘텐츠 소화 인증샷	매주 토요일 오후 1시 ~ 일요일 밤 10시 [개인톡 사진으로 검증] "상위권은 주말에 무너지는 것이 아니라, 주말에 완성된다!!"
콘텐츠 제작 및 관리 강사 소개	황보 백 [수학 콘텐츠 제작 전문가] [유명 인강 강사님들 문항 공급책] [오르비 출판사 출간 도서] 랑데뷰세미나 랑데뷰 라이트N제 시리즈 랑데뷰 기출과 변형 시리즈 랑데뷰 N제 폴포 시리즈 랑데뷰 N제 쉬사준킬 시리즈 랑데뷰 N제 킬러극킬 시리즈 랑데뷰★수학 모의고사 시리즈 랑데뷰 평가원-싱크로율99% 모의고사 [랑데뷰수학 출판사 출간 도서] 랑데뷰 평기출 2027 시리즈 랑데뷰 상수 시리즈 랑데뷰 프리미엄N제 시리즈
관리 추천 대상	수학 영역 1~2등급, 독학생
가격	비대면 [온라인 : 월 5만] 대면 [장소 : 송원학원]
문의	문자 : 010-5673-8601 카톡 : hbb100

랑데뷰수학 콘텐츠 온라인 관리반

상위권을 유지하는 공부가 아니라, 상위권을 완성하는 시스템

1. 이 반은 무엇이 다른가

이 반은 문제를 무작정 **많이 푸는 반이 아닙니다.**
문제를 **해석하고 통제하는 힘**을 기르는 반입니다.
이미 수학 1~2등급의 실력을 갖춘 학생들이 실수로 흔들리지 않고 시험 상황에서도 사고 흐름을 유지하며 기출을 '예상 가능한 영역'으로 만드는 것
이것이 이 반의 목표입니다.
상위권의 차이는 재능이 아니라, 관리에서 갈립니다.

2. 대상 학생

수학 영역 **1~2등급 학생**
문제는 풀리지만, **왜 풀리는지 명확하지 않은 학생**
기출을 여러 번 풀었는데도 시험에서 불안한 학생
고난도 문항에서 **접근 방향이 흔들리는 학생**

3. 제공되는 핵심 콘텐츠 [샘플 참고]

① 주간지 (매주 60문항)**–필수**
주간지는 **실력을 유지하는 자료가 아니라, 점검하고 보완하는 자료**입니다.
매주 5회분 일일 테스트 구성
난이도와 사고 유형을 의도적으로 배치
각 1회분의 구성 [3단계 공통A형→공통B형→선택과목]
A형
쉬운 4점 × 2문제
어려운 4점 × 3문제
→ 실수 지점, 사고 붕괴 지점 훈련
B형
어려운 3점 × 3문제
쉬운 4점 × 2문제
→ 기본기를 속도로 전환
선택 과목
확통 / 미적분 / 기하 각 4점 2문제
→ 선택과목에서도 사고 일관성 유지
킬러는 갑자기 등장하지 않습니다. 이미 연습한 사고의 다른 모습일 뿐입니다.

② 평가원 기출분석서 (매주 약 50문항)**–선택**
기출을 "외우는 자료"가 아니라
출제자의 시선으로 다시 해석하는 자료입니다.
하나의 기출 문항을 여러 관점에서 분석

단계별 사고 흐름을 따라가며 해결
문제를 푸는 과정 자체가 '분석'이 되도록 설계
기출을 외운 학생은 불안하고, 기출을 이해한 학생은 흔들리지 않습니다.

③ 2026년 (EBS/전국 모의고사) 리빌드 문항 제공–선택
EBS 수능특강·수능완성,
평가원·교육청·더프 등 전국 모의고사의 이슈 문항을
출제 의도를 보존한 리빌드 문항으로 재구성하여 제공합니다.
EBS 문항은 외우는 대상이 아니라 출제자가 의도한 사고 흐름을 재구성하는 대상이며,
모의고사의 가치는 적중 여부가 아니라 출제 실험에서 무엇을 보려 했는지에 있습니다.

4. 관리 운영 방식

관리 시간 : 토요일 오후 1시~일요일 밤 10시
주중 학습 결과 점검 + 다음 주 학습 방향 설정
주말을 **실력 회복 시간이 아닌, 실력 도약 시간**으로 활용
① 핵심 자료 중 주간지 60문항은 필수 제공
② 주간지 소화량과 정도에 따라 평가원 기출분석서와 2026년 주요 리빌드 문항 선택 제공
→ 자료가 쌓이면 스트레스가 쌓이므로 주간지 소화할 수 있는 역량이 될 때 나머지 자료 제공 ⇨ 추가 금액 없는 같은 가격인데 열심히 해서 선택 자료도 받아야겠죠?

상위권은 주말에 무너지지 않습니다. 주말에 완성됩니다.

5. 이 반을 통해 기대할 수 있는 변화

✔ 문제 접근 속도 안정
✔ 고난도 문항에서의 방향성 확보
✔ 실수 패턴의 구조적 교정
✔ 기출에 대한 불안감 감소
✔ 시험장에서 사고 흐름 유지

6. 한 문장으로 정리하면

이 반은
수학 실력을 '운에 맡기지 않는 상태'로 만드는 반입니다.

제1회 - A

1) 정답 ④

$t=0$일 때 가속도 -6이므로 $a(0)=-6$이다.

따라서 $k=-6$, $a(t)=6t-6$이다.

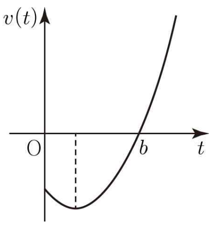
$v(t)=\int a(t)dt$

$\quad=\int (6t-6)dt$

$\quad=3t^2-6t+C$ (C: 적분상수)

점 P가 $t=b\,(b>1)$에서 운동방향을 바꾸므로 $v(b)=0$이고 ……㉠

$v-t$그래프는 그림과 같다.



㉠에서 $3b^2-6b+C=0$

$C=-3b^2+6b$

$t=0$에서 $t=b$까지의 이동거리가 27이므로

$\int_0^b |v(t)|dt=27$

$\int_0^b (3t^2-6t-3b^2+6b)dt=-27$

$\left[t^3-3t^2+(-3b^2+6b)t\right]_0^b=-27$

$b^3-3b^2+b(-3b^2+6b)=-27$

$2b^3-3b^2-27=0$

$(b-3)(2b^2+3b+9)=0$

$b=3$, $C=-9$가 되므로 $v(t)=3t^2-6t-9$이다.

$t=\frac{4}{3}b=4$의 위치가 0이므로 점 P의 초기 위치를 x_0라 하면

$x_0+\int_0^4 v(t)dt=0$

$x_0+\int_0^4 (3t^2-6t-9)dt=0$

$x_0+\left[t^3-3t^2-9t\right]_0^4=0$

$x_0+64-48-36=0$

$x_0=20$

따라서 점 P의 처음 위치는 20이다.

2) 정답 ①

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이고 원에 내접하므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.

즉, $\overline{AB}=\overline{CD}$

$\angle BAD=\alpha$라 하면 $\angle BCD=\pi-\alpha$

$\overline{AB}=\overline{CD}=x$, $\overline{BC}=y$라 하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=x^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot x\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=y^2+2^2-2\cdot y\cdot 2\cdot cos(\pi-\alpha)$

$y^2-\sqrt{2}y-12=0$, $(y-3\sqrt{2})(y+2\sqrt{2})=0$

$\therefore y=3\sqrt{2}\ (\because y>0)$

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

(□ABCD의 넓이)=(△ABD의 넓이)+(△BCD의 넓이)이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin(\pi-\alpha)$

$\therefore \sin\theta=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

3) 정답 ③

$c_n=a_n-b_n$이라 하면 $|c_1|=4$이고 자연수 k에 대하여 $c_k=0$, $c_{k+1}>0$이므로 수열 $\{c_n\}$은 공차가 양의 정수인 등차수열이다.

따라서 $c_1=-4$이다.

$c_k=0$이므로 수열 $\{c_n\}$의 가능한 공차 d의 값은 4, 2, 1이다.

(i) $d=4$

	1	2	3
c_n	-4	0	4
a_n	a_1	a_2	a_3
b_n	a_1+4	a_2	a_3-4

따라서 $k=2$이고 $\sum_{n=1}^{2}a_n=10$에서 $a_1+a_2=10$이므로 $\sum_{n=1}^{2}b_n=14$

(ii) $d=2$

	1	2	3	4
c_n	-4	-2	0	2
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4
b_n	a_1+4	a_2+2	a_3	a_4-2

따라서 $k=3$이고 $\sum_{n=1}^{3}a_n=10$에서 $a_1+a_2+a_3=10$이므로

$\sum_{n=1}^{3}b_n=16$

(iii) $d=1$

	1	2	3	4	5	6
c_n	-4	-3	-2	-1	0	1
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
b_n	a_1+4	a_2+3	a_3+2	a_4+1	a_5	a_6-1

따라서 $k=5$이고 $\sum_{n=1}^{5}a_n=10$에서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10$이므로

$\sum_{n=1}^{5}b_n=20$

(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{n=1}^{k}b_n$의 최솟값은 14, 최댓값은 20이므로 합은 34이다.

4) 정답 ①

(나)에서 $x=0$을 대입하면 $f(2)=f(0)+b$이다.

따라서 $-8+4a=b$⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는

모든 실수 x에 대하여 $f'(x+2)=f'(x)$이므로 $x=0$을 대입하면

$f'(2)=f'(0)$이다.

(가)에서 $0<x<2$일 때, $f'(x)=-3x^2+2ax$이고

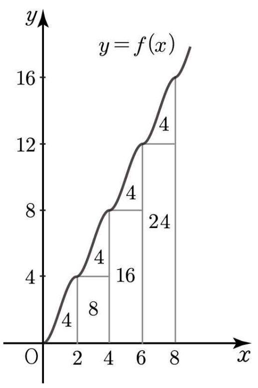
$\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$이므로 $-12+4a=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=4$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases}-x^2(x-3) & (0\le x<2)\\ -(x-2)^2(x-5)+4 & (2\le x<4)\\ -(x-4)^2(x-7)+8 & (4\le x<6)\\ -(x-6)^2(x-9)+12 & (6\le x<8)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

이다.

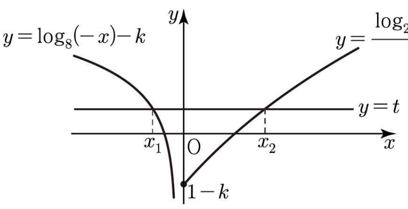


$\int_4^8 f(x)dx=(4+16)+(4+24)=48$이다.

5) 정답 9

두 곡선 $y=\log_8(-x)-k=\dfrac{\log_2(-x)}{3}-k$, $y=\dfrac{\log_2(x+8)}{3}-k$의

그래프는 그림과 같다.



① 방정식 $\dfrac{\log_2(-x)}{3}-k=t$의 실근 x_1을 구해 보자.

$\log_2(-x)=3(k+t)$

$-x=2^{3(k+t)}$

$\therefore\ x_1=-8^{(k+t)}$

② 방정식 $\dfrac{\log_2(x+8)}{3}-k=t$의 실근 x_2를 구해 보자.

$\log_2(x+8)=3(k+t)$

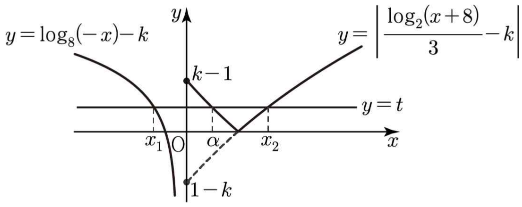
$x+8=2^{3(k+t)}$

$\therefore\ x_2=-8+8^{k+t}$

①, ②의 두 방정식의 실근의 합은 t의 값에 관계없이

$x_1+x_2=-8$로 일정하다.

이때 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $t<k-1$이면 방정식 $g(x)=t$의 모든 실근의 합은

$x_1+\alpha+x_2=-8+\alpha\ (\alpha>0)$로 $g(t)>-8$이다.

따라서

$g(t)<-8$인 t의 값은 존재하지 않고 $g(t)=-8$을 만족시키기

위해서는

$y=\left|\dfrac{\log_2(x+8)}{3}-k\right|$와 $y=t$는 만나지 않거나 $x=0$에서만

만나야 한다.

부등식 $g(t)=-8$을 만족시키는 t의 최솟값이 3이므로

$k-1=3$이다.

$\therefore\ k=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\log_8(-x)-4 & (x<0)\\ \left|\dfrac{\log_2(x+8)}{3}-4\right| & (x\ge0)\end{cases}$에서

$f(-2k)=f(-8)=1-4=-3$

그러므로 $\{f(-2k)\}^2=9$이다.

제1회 - B

1) 정답 ③

첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$ar^3+ar^4=ar^3(1+r)=\dfrac{3}{2}$

$ar^4=4ar^2$

$\therefore\ ar^3=ar^3(1+r)\times\dfrac{1}{1+r}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

2) 정답 ①

$(2x+3)f(x)-2xg(x)=\int_0^x g(t)dt+x^2+3$

의 양변에 $x=0$을 대입하면 $3f(0)=3$

$\therefore\ f(0)=1$

$(2x+3)f(x)-2xg(x)=\int_0^x g(t)dt+x^2+3$

을 x에 관하여 미분하면

$2f(x)+(2x+3)f'(x)-2g(x)-2xg'(x)=g(x)+2x$

이고 양변에 $x=0$을 대입하면

$2f(0)+3f'(0)-2g(0)=g(0)$
$f(0)=g(0)=1$이므로
$3f'(0)=1$
$\therefore\ f'(0)=\frac{1}{3}$

3) 정답 ①
$\sin\left(x+\frac{13}{6}\pi\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)\right\}=\cos\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$이므로
$\cos\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=t\ \ (-1\le t\le 1)$이라 하면
$y=\sin^2\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)+1$
$=1-\cos^2\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)+1$
$=1-t^2+t+1$
$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\ \ (-1\le t\le 1)$
이 함수는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$을 가지므로 $M=\frac{9}{4}$이고
$t=\cos\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$일 때
$x+\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x+\frac{5}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi$
즉, $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$을 갖는다.
정의역이 $\{x\mid 0<x<2\pi\}$이므로 $a=\frac{2}{3}$이다.
$M=\frac{9}{4}$이므로 $a\times M=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{2}$

4) 정답 ②
두 점 $(0, 0)$, $(k, \log_3 8)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{\log_3 8}{k}$이고
$f'(x)=2x$이므로 함수 $f(x)=x^2+2$위의 점 $(\log_2 9, f(\log_2 9))$에서의 접선의 기울기는 $2\log_2 9$이다.
두 직선이 수직이므로
$\frac{\log_3 8}{k}\times 2\log_2 9=-1$
$\frac{3\log 2}{k\log 3}\times\frac{4\log 3}{\log 2}=-1$
$\frac{12}{k}=-1$
$\therefore\ k=-12$

5) 정답 ⑤
점 P의 처음 위치가 b이고 $t=a$에서의 위치가 0이므로
$b+\int_0^a(3t^2-at)dt=0$
$b+\left[t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^a=0$
$b+a^3-\frac{a^3}{2}=0$
$b=-\frac{a^3}{2}\ \ (b<0)\ \cdots\cdots$ ㉠
$v(t)=0$일 때, $t=\frac{a}{3}$이고 $0<t<\frac{a}{3}$일 때, $v(t)<0$이므로 점 P가 출발 후 $t=\frac{a}{3}$일 때까지 음의 방향으로 움직인다.
처음 위치 b가 음수이므로 점 P의 위치의 최솟값은 $t=\frac{a}{3}$일 때다.
따라서
$\int_0^{\frac{a}{3}}v(t)dt=\int_0^{\frac{a}{3}}(3t^2-at)dt=-\frac{3\left(\frac{a}{3}\right)^3}{6}=-\frac{a^3}{54}$에서
$b-\frac{a^3}{54}=-\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{54}=-\frac{14}{27}a^3$
$-\frac{14}{27}a^3=-14$에서 $a=3$이다.
㉠에서 $b=-\frac{27}{2}$이다.
따라서 $a\times b=-\frac{81}{2}$이다.

제1회 - 선택

6) 정답 511
동전에 왼쪽부터 번호를 지정하면 다음과 같다.

1번	2번	3번	4번	5번
앞면	앞면	앞면	뒷면	뒷면

(i) 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 앞면이 될 때,
뒷면인 동전은 홀수번, 앞면인 동전은 짝수번 시행이 이뤄져야 한다.
① 4번 동전과 5번 동전이 각각 1회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(4, 0, 0) (2, 2, 0)			(1, 1)	

$(4, 0, 0)\ \rightarrow\ \frac{6!}{4!}\times 3\times 1=90$
$(2, 2, 0)\ \rightarrow\ \frac{6!}{2!2!}\times 3\times 1=540$
따라서 $90+540=630$
② 4번 동전과 5번 동전 중 하나가 1회, 다른 하나가 3회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(2, 0, 0)			(1, 3)	

$(2, 0, 0)\ \rightarrow\ \frac{6!}{3!2!}\times 3\times 2=360$
③ 4번 동전과 5번 동전이 각각 3회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(0, 0, 0)			(3, 3)	

$(0,\,0,\,0)\ \rightarrow\ \dfrac{6!}{3!3!}\times1\times1=20$

④ 4번 동전과 5번 동전 중 하나가 1회, 다른 하나가 5회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(0, 0, 0)			(1, 5)	

$(0,\,0,\,0)\ \rightarrow\ \dfrac{6!}{5!}\times1\times2=12$

①~④에서 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 앞면인 경우의 수는

$630+360+20+12=1022$

(ii) 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 뒷면이 될 때,
뒷면인 동전은 짝수번, 앞면인 동전은 홀수번 시행이 이뤄져야 한다.
그런데 앞면인 동전이 3개이고 각각이 모두 홀수번 시행이 이뤄지면 시행의 합이 홀수가 되고 그럼 뒷면인 동전의 시행의 합도 홀수가 되어야 해서 모순이다.
즉, 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 뒷면이 될 수 없다.
(i), (ii)에서 시행을 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 하는 경우의 수는 1022가지이다.

$a=1022$이므로 $\dfrac{a}{2}=511$이다.

7) 정답 ④

$abc^2d^3=2^2\times3^2\times5^3\times7^2$에서 $d=5$ 뿐이다.

즉, $abc^2=2^2\times3^2\times7^2$에서 c^2의 서로 다른 소인수의 개수에 따라 구분하자.

(i) 0개인 경우

즉, $c^2=1^2$이므로 $ab=2^2\times3^2\times7^2$에서
조건 (나)에 의하여 (가능한 a, b의 모든 개수)$-$(a, b가 서로소인 개수)로 계산할 수 있다.
$(a,\,b)$의 개수는 $3\times3\times3-2\times2\times2=27-8=19$

(ii) 1개인 경우

c^2을 결정하는 경우의 수는 3가지.
예를 들어 $c^2=2^2$이라 하면 $ab=3^2\times7^2$에서
$(a,\,b)$의 개수는 $3\times3-2\times2=9-4=5$
$\therefore 3\times5=15$

(iii) 2개인 경우

c^2을 결정하는 경우의 수는 3가지.
예를 들어 $c^2=2^2\times3^2$이라 하면 $ab=7^2$에서
$(a,\,b)$의 개수는 $3-2=1$
$\therefore 3\times1=3$

(iv) 3개인 경우

즉, $c^2=2^2\times3^2\times7^2$이므로 $ab=1$에서
$(a,\,b)=(1,\,1)$ 뿐인데 이는 서로소이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 모든 순서쌍 $(a,\,b,\,c,\,d)$의 개수는 $19+15+3=37$개

8) 정답 ③

$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}$, $\dfrac{dy}{dt}=(-t^2+4)e^{-t}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=t^2-4$이고

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2t\times\dfrac{dt}{dx}=2t\times(-e^t)$

$t=2$에서 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-4e^4<0$이므로 극댓값을 가진다.

따라서 $a=e^{-2}+5$이고 $b=6e^{-2}$이므로

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+5e^2}{6}$이다.

9) 정답 ④

$-x^2+2nx+2=x^2-2nx+2n^2$

$2x^2-4nx+2n^2=2$

$x^2-2nx+n^2=1$

$(x-n)^2=1$

$x=n+1,\ x=n-1$

따라서 $\mathrm{A}_n(n-1,\,n^2+1)$, $\mathrm{B}_n(n+1,\,n^2+1)$이라고 할 수 있다.

원 $(x-n)^2+y^2=1$은 중심이 $(n,\,0)$이고 반지름의 길이가 1이므로 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 $\mathrm{P}_n(n,\,-1)$이다.

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 $\mathrm{M}(n,\,n^2+1)$이라 하면 점 P_n이 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 수직이등분선 위에 있으므로 무게중심 G의 좌표는 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}}$을 $2:1$로 내분하는 점이다.

따라서

$x_n=n,\ y_n=\dfrac{2n^2+1}{3}$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n\times x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+1}{3}}{n^2}=\frac{2}{3}$

10) 정답 ④

원과 포물선과 만나는 점 A에 대하여 점 B는 y축 대칭인 점이고, 포물선의 초점의 좌표는 $(p,0)$이므로 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

점 A의 x좌표를 a라 하면

$a^2+y^2=p^2\quad\cdots㉠$

$y^2=4pa\quad\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$a^2+4pa-p^2=0$

$a=(\sqrt{5}-2)p\quad\cdots㉢$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{PA}}=\mathrm{a}+\mathrm{p}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=k\overline{\mathrm{AB}}\ \Rightarrow\ a+p=2ak\quad\cdots㉣$

㉢, ㉣을 연립하면

$a+\dfrac{a}{\sqrt{5}-2}=2ak$

$\therefore k=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

11) 정답 ⑤
포물선의 초점 F의 x좌표를 p라 하면 포물선방정식은
$y^2=4px$이고 점 $\mathrm{A}(p,4)$를 지나므로 $p=2$이다.

$\triangle\mathrm{AFF}'$에서 $\angle\mathrm{AFP}=\dfrac{\pi}{2}$이므로,
$\triangle\mathrm{AFF}'$는 직각삼각형이다.
타원의 초점은 $\mathrm{F}(2,0), \mathrm{F}'(-2,0)$
$\overline{\mathrm{FF}'}=4, \overline{\mathrm{AF}}=4$이고
$\triangle\mathrm{AFF}'$에서 $\overline{\mathrm{AF}'}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2+\overline{\mathrm{F'F}}^2$이므로
$\overline{\mathrm{AF}'}=4\sqrt{2}$이다.

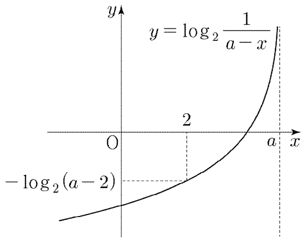
타원의 장축의 길이 $=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF}'}=4+4\sqrt{2}$이므로
$\mathrm{P}(-2-2\sqrt{2},0), \mathrm{Q}(2+2\sqrt{2},0)$
$\overline{\mathrm{AP}}^2=4^2+(4+2\sqrt{2})^2$
$\overline{\mathrm{BQ}}^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2=4^2+(2\sqrt{2})^2$
$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{BQ}}^2=16(1+\sqrt{2})$

제2회 - A

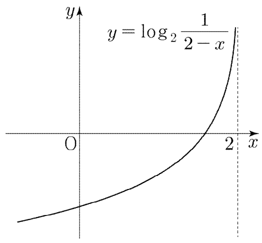
1) 정답 ①
$|a|:b=2:\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{3}|a|=2b$
$\dfrac{3a^2}{4}=b^2$ …… ㉠
(A의 넓이) $-$ (C의 넓이) $=$ (B의 넓이)에서
(A의 넓이) $=$ (B의 넓이) $+$ (C의 넓이)이다.
(A의 넓이) $=\displaystyle\int_a^0 (x^3-6x+2x)\,dx$
$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-2x^2\right]_a^0$
$=-\left(\dfrac{1}{4}a^4-2a^2\right)$
(B의 넓이) $+$ (C의 넓이) $=2\displaystyle\int_0^b 2x\,dx=2b^2$
이므로
$-\dfrac{1}{4}a^4+2a^2=2b^2$
㉠을 대입하면
$-\dfrac{1}{4}a^4+2a^2=\dfrac{3a^2}{2}$, $-a^4+8a^2=6a^2$
$a^4-2a^2=0$, $a^2(a^2-2)=0$
따라서 $a^2=2$이고 $b^2=\dfrac{3}{2}$이고 $16(a^2+b^2)=56$

2) 정답 2
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의된 함수이므로 $a\geq 2$이다.

$a>2$이면 곡선 $y=\log_2\dfrac{1}{a-x}$의 그래프는 다음과 같고,

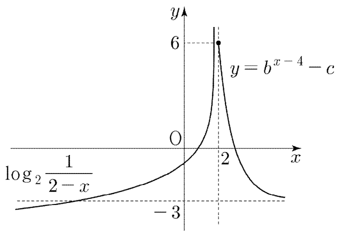


$a=2$이면 곡선 $y=\log_2\dfrac{1}{2-x}$의 그래프는 다음과 같다.



임의의 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=\log_2\dfrac{1}{a-x}$의 교점이 존재할 때 그 개수는 1이고, 직선 $y=t$와 곡선 $y=b^{x-4}-c$의 교점이 존재할 때, 그 개수도 1이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1인 실수 t의 범위가 $t\leq -3$
또는 $t>6$이므로 $-3<t\leq 6$에서 직선 $y=t$과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수는 0또는 2이다. 이를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $a=2$, $c=3$이고, $b^{-2}-3=6$이므로 $b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $abc=2\times\dfrac{1}{3}\times 3=2$이다.

3) 정답 ④
두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 p, q라 하면
$a_7=b_7$, $a_8=b_9$에서 $a_8-a_7=b_9-b_7 \rightarrow p=2q$
$a_9=a_8+p=b_9+p=33$
$b_9=33-p$
$33-p\leq 30$
$\therefore p\geq 3$
q가 자연수이므로 p는 4이상의 짝수이다.
$a_9=a_1+8p=33$에서 $p=4$, $a_1=1$뿐이다.
따라서 $q=2$이고 $a_7=1+6\times 4=25$에서 $b_7=25$

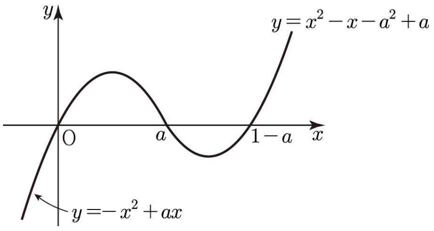
$b_7 = b_1 + 6 \times 2$에서 $b_1 = 13$
따라서 $a_1 + b_1 = 14$이다.

4) 정답 ⑤

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-a) & (x < a) \\ (x-a)(x+a-1) & (x \geq a) \end{cases}$$

$0 < a < \frac{1}{2}$이므로 $a < 1-a$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(x) = \int_0^x f(t)dt$에서 $g(0) = 0$이고 $g'(x) = f(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극솟값 0을 갖고 $x = a$에서 극댓값, $x = 1-a$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이기 위해서는 $x = 1-a$에서의 극솟값이 0이상이어야 한다.

$$\int_0^a f(x)dx \geq \int_a^{1-a} \{-f(x)\}dx$$

$$\frac{a^3}{6} \geq \frac{\{(1-a)-a\}^3}{6}$$

$$a^3 \geq (1-2a)^3$$

$$a \geq 1-2a$$

$$3a \geq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{2}$$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

5) 정답 ③

삼각형 ABC에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2 \times \overline{AO} \quad \rightarrow 5\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \times \overline{AO}$$

$\therefore \overline{AO} = 5$

한편 중심이 O′인 원의 넓이가 $\frac{64}{3}\pi$이므로 반지름의 길이는

$\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

$\therefore \overline{AO'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

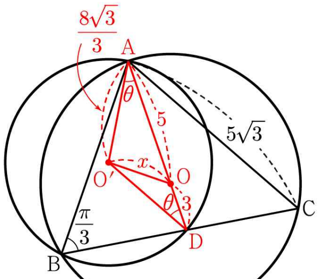
삼각형 ABD에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2 \times \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \overline{AD} = 8$

따라서 $\overline{OD} = 3$이다.

삼각형 O′AD는 $\overline{AO'} = \overline{DO'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$인 이등변삼각형이다.



$\angle O'AD = \angle O'DA = \theta$, $\overline{O'O} = x$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3^2 - x^2}{2 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times 3} = \frac{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 5^2 - x^2}{2 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times 5} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\frac{\frac{64}{3} + 9 - x^2}{3} = \frac{\frac{64}{3} + 25 - x^2}{5}$$

$$5 \times \frac{91}{3} - 5x^2 = 3 \times \frac{139}{3} - 3x^2$$

$$\frac{455 - 417}{3} = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{19}{3}$$

㉠에서 $\cos\theta = \dfrac{\frac{64}{3} + 9 - \frac{19}{3}}{16\sqrt{3}} = \dfrac{24\sqrt{3}}{48} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$

삼각형 AOO′의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하고 사인법칙을 적용하면

$$\sqrt{\frac{19}{3}} \times 2 = 2R$$

$\therefore R = \sqrt{\frac{19}{3}}$

따라서 삼각형 AOO′의 외접원의 넓이는 $\frac{19}{3}\pi$이다.

제2회 - B

1) 정답 ②

$\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 9$ 이고 $\lim\limits_{x\to1}(x-1) = 0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to1}(f(x)-5) = 0$, $f(x)$ 가 다항함수이므로

$f(1) = 5$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ 이므로

$f'(1) = 9$

$g(x) = x \cdot f(x)$ 에서 $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ 이므로

$g'(1) = f(1) + f'(1) = 5 + 9 = 14$

2) 정답 ③

$y=2^{x-2a}+a$의 그래프의 점근선은 $y=a$이다.

곡선 $y=\log_2 2x$와 직선 $y=a$의 교점 A를 구하자.

$\log_2 2x=a$

$2x=2^a$

$x=2^{a-1}$

$\mathrm{A}(2^{a-1},\ a)$

곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 직선 $y=a$의 교점 B를 구하자.

$\log_{\frac{1}{2}} x=a$

$x=2^{-a}$

$\mathrm{B}(2^{-a},\ a)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2^{a-1}-2^{-a}=\dfrac{1}{2}$이고 양변에 $\times 2$를 하면

$2^a-\dfrac{2}{2^a}-1=0$이고 양변에 $\times 2^a$를 하면

$(2^a)^2-2^a-2=0$

$(2^a+1)(2^a-2)=0$

$\therefore\ a=1$

3) 정답 1

$f'(x)=-x^2+2x+a$에서

직선 l의 방정식은 $y=f'(0)x-3=ax-3$이다.

직선 l의 x절편은 $\dfrac{3}{a}$이다.

직선 m의 방정식은 $y=f'(3)(x-3)+f(3)$에서

$f'(3)=a-3,\ f(3)=3a-3$이므로

$y=(a-3)(x-3)+3a-3$이다.

직선 m이 $\left(\dfrac{3}{a},\ 0\right)$을 지나므로

$0=(a-3)\left(\dfrac{3}{a}-3\right)+3a-3$

$=3-3a-\dfrac{9}{a}+9+3a-3$

$\dfrac{9}{a}=9$

$\therefore\ a=1$이다.

4) 정답 ③

$S_n=4+2a_{n+1}$에서

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$S_n=4+2(S_{n+1}-S_n)$

$2S_{n+1}=3S_n-4$

$S_{n+1}=\dfrac{3}{2}S_n-2$ …… ㉠

㉠의 양변의 n에 $n-1$을 대입하면

$S_n=\dfrac{3}{2}S_{n-1}-2\ (n\geq 2)$ …… ㉡

㉠-㉡

$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n\ (n\geq 2)$

양변에 $n=2$을 대입하면 $a_3=\dfrac{3}{2}a_2$에서 $a_3=3$이므로 $a_2=2$이다.

같은 방법으로 $a_4=\dfrac{9}{2}$

한편, $S_1=a_1$이므로 준식에 $n=1$을 대입하면

$S_1=4+2a_2=8$

$\therefore\ a_1=8$

$a_1\times a_4=8\times\dfrac{9}{2}=36$

이다.

5) 정답 ②

$(x-1)(x-2)g(x)=|f(x)|$에서 $f(1)=f(2)=0$이다.

$g(4)=0$이므로 $f(4)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)(x-a)$라 할 수 있다.

$g(x)=\dfrac{|(x-1)(x-2)(x-4)(x-a)|}{(x-1)(x-2)}$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2-}g(x)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 2+}g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{(x-2)|1\times(-2)\times(2-a)|}{(x-2)}$

$=|2a-4|$

$\lim\limits_{x\to 2-}g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{-(x-2)|1\times(-2)\times(2-a)|}{(x-2)}$

$=-|2a-4|$

$|2a-4|=-|2a-4|$에서 $a=2$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-4)$

$f(5)=4\times 9\times 1=36$

제2회 - 선택

6) 정답 ⑤

조건 (가), (나)에 의하여

(i) $f(1)=1,\ f(6)=1$일 때

조건 (나)에서

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=2$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1

(ii) $f(1)=1,\ f(6)=2$일 때

조건 (나)에서

$2\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq 4$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

(iii) $f(1)=1,\ f(6)=3$일 때

조건 (나)에서

$2\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq 6$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

(iv) $f(1)=1,\ f(6)=6$일 때

조건 (나)에서
$2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 12$
따라서 (iii)에서와 같은 방법으로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_{5}\mathrm{H}_{4} = {}_{8}\mathrm{C}_{4} = 70$
(v) $f(1)=2$, $f(6)=3$일 때
조건 (나)에서
$4 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$
따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_{2}\mathrm{H}_{4} = {}_{5}\mathrm{C}_{4} = 5$
이상에서 구하는 함수 f의 개수는
$1+15+35+70+5=126$

7) 정답 372
세 명의 학생 A, B, C에게 다른 종류의 그림카드 3장을 나눠주는 경우를 생각하자.
(가)조건에서 그림카드를 받지 못하는 학생이 존재하므로 $(3,0,0)$, $(2,1,0)$으로 나눠줄 수 있다.
(i) A, B, C에게 그림카드를 $(3,0,0)$으로 나눠주는 경우
그림카드를 나눠주는 경우의 수는 3가지이다.
같은 종류 볼펜 9자루를 각 학생이 적어도 한자루씩은 받고, 그림카드와 볼펜의 수의 합이 6이하가 되도록 분배해보자.
예를 들어 A가 받은 카드 수 3장, B가 받은 카드 수 0장, C가 받은 카드 수 0장이라고 하자.
A가 받는 볼펜 수를 a, B가 받는 볼펜 수를 b, C가 받는 볼펜 수를 c라 하면
$a+b+c=9\,(a \le 3,\ b \le 6,\ c \le 6)$
각 학생에게 한 개 씩의 볼펜을 먼저 주고 A, B, C가 받는 볼펜 수를 a', b', c'라 하면
$a'+b'+c'=6\ (a' \le 2,\ b' \le 5,\ c' \le 5)$
$a'=0$인 경우
$\to$ $b'+c'=6$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{6}$인데, $(b',c')=(6,0), (0,6)$인 경우를 제외해야 한다.
${}_{2}\mathrm{H}_{6}-2={}_{7}\mathrm{C}_{6}-2=5$
$a'=1$인 경우
$\to$ $b'+c'=5$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{5}={}_{6}\mathrm{C}_{5}=6$
$a'=2$인 경우
$\to$ $b'+c'=4$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{4}=5$
볼펜을 나눠주는 경우의 수는 $5+6+5=16$이다.
그림카드와 볼펜을 나눠주는 경우의 수는 $3\times16=48$이다.
(ii) A, B, C에게 그림카드를 $(2,1,0)$으로 나눠주는 경우
그림카드가 서로 다르므로 분할 ${}_{3}\mathrm{C}_{2}$ 후 A, B, C에게 분배하면 $3!$이다.
따라서 그림카드를 나눠주는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times 3! = 18$이다.
예를들어 A가 받은 카드 수 2장, B가 받은 카드 수 1장, C가 받은 카드 수 0장이라고 하자.
A가 받는 볼펜 수를 a, B가 받는 볼펜 수를 b, C가 받는 볼펜 수를 c라 하면
$a+b+c=9\,(a \le 4,\ b \le 5,\ c \le 6)$
각 학생에게 한 개 씩의 볼펜을 먼저 주고 A, B, C가 받는 볼펜 수를 a', b', c'라 하면
$a'+b'+c'=6\ (a' \le 3,\ b' \le 4,\ c' \le 5)$
$a'=0$인 경우
$\to$ $b'+c'=6$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{6}$인데, $(b',c')=(6,0), (5,1), (0,6)$인 경우를 제외해야 한다.
${}_{2}\mathrm{H}_{6}-3={}_{7}\mathrm{C}_{6}-3=4$
$a'=1$인 경우
$\to$ $b'+c'=5$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{5}$인데, $(b',c')=(5,0)$인 경우를 제외해야 한다.
${}_{2}\mathrm{H}_{5}-1={}_{6}\mathrm{C}_{5}-1=5$
$a'=2$인 경우
$\to$ $b'+c'=4$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{4}=5$
$a'=3$인 경우
$\to$ $b'+c'=3$이므로 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$
볼펜을 나눠 주는 경우의 수는 $4+5+5+4=18$이다.
그림카드와 볼펜을 나눠주는 경우의 수는 $18\times18=324$이다.
따라서 전체 경우의 수는 $48+324=372$이다.

8) 정답 13
$y=(x-|\cos\pi a|)^2+\cos\pi a+k\pi a$의 꼭짓점은 $(|\cos\pi a|, \cos\pi a+k\pi a)$이다.
따라서 $f(a)=|\cos\pi a|$, $g(a)=\cos\pi a+k\pi a$이다.
(가) 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$에서 함수 $h(a)$는
$h(a)=2f(a)+g(a)$이므로
$h(a)=2|\cos\pi a|+\cos\pi a+k\pi a$이다.
함수 $h(a)$를 절댓값 내부의 부호에 따라 구간을 나누어 정리하면

$$h(a)=\begin{cases} 3\cos\pi a+k\pi a & \left(-\frac{1}{2} \le a < \frac{1}{2}\right) \\ -\cos\pi a+k\pi a & \left(\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}\right) \end{cases} \cdots\cdots ㉠$$

이다.
또, (나) 실수 전체 범위에서 함수 $h(a)$는
$h\left(a+\frac{1}{2}\right)=h\left(a-\frac{1}{2}\right)+\cos\pi a+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)$인데,
a에 $a+\frac{1}{2}$를 대입하면

$$h(a+1)=h(a)+\cos\pi\left(a+\frac{1}{2}\right)+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$h(a+1)=h(a)+\cos\left(a\pi+\frac{\pi}{2}\right)+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$h(a+1)=h(a)-\sin a\pi+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots ㉡$$

또, a에 $a+1$을 대입하면

$$h(a+2)=h(a+1)-\sin\pi(a+1)+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$h(a+2)=h(a+1)-\sin(a\pi+\pi)+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$h(a+2)=h(a+1)+\sin a\pi+h\left(\frac{3}{2}\right)-h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

㉡을 대입하면

$$h(a+2)=h(a)-\sin a\pi+\sin a\pi+2h\left(\frac{3}{2}\right)-2h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$h(a+2)=h(a)+2h\left(\frac{3}{2}\right)-2h\left(-\frac{1}{2}\right)$이므로 함수 $h(a+2)$는 함수 $h(a)$를 y축으로 $2h\left(\frac{3}{2}\right)-2h\left(-\frac{1}{2}\right)$만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

㉠을 미분하면

$$h'(a)=\begin{cases}-3\pi\sin\pi a+k\pi & \left(-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}\right)\\ \pi\sin\pi a+k\pi & \left(\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

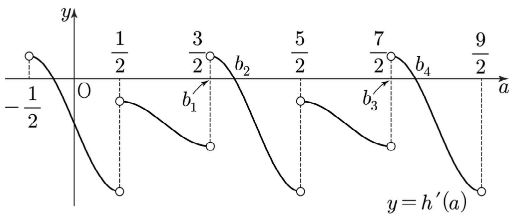
도함수 $h'(a)$의 구간 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$에서의 최댓값은 $(k+3)\pi$, 최솟값은 $(k-3)\pi$이고,

구간 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$에서의 최댓값은 $(k+1)\pi$, 최솟값은 $(k-1)\pi$이다.

$-3<k<3$의 실수 k의 범위를 도함수의 최대, 최소를 기준으로 구간을 좀 더 나누어 고려해 보면 아래와 같다.

(i) $-3<k<-1$

도함수 $h'(a)$를 그려보면 아래와 같다.



극값을 갖는 모든 양수 b를 작은수부터 b_1, b_2, b_3, b_4를 표현하면

$b_1=\frac{3}{2}$이므로 $b_4-b_1=\frac{7}{3}$이 되려면 $b_4=\frac{23}{6}$이 되고, 도함수 $h'(a)$는 주기함수이므로

$h'\left(\frac{23}{6}\right)=h'\left(\frac{11}{6}\right)=h'\left(-\frac{1}{6}\right)=0$이므로

$-3\pi\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)+k\pi=0$

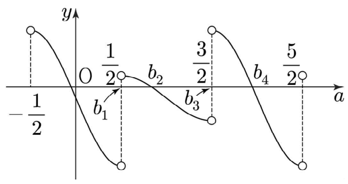
$3\pi\sin\frac{1}{6}\pi+k\pi=0$

$\frac{3}{2}+k=0$

$k=-\frac{3}{2}$이 가능하다.

(ii) $-1\le k<0$

도함수 $h'(a)$를 그려보면 아래와 같다.

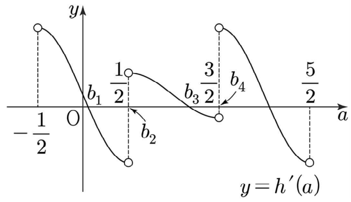


극값을 갖는 모든 양수 b를 작은 수부터 b_1, b_2, b_3, b_4를 표현하면

$b_4-b_1<2$이므로 조건을 만족할 수 없다.

(iii) $0\le k<1$

도함수 $h'(a)$를 그려보면 아래와 같다.

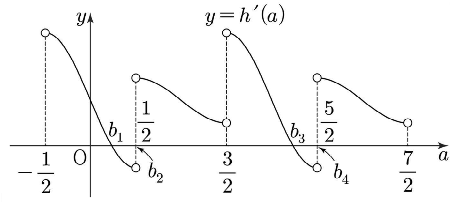


극값을 갖는 모든 양수 b를 작은 수부터 b_1, b_2, b_3, b_4를 표현하면

$b_4-b_1<2$이므로 조건을 만족할 수 없다.

(iv) $1\le k<3$

도함수 $h'(a)$를 그려보면 아래와 같다.



극값을 갖는 모든 양수 b를 작은 수부터 b_1, b_2, b_3, b_4를 표현하면

$b_4=\frac{5}{2}$가 되므로 $b_4-b_1=\frac{7}{3}$이 되려면 $b_1=\frac{1}{6}$이 된다.

따라서 $h'\left(\frac{1}{6}\right)=0$이므로 $-3\pi\sin\frac{\pi}{6}+k\pi=0$

$-\frac{3}{2}+k=0$

$k=\frac{3}{2}$이다.

따라서 가능한 k는 $\pm\frac{3}{2}$이므로 $k^2=\frac{9}{4}$가 된다.

따라서 $p+q$는 13이다.

기하

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

9) 정답 5

점 P_n을 $(t\,,\,4n^2t^2)$이라 하면 점 $(0\,,\,-1)$과 P_n을 연결한 직선의 기울기는 접점 P_n의 접선의 기울기와 같으므로

$\frac{4n^2t^2+1}{t}=8n^2t\,,\ 8n^2t^2=4n^2t^2+1\,,$

$\therefore\ t=\frac{1}{2n}$

그러므로 $P_n\left(\frac{1}{2n}\,,\,1\right)$이다.

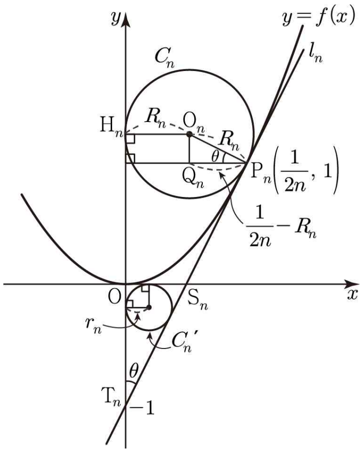
아래의 그림과 같이 직선 l_n의 기울기는 $4n$이므로

$\tan\theta=\frac{1}{4n}$이다.

원 C_n의 중심을 O_n이라고 할 때, $\angle O_nP_nQ_n=\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{P_nQ_n}}{\overline{O_nP_n}}=\frac{\frac{1}{2n}-R_n}{R_n}=\frac{4n}{\sqrt{16n^2+1}}$$

$$\therefore\ R_n=\frac{\sqrt{16n^2+1}}{2n\left(4n+\sqrt{16n^2+1}\right)}$$



그림과 같이 원 $C_n{}'$은 직각삼각형 OT_nS_n의 내접원이고,

$\overline{OT_n}=1$, $\overline{OS_n}=\frac{1}{4n}$, $\overline{S_nT_n}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{4n}\right)^2}=\frac{\sqrt{16n^2+1}}{4n}$ 이다.

삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c(c는 빗변)이라 할 때,

내접원의 반지름 $r_n=\frac{a+b-c}{2}$ 이므로

$$r_n=\frac{\frac{1}{4n}+1-\frac{\sqrt{16n^2+1}}{4n}}{2}=\frac{1+4n-\sqrt{16n^2+1}}{8n}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\{n(R_n-r_n)\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\{nR_n-nr_n\}=\lim_{n\to\infty}nR_n-\lim_{n\to\infty}nr_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ 40\times\lim_{n\to\infty}\{n(R_n-r_n)\}=5$$

<R_n을 구하는 다른 방법>

중심 O_n을 (R_n, b_n)이라 하면,

직선 O_nP_n의 기울기는 $-\frac{1}{4n}$이므로

$\frac{b_n-1}{R_n-\frac{1}{2n}}=-\frac{1}{4n}$ 이고 정리하면 $b_n-1=\frac{1}{4n}\left(\frac{1}{2n}-R_n\right)$………①

또한 선분 O_nP_n은 원의 반지름이므로

$\left(R_n-\frac{1}{2n}\right)^2+(b_n-1)^2=(R_n)^2$………②

①, ②에서 $\left(R_n-\frac{1}{2n}\right)^2+\frac{1}{16n^2}\left(\frac{1}{2n}-R_n\right)^2=(R_n)^2$ 이고

정리하면 $(R_n)^2-\left(16n+\frac{1}{n}\right)R_n+\frac{1+16n^2}{4n^2}=0$

$R_n=\frac{16n+\frac{1}{n}\pm\sqrt{\left(16n+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1+16n^2}{n^2}}}{2}$ 이고 $R_n<\frac{1}{2n}$이므로

$$R_n=8n+\frac{1}{2n}-2\sqrt{16n^2+1}$$

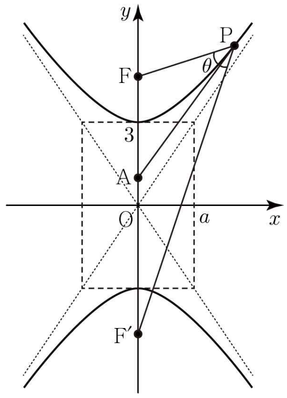
10) 정답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=-1$의 초점 $F(0,c)$, $F'(0,-c)$라 하자.(단, $c>0$)

$\triangle PFA$과 $\triangle PF'A$의 높이가 같으므로 밑변비가 넓이비와 같다.

$\triangle PFA:\triangle PF'A=\overline{PF}:\overline{PF'}$

$\overline{AF}:\overline{AF'}=\overline{PF}:\overline{PF'}=c-1:c+1$



$\overline{PF}=(c-1)k$, $\overline{PF'}=(c+1)k$ (단, k는 실수)

쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{PF'}-\overline{PF}=$ 주축길이 $=6$

$(c+1)k-(c-1)k=2k=6$

따라서 $k=3$이다.

$\overline{PF}=3c-3$, $\overline{PF'}=3c+3$, $FF'=2c$

$\angle FPF'=\theta$라 할 때 $\cos\theta=\frac{23}{27}$이므로

$$\frac{23}{27}=\frac{(3c-3)^2+(3c+3)^2-(2c)^2}{2(3c-3)(3c+3)}$$

$$\frac{23}{27}=\frac{9(c-1)^2+9(c+1)^2-4c^2}{18(c-1)(c+1)}$$

$$\frac{23}{3}=\frac{9(2c^2+2)-4c^2}{2c^2-2}$$

$46c^2-46=3(14c^2+18)$

$4c^2=100$

$c=5$이다.

따라서 초점 $c^2=a^2+9$이므로

$25=a^2+9$

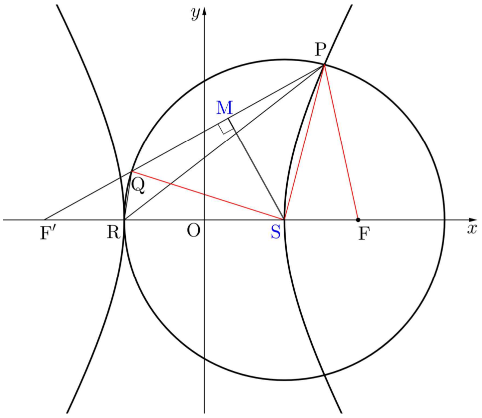
$a=4\ (a>0)$이고,

삼각형 FPF'의 둘레는

$3c+3+3c-3+2c=8c$이므로 40이다.

$a+\triangle FPF'$둘레 $=44$이다.

11) 정답 176



원의 반지름이 c이므로 $\overline{OF}=\overline{RS}$이고 $\overline{SF}=\overline{OS}=\overline{RO}$

$\overline{RS}=2k$라 하면 $\overline{F'S}=3k$, $\overline{PS}=2k$이고

$\overline{PF}=\overline{OF}$이므로

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF'}=\overline{PF}+\overline{RS}=4k$

삼각형 PF′S에서 $\angle PF'S=\theta$라 하면

코사인 법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{(4k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\times4k\times3k}$$

$$=\frac{21k^2}{24k^2}=\frac{7}{8}$$

$\overline{F'Q}=\frac{5}{2}$이므로 $\overline{PQ}=4k-\frac{5}{2}$

원의 중심 S에서 현 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{MQ}=\frac{1}{2}\left(4k-\frac{5}{2}\right)=2k-\frac{5}{4}$이고

$\overline{MF'}=\frac{5}{2}+2k-\frac{5}{4}=2k+\frac{5}{4}$

삼각형 MF′S에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{MF'}}{\overline{SF'}}=\frac{2k+\frac{5}{4}}{3k}=\frac{7}{8}\text{이므로}$$

$21k=16k+10$, $k=2$

$\overline{PF'}=8$, $\overline{F'R}=2$이고 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

삼각형 PQR의 넓이는 삼각형 PF′R에서 삼각형 QF′R을 뺀 것과 같으므로

$$S=\frac{1}{2}\times8\times2\times sin\theta-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times2\times sin\theta$$

$$=8\times\frac{\sqrt{15}}{8}-\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$=\frac{11\sqrt{15}}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=11$이므로 $pq=176$

제3회 - A

1) 정답 ③

등차수열 성질에서

S_5, $S_{10}-S_5$, $S_{15}-S_{10}$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서

$2(S_{10}-S_5)=S_5+S_{15}-S_{10}$

$2S_{10}-2S_5=-S_{10}$

$2S_5=3S_{10}$에서 $S_5=15$이다.

$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5\times2a_3}{2}=5a_3=15$에서 $a_3=3$이다.

[다른 풀이]

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$에서

$$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5\times2a_3}{2}=5a_3$$

$$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=\frac{15\times2a_8}{2}=15a_8$$

$S_5+S_{15}=0 \rightarrow 5a_3+15a_8=0 \rightarrow 20a_1+115d=0 \rightarrow 4a_1+23d=0$ …… ㉠

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(2a_1+9d)=10 \rightarrow 2a_1+9d=2$ …… ㉡

㉠$-2\times$㉡을 하면

$5d=-4$

$d=-\frac{4}{5}$

㉡에 대입하면 $2a_1-\frac{36}{5}=2 \rightarrow a_1=\frac{23}{5}$

$a_3=a_1+2d=\frac{23}{5}-\frac{8}{5}=3$

2) 정답 ④

$f(x)=x(x^2-1)$ $(-1\le x\le1)$, $f(x+2)=f(x)$에서

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)x(x-1) & (-1\le x\le1)\\(x-1)(x-2)(x-3) & (1\le x\le3)\\(x-3)(x-4)(x-5) & (3\le x\le5)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

이므로

$$f(4x)=\begin{cases}(4x+1)4x(4x-1) & (-1\le 4x\le1)\\(4x-1)(4x-2)(4x-3) & (1\le 4x\le3)\\(4x-3)(4x-4)(4x-5) & (3\le 4x\le5)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

$$=\begin{cases}64\left(x+\frac{1}{4}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right) & \left(-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}\right)\\64\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\right)\\64\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{4}\right) & \left(\frac{3}{4}\le x\le\frac{5}{4}\right)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

이므로 함수 $f(4x)$는 주기가 $\frac{1}{2}$인 함수이다.

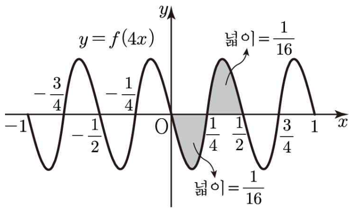
$$\int_0^{\frac{1}{4}}f(4x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}(64x^3-4x)dx$$

$=\left[16x^4-2x^2\right]_0^{\frac{1}{4}}$

$=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{8}=-\dfrac{1}{16}$

다음 그림과 같다.

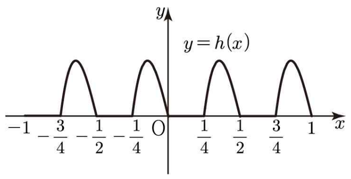


따라서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx=\frac{1}{4}$을 만족시키기 위해서는

$g(x)=\begin{cases}1\ (f(4x)\ \geq\ 0)\\ 0\ (f(4x)<0)\end{cases}$

즉, $h(x)=\begin{cases}f(4x)\ (f(4x)\geq\ 0)\\ 0\qquad (f(4x)<0)\end{cases}$

이다.



따라서 $h\left(-\dfrac{7}{8}\right)=0,\ h\left(\dfrac{7}{8}\right)=\left|f\left(\dfrac{1}{8}\right)\right|=\left|64\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{8}\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right|=\dfrac{3}{8}$

이므로 $h\left(-\dfrac{7}{8}\right)+h\left(\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{3}{8}$이다.

3) 정답 ④

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 $s_1(t),\ s_2(t)$라 하면

$s_1(t)=\displaystyle\int v_1(t)dt,\ s_2(t)=\int v_2(t)dt$이고 $s_1(0)=0,\ s_2(0)=0$이므로

$s_1(t)=2t^3-2t^2-14t,\ s_2(t)=t^3-t^2-8t$

이다.

두 점 P, Q가 만나는 시각은

$2t^3-2t^2-14t=t^3-t^2-8t$

$t^3-t^2-6t=0$

$t(t^2-t-6)=0$

$t(t-3)(t+2)=0$

에서 $t=3$이다.

따라서

$v_2(t)=3t^2-2t-8<0$

$(t-2)(3t+4)<0$

$-\dfrac{4}{3}<t<2$에서 $v_2(t)<0$이고 $t>0$에서 $v_2(t)>0$이므로

점 Q가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^3\left|v_2(t)\right|dt$

$=\displaystyle\int_0^2-v_2(t)dt+\int_2^3 v_2(t)dt$

$=\left[\ -s_2(t)\ \right]_0^2+\left[\ s_2(t)\ \right]_2^3$

$=-s_2(2)+s_2(0)+s_2(3)-s_2(2)$

$=s_2(3)-2s_2(2)$

$s_2(t)=t^3-t^2-8t$

$=(27-9-24)-2(8-4-16)$

$=-6+24=18$

4) 정답 ②

(가)에서 $a_7=a_1+6d=m$ (m은 정수)이다.

(나)에서 $\dfrac{14(2a_1+13d)}{2}=\dfrac{119}{5}$이므로

$2a_1+13d=\dfrac{17}{5}$

$(a_1+6d)+(a_1+6d)+d=\dfrac{17}{5}$

$2m+d=3+\dfrac{2}{5}$

m이 정수이고 d가 -1보다 큰 음수이므로

$m=2,\ d=-\dfrac{3}{5}$이다.

따라서 $a_1-\dfrac{18}{5}=2$에서 $a_1=\dfrac{28}{5}$이다.

5) 정답 41

준식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)\{f(1)-1\}=0\ \rightarrow\ f(1)=1$ 또는 $f(1)=0$ …… ㉠

준식의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f'(x)\{f(x)-1\}+f(x)f'(x)=2(x^2-1)f(x)-f'(x)$

$2f(x)f'(x)=2(x^2-1)f(x)$

$f(x)\{f'(x)-x^2+1\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(x)=x^2-1$

$f'(x)=x^2-1$에서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$이다.

따라서

$f(x)=\begin{cases}0\\ \dfrac{1}{3}x^3-x+C\end{cases}$

이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는

$f(0)\neq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$이거나

…… (i)

직선 $y=0$과 곡선 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$가 연결될 때, 곡선

$y=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$의 극점 중 하나가 0이어야 한다. 곡선

$y=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$의 극점은 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때다. …… (ii)

(i) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C$일 때,
$x=1$에서 극솟값이 1일 때, 즉 ㉠에서 $f(1)=1$일 때,
$\int_0^2 f(x)dx$의 값이 최대이다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C \rightarrow f(1)=\frac{1}{3}-1+C=1 \rightarrow \therefore\ C=\frac{5}{3}$

$M=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3-x+\frac{5}{3}\right)dx$이다.

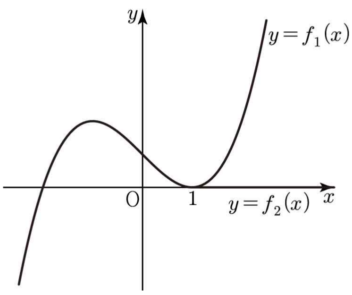
(ii)
① $x=-1$에서 극댓값이 0일 때,
극솟값이 음수이므로 $f(1)<0$라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C$만으로는 되지 않는다.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+C & (x<-1)\\ 0 & (x \geq -1)\end{cases}$$

이어야 한다. 그런데 $f(0)=0$으로 모순이다.
② $x=1$에서 극솟값이 0일 때,
㉠에서 $\frac{1}{3}-1+C=0$에서 $C=\frac{2}{3}$이고 그림과 같이 함수 $f(x)$는

$f_1(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ 또는 $f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3} & (x<1)\\ 0 & (x \geq 1)\end{cases}$ 이

가능하다.



이때, $\int_0^2 f(x)dx$의 최소는 $f(x)$가 $f_2(x)$일 때다.

$m=\int_0^2 f_2(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_1^2 0\,dx$

따라서

$$\begin{aligned}M-m&=\int_0^1 1dx+\int_1^2\left(\frac{1}{3}x^3-x+\frac{5}{3}\right)dx\\&=1+\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x\right]_1^2\\&=1+\frac{16-1}{12}-\frac{4-1}{2}+\frac{5(2-1)}{3}\\&=1+\frac{15}{12}-\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\\&=\frac{12+15-18+20}{12}=\frac{29}{12}\end{aligned}$$

$p=12,\ q=29$이므로 $p+q=41$이다.

제3회 - B

1) 정답 10
$a_1=\alpha$ 라 하자.

$\begin{cases}a_{2n}=3a_n+2^n\\ a_{2n+1}=2a_{n+1}-3^n\end{cases}$에서

$n=1$을 대입하면
$a_2=3a_1+2^1=3a+2$
$a_3=2a_2-3^1=2(3a+2)-3=6a+1$
$n=2$를 대입하면
$a_4=3a_2+2^2=3(3a+2)+4=9a+10$
$a_5=2a_3-3^2=2(6a+1)-9=12a-7$
$a_5=17$이므로 $12a-7=17$에서 $a=2$
따라서
$a_1+a_2=a+(3a+2)=4a+2=8+2=10$

2) 정답 ③
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2g(1)=-4$ 이므로
$a=f(1)=g(1)=-2\cdots$㉠
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+(x-1)f'(x)+2xg(x)+(x^2+1)g'(x)$
$=3x^2+2x-4$
위 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+2g(1)+2g'(1)=1$
㉠에서
$-2-4+2g'(1)=1$
따라서 $g'(1)=\frac{7}{2}$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 기울기는
$b=\frac{7}{2}$
$\therefore\ a+b=-2+\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

3) 정답 11
함수 $f(x)$의 최댓값은 a가 자연수이므로 $a+(-12+a)=2a-12$이다.
(가)에서 $2a-12 \leq 0$이고 $a \leq 6$이다.
$a<6$이면 최댓값이 음수이므로 모든 실수 x에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 해는 존재하지 않는다.
따라서 $a=6$
함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이고
$0 \leq x<\frac{2\pi}{b}$에서 방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=0$뿐
$0 \leq x<\frac{4\pi}{b}$에서 방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=0,\ x=\frac{2\pi}{b}$이다.
⋮
따라서 (나)에서 $0 \leq x<2\pi$에서 방정식 $f(x)=0$의 해의 개수가

5이기 위해서는 $\frac{8\pi}{b} < 2\pi \le \frac{10}{b}\pi$, $4 < b \le 5$이고 b가 자연수이므로 $b=5$이다.
그러므로 $a+b=11$

4) 정답 ②
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{\log_3 8+\log_3 5+a}{3}, \frac{3a-\log_2 8}{3}\right)$
$=\left(\frac{3\log_3 2+\log_3 5+a}{3}, a-\log_2 2\right)=\left(\frac{\log_3 5}{3}, 2b\right)$이다.
x좌표를 비교하면 $a=-3\log_3 2$
y좌표를 비교하면 $b=-2\log_3 2$
따라서 $3^{b-a}=3^{\log_3 2}=2$이다.

5) 정답 96
$xg(x)=(x^2-2)f(x)-2x^4+x^2+x$
의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g(1)=-f(1)$에서 $f(1)+g(1)=0$이다.
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{f(x-1)}$의 값이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는
$x\to1$일 때, (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이다.
따라서 $f(0)=0$이다. …… ㉠
$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=0$이므로 $g(x)$는 삼차 이하의 다항식이고
$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2g(x)}$의 값이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는
두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 이차함수이다.
따라서 $f(x)=2x^2+ax$ ($\because$ ㉠)라 하면
$xg(x)=(x^2-2)(2x^2+ax)-2x^4+x^2+x$
$=2x^4+ax^3-4x^2-2ax-2x^4+x^2+x$
$=ax^3-3x^2+(-2a+1)x$
$\therefore\ g(x)=ax^2-3x-2a+1$
$f(x)+g(x)=(2+a)x^2+(a-3)x-2a+1$
$=(x-1)\{(2+a)x+2a-1\}$
$f(x-1)=(x-1)(2x-2+a)$
이므로
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{f(x-1)}=\frac{3a+1}{a}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+\cdots}{ax^4+\cdots}=\frac{4}{a}$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{f(x-1)}\times\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2g(x)}=\frac{12a+4}{a^2}=7$
$7a^2-12a-4=0$
$(a-2)(7a+2)=0$
$a=2$ 또는 $a=-\frac{2}{7}$
$f(x)=2x^2+2x$ 또는 $f(x)=2x^2-\frac{2}{7}x$이다.
따라서 $f(7)=112$, $f(7)=96$이므로 $f(7)$의 최솟값은 96이다.

제3회 - 선택

6) 정답 ④
$f: X\to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 선택한 함수 f가 조건을 만족시키는 사건을 A, $f(6)$이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.
한편, 주어진 조건은 다음과 같다.
'$a\in X$, $b\in X$에 대하여
b가 a의 배수이면 $f(b)$는 $f(a)$의 배수이다.'
이때 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $f(1)=6$인 경우
2, 3, 6 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$ 모두 $f(1)$인 6의 배수이어야 한다. 6의 배수인 X의 원소는 6뿐이므로
$f(1)=f(2)=f(3)=f(6)=6$
이어야 한다.
이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고,
$f(6)$가 짝수인 함수 f의 개수는 1이다.
(ii) $f(1)=3$인 경우
2, 3, 6 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$ 모두 $f(1)$인 3의 배수이어야 한다. 3의 배수인 X의 원소는 3,6이므로
$f(6)=6$일 때는 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 3또는 6이 가능하므로
$2\times2=4$개다.
$f(6)=3$일 때는 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 3이어야 한다.
이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고,
모든 함수의 개수는 5개이고
$f(6)$가 짝수인 함수 f의 개수는 4개이다.
(iii) $f(1)=2$인 경우
6은 1의 배수이므로 $f(6)$는 $f(1)$인 2의 배수이어야 한다.
2의 배수인 X의 원소는 2, 6이므로
$f(6)=2$ 또는 $f(6)=6$
$f(6)=6$일 때는 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 2또는 6이 가능하므로
$2\times2=4$개이다
$f(6)=2$일 때는 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 2이어야 한다.
이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고,
모든 함수의 개수는 5개이고
$f(6)$가 짝수인 함수 f의 개수는 5개이다
(iv) $f(1)=1$인 경우
$f(6)$은 1,2,3,6이 모두 가능하다.
$f(6)=1$인 경우 $f(2)=f(3)=1$ 로 1가지이다.
$f(6)=2$인 경우 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 1, 2가 가능하므로
$2\times2=4$개다.
$f(6)=3$인 경우 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 1, 3이 가능하므로
$2\times2=4$개다.
$f(6)=6$인 경우 $f(2)$와 $f(3)$ 모두 1, 2, 3, 6이 가능하므로
$4\times4=16$개이다
조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$1+4+4+16=25$
이고, $f(6)$이 짝수인 함수 f의 개수는
$4+16=20$

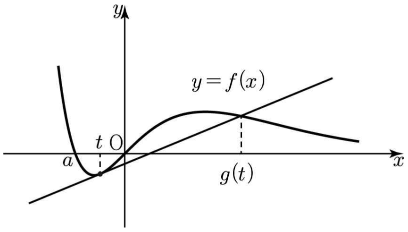
이다.
(i)~(iv)에서
$n(A)=1+5+5+25=36$
$n(A\cap B)=1+4+5+20=30$
이므로
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}$

7) 정답 36
1) $a=1$, $b=3$인 경우 ($f(1)=3$, $f(3)=1$인 경우)
$f(2)$의 선택은 3가지, $f(4)$, $f(5)$는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$가지 이므로 18가지 ……①
2) $a=2$, $b=4$인 경우 ($f(2)=4$, $f(4)=2$인 경우)
$f(1)$의 선택은 4가지, $f(3)$의 선택은 1가지, $f(5)$의 선택은 3가지 이므로 12가지……②
3) $f(1)=3$, $f(3)=1$이고 $f(2)=4$, $f(4)=2$인 경우
$f(5)$의 선택은 3가지……③
4) $a=2$, $b=3$인 경우 ($f(2)=3$, $f(3)=2$인 경우)
$f(1)$의 선택은 3가지, $f(3)$의 선택은 1가지, $f(4)$, $f(5)$는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$가지 이므로 9가지……④

그러므로 가능한 총 가짓수는 ①+②−③+④ 이므로 36가지다.

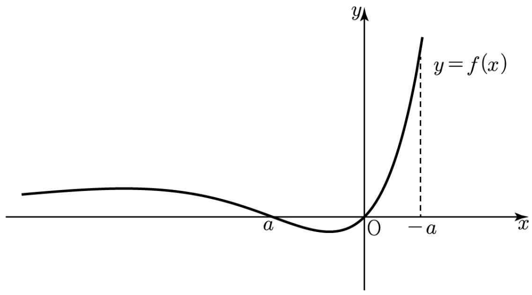
8) 정답 ⑤
방정식 $f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$의 실근은
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선인 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표이다.
함수 $g(t)$를 파악하기 위해서 함수 $f(x)$의 개형을 알아야 하고, 두 상수 a, b에 따라서 함수 $f(x)$의 개형이 결정된다.
$b=0$이면 $f(x)$는 이차함수이므로 방정식의 실근의 개수가 2인 t가 존재하지 않는다.
$b\neq0$, $a=0$이면 조건 (나)에서 $g(0)=0$ 즉, $t=a=0$일 때 방정식의 실근의 개수가 1이므로 모순이다.
따라서 $a\neq0$, $b\neq0$이다.

(i) $a<0$, $b<0$일 때,
$f(0)=0$, $f(a)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$에서 함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

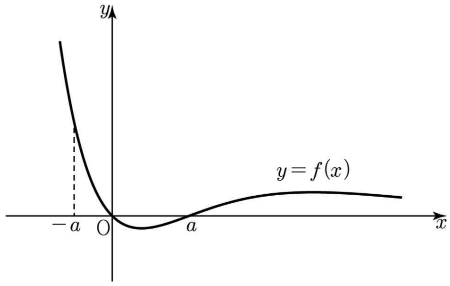


함수 $g(t)$의 최댓값이 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$, $b>0$일 때,
$f(0)=0$, $f(a)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$에서 함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

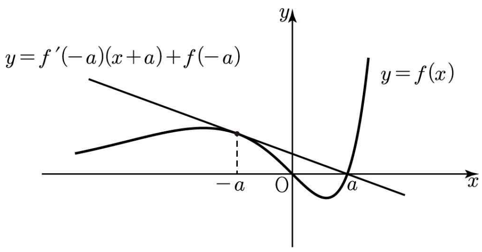


$g(-a)$의 값이 존재하지 않는다.
(iii) $a>0$, $b<0$일 때,
$f(0)=0$, $f(a)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$에서 함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

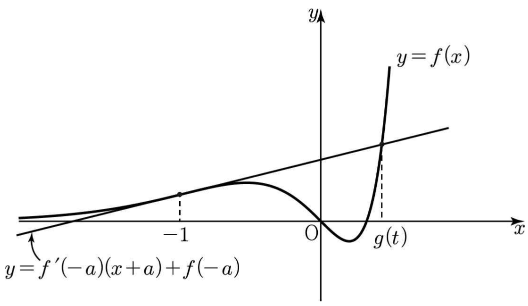


$g(-a)$의 값이 존재하지 않는다.

(iv) $a>0$, $b>0$일 때,
$f(0)=0$, $f(a)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$에서 곡선 $y=f(x)$와 조건 (나)를 만족시키는 직선 $y=f'(-a)(x+a)+f(-a)$의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=f'(-a)(x+a)+f(-a)$의 x절편이 a이므로
$2af'(-a)+f(-a)=0$이다.
$f(x)=(x^2-ax)e^{bx}\ \Rightarrow\ f'(x)=\{bx^2+(2-ab)x-a\}e^{bx}$
$\Rightarrow\ f(-a)=2a^2e^{-ab}$, $f'(-a)=(2a^2b-3a)e^{-ab}$
$2af'(-a)+f(-a)=0\ \Rightarrow\ (4a^3b-4a^2)e^{-ab}=0$
$\Rightarrow\ ab=1$
조건 (가)를 만족시키는 곡선 $y=f(x)$와
직선 $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$의 개형은 다음과 같다.



따라서 점 $(-1, f(-1))$이 함수 $f(x)$의 변곡점이다.
$ab=1$ 이고, $f''(-1)=0$ 이므로

$$f''(x)=\{b^2x^2+(4b-ab^2)x+2-2ab\}e^{bx}$$
$$=(b^2x^2+3bx)e^{bx}$$
$$\Rightarrow f''(-1)=(b^2-3b)e^{-b}=0$$
$$\Rightarrow b>0 \text{ 이므로 } b=3,\ a=\frac{1}{3}$$

$f'(x)=\left(3x^2+x-\frac{1}{3}\right)e^{3x}$ 이므로 $f'(1)=\frac{11}{3}e^3$ 이다.

9) 정답 4
먼저 $h(x)$를 구해보면

$$h(x)=\begin{cases} x-3 & (0<x<m) \\ f(x) & (m \le x) \end{cases}$$

이고 조건(가)에서 미분 가능하므로 함수$f(x)$는 $x=m$에서 $y=x-3$과 접하면서 만나야 한다. 따라서 $m \le x$에서 $f(x)=(x-m)^2(x-q)+x-3$ 라 할 수 있다. 이제 조건(나)에 따라 $h(p)h(p+1)=0$ 되는 경우를 찾아보면,
$0<x<m$에서는 $p=2, p=3$일 때 성립하고, 나머지 3개의 p가 $m \le x$에서 존재해야 한다.
$m>4$이고 $f(m)>0$ 이므로 자연수 k에 대하여 $f(m+k)=f(m+k+1)=0$을 만족해야 나머지 3개의 p가 $p=m+k-1$, $p=m+k$, $p=m+k+1$ 로 존재하게 된다. 그렇지 않은 경우는 조건 (나)를 만족하지 않는다.
그런데 $h(m+4)\ge 0$ 이므로 $k=1,2,3$이 가능하고 각 경우에 대하여 생각해보면
첫째, $k=1$인 경우 $f(m+1)=f(m+2)=0$이므로
$(m+1-q)+m+1-3=0$, $4(m+2-q)+m+2-3=0$ 을
연립하면 $m=\frac{11}{3}$로 자연수가 아니다.
둘째, $k=2$인 경우 $f(m+2)=f(m+3)=0$이므로
$4(m+2-q)+m+2-3=0$, $9(m+3-q)+m+3-3=0$ 을
연립하면 $m=9$로 성립한다.
셋째, $k=3$인 경우 $f(m+3)=f(m+4)=0$이므로
$9(m+3-q)+m+3-3=0$, $16(m+4-q)+m+4-3=0$ 을
연립하면 $m=\frac{153}{7}$로 자연수가 아니다.
따라서 조건들에 맞는 경우는 $m=9$, $q=13$이고
$h(x)=f(x)=(x-9)^2(x-13)+x-3$이므로 $h(10)=4$이다.

10) 정답 69
양수 t에 대하여 원 $(x-3t)^2+(y-4t)^2=20t^2$은 중심의 좌표가 $(3t, 4t)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}t$이므로 중심을 C라 하면
$C(3t, 4t)$, $\overline{CP}=2\sqrt{5}t$

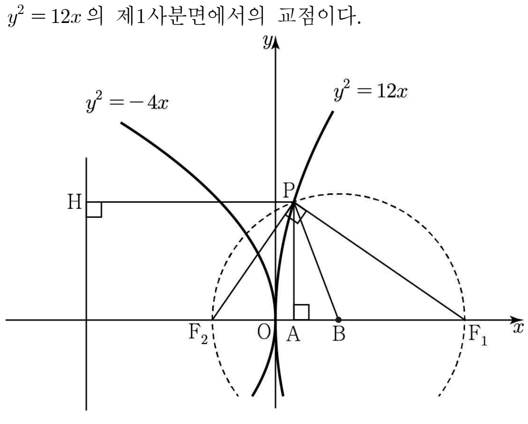
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$$
$$=(-2, -4)\cdot(3t, 4t)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$$
$$=-22t+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CP}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{CP}|=2\sqrt{5}t$
이므로

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{CP}|\cos\theta$$
$$=2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}\,t\times\cos\theta$$
$$=20t\cos\theta$$
$$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=-22t+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$$
$$=-22t+20t\cos\theta$$
$$\therefore\ -42t\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le -2t\ (\because -1\le\cos\theta\le 1)$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값은 $-2t$, 최솟값은 $-42t$이므로 곱은 $84t^2=84$
양수 t의 값은 1이다.
따라서 $C(3, 4)$, $\overline{CP}=2\sqrt{5}$
그러므로 $|\overrightarrow{AP}|$의 최댓값은 두 점 $A(-2, -4)$와 $C(3, 4)$사이의 거리와 $\overline{CP}$의 합이고 최솟값은 두 점 $A(-2, -4)$와 $C(3, 4)$사이의 거리와 $\overline{CP}$의 차이다.
$\overline{AC}=\sqrt{(-5)^2+(-8)^2}=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}$
이므로
$|\overrightarrow{AP}|$의 최댓값$=\sqrt{89}+2\sqrt{5}$
$|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값$=\sqrt{89}-2\sqrt{5}$
따라서
$(\sqrt{89}+2\sqrt{5})(\sqrt{89}-2\sqrt{5})=89-20=69$

11) 정답 24
포물선 $y^2=12x$ 의 초점 $F_1(3,\ 0)$
포물선 $y^2=-4x$ 의 초점 $F_2(-1,\ 0)$
선분 F_1F_2의 중점은 $B(1,\ 0)$이다. $\overline{F_1F_2}=4$ 이므로
점P는 $B(1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름이 2인 원과 포물선 $y^2=12x$ 의 제1사분면에서의 교점이다.



점P에서 $y^2=12x$ 의 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하자
점P의 x좌표를 a라 하면 $\overline{PF_1}=\overline{PH}=a+3$이다.

$\overline{PF_1}^2 - \overline{AF_1}^2 = \overline{PB}^2 - \overline{AB}^2$ 이므로

$(a+3)^2 - (3-a)^2 = 2^2 - (1-a)^2$

$12a = -a^2 + 2a + 3$

$a^2 + 10a - 3 = 0$

$a = -5 \pm \sqrt{28}$ 이고 $0 < a < 1$ 이므로 $a = -5 + 2\sqrt{7}$

따라서 $\overline{PF_1} = a + 3 = 2\sqrt{7} - 2$

이때, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 이므로

$(\overline{PF_2})^2 = (\overline{F_1F_2})^2 - (\overline{PF_1})^2$

$= 4^2 - (2\sqrt{7} - 2)^2$

$= 16 - (32 - 8\sqrt{7})$

$= 8\sqrt{7} - 16$

$\therefore\ p + q = 8 + 16 = 24$

제4회 - A

1) 정답 ④

$\{a_n\}$의 공차를 $d(d \neq 0)$라 하자.

$a_{p-1} = 0$ 이면 $a_{p+1} = 0$ 으로 $d = 0$ 이 되어 모순이다.

$a_{p+1} = -|a_{p-1}| < 0$

따라서 $a_{p-1} > 0$, $a_{p+1} < 0$ 이므로 $d < 0$이다.

$|a_{p-1}| + a_{p+1} = 0 \rightarrow a_{p-1} + a_{p+1} = 2a_p = 0$

$\therefore\ a_p = 0$

$a_p = a_1 + (p-1)d = 0$ 에서 $a_1 = (1-p)d$

$\sum_{k=1}^{p-2} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{p-2} \frac{1}{a_{k+1} - a_k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{p-2}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{p-1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{(1-p)d} - \frac{1}{-d}\right)$

$= \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{1-p} + 1\right)$

$= \frac{2-p}{d^2(1-p)} = \frac{2-p}{4(1-p)}$

$\therefore\ d^2 = 4,\ d = -2$

$a_{p-3} + a_{p+1} = 2a_{p-1} = 2(-d) = 4$

2) 정답 21

조건 (가)에서 $x \leq 1$에서 사차함수 $f(x)$는 $x = 1$일 때 최소이다. …… ㉠

$x > 0$일 때 $g(x) \geq 0$이므로 $x > 1$일 때, $g(x-1) \geq 0$이므로 조건 (나)에서 $x > 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 사차함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극솟값을 가진다.

$\therefore\ f'(1) = 0$

또한 $f'(x) = g(x-1)|f(x) - f(4)|$의 양변에 $x = 4$를 대입하면

$f'(4) = 0$이고 ㉡에 의해

$f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$이다.

따라서

$f'(x) = g(x-1)|f(x) - f(4)|$의 양변에 $x = 5$을 대입하면

$f'(5) = g(4)|f(5) - f(4)|$이다.

$f'(5) = 4 \times 4 \times 1^2 = 16$

$f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2 \rightarrow f'(x+4) = 4(x+3)x^2 = 4x^3 + 12x^2$이므로

$f(x+4) = x^4 + 4x^3 + C$이다.

$x = 1$을 대입하면 $f(5) = 5 + C$

$x = 0$을 대입하면 $f(4) = C$

따라서

$16 = g(4)|(5 + C) - C|$

$\therefore\ g(4) = \frac{16}{5}$이다.

$p = 5,\ q = 16$이므로 $p + q = 21$이다.

3) 정답 ④

세 점 O, A, B가 직선 $y = 2x$위에 있고 $\overline{OB} = 2\sqrt{5}$이므로 점 B의 좌표는 $(2, 4)$이다.

따라서 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$는 점 A의 x좌표를 $a(0 < a < 2)$라 하면

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 2x$가 $x = 2$에서 접하므로

$f(x) - 2x = -x(x-a)(x-2)^2$라 할 수 있다.

$S_1 = S_2$에서 $\int_0^2 \{f(x) - 2x\}dx = 0$이므로

$\int_0^2 -x(x-a)(x-2)^2 dx = 0$이다.

그러므로

$\int_0^2 x(x-a)(x-2)^2 dx$

$= \int_0^2 (x^2 - ax)(x^2 - 4x + 4)dx$

$= \int_0^2 \{x^4 - (a+4)x^3 + (4a+4)x^2 - 4ax\}dx$

$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a+4}{4}x^4 + \frac{4a+4}{3}x^3 - 2ax^2\right]_0^2$

$= \frac{32}{5} - 4a - 16 + \frac{32a+32}{3} - 8a$

$= -\frac{4a}{3} + \frac{16}{15} = 0$

$\frac{4a}{3} = \frac{16}{15}$

$\therefore\ a = \frac{4}{5}$

따라서 $f(x) = -x\left(x - \frac{4}{5}\right)(x-2)^2 + 2x$이다.

그러므로 $f(1) = -1 \times \frac{1}{5} \times 1 + 2 = \frac{9}{5}$

4) 정답 ④

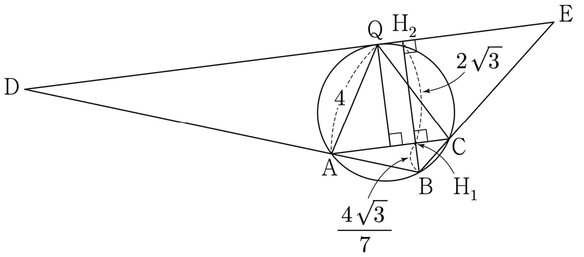
사각형 ABCP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 PAC의 넓이의 합이다. 삼각형 ABC의 넓이는 고정값인 상수이고 삼각형

PAC의 넓이는 점 P의 위치에 따라 값이 변한다. 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되기 위해서는 선분 AC의 수직이등분선과 원 O가 만나는 위치에 점 P가 위치할 때고 이 때 점 P=Q이다.
원 O에서 현 AC의 수직이등분선은 원 O의 중심을 지나므로 $\overline{QA}=\overline{QC}=4$이다.

사각형 ABCQ는 원에 내접하므로 $\angle AQC=\pi-\angle ABC=\frac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 QAC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$\therefore\ \overline{AC}=4$



$\overline{AB}=2x$, $\overline{BC}=x$라 하고 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$16=4x^2+x^2-2\times 2x\times x\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$16=5x^2+2x^2$

$\therefore\ x^2=\frac{16}{7}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2x\times x\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{8\sqrt{3}}{7}$이다.

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH_1}=\frac{8\sqrt{3}}{7}$

$\overline{BH_1}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

정삼각형 QAC의 높이가 $2\sqrt{3}$이므로 점 B에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H_2라 하면 $\overline{BH_2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}+2\sqrt{3}=\frac{18}{7}\sqrt{3}$이다.

선분 AC와 선분 DE는 평행하므로 $\triangle BAC\backsim\triangle BDE$이다.
따라서 삼각형 BAC와 삼각형 BDE의 닮음비는

$\overline{BH_1}:\overline{BH_2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}:\frac{18\sqrt{3}}{7}=2:9$

그러므로 삼각형 BAC의 넓이가 $\frac{8\sqrt{3}}{7}$이므로

삼각형 BDE의 넓이는 $\frac{81}{4}\times\frac{8\sqrt{3}}{7}=\frac{162\sqrt{3}}{7}$이다.

5) 정답 ③

$a_5=24$이므로

준식에 $n=4$를 대입하면

$$24=\begin{cases}2a_4 & (a_4>4)\\ 9+2a_4 & (a_4\le 4)\end{cases}=\begin{cases}12 & (12>4\Rightarrow O)\\ \frac{15}{2} & \left(\frac{15}{2}\le 4\Rightarrow X\right)\end{cases}$$

$\therefore\ a_4=12$

같은 방법으로

a_1	a_2	a_3	a_4
$\frac{3}{2}$			
	3 $(3>2)$		
$\frac{3}{2}$, $2a_1=3$ $\left(\frac{3}{2}\le 1\right)(X)$			
		6 $(6>3)$	
$\frac{3}{4}$, $\left(\frac{3}{4}>1\right)$ (X)			
	$\frac{3}{2}$, $3+2a_2=6$ $\left(\frac{3}{2}\le 2\right)$		
$\frac{3}{4}$, $2a_1=\frac{3}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\le 1\right)$			
			12
	$\frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}>2\right)$ (X)		
		3, $6+2a_3=12$ $(3\le 3)$	
0 (X)			
	0, $3+2a_2=3$ $(0\le 2)$		
0, $2a_2=0$			

따라서 모든 a_1의 합은 $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+0=\frac{9}{4}$이다.

$S=\frac{9}{4}$, $m=3$이므로 $S+m=\frac{21}{4}$

제4회 - B

1) 정답 ④

$f(x)=x^3-2x$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (a, a^3-2a) 라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-2=1,\quad a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,1)$, $(1,-1)$ 이므로 접선의 방정식은

$y-1=x+1$에서 $x-y+2=0$ …… ㉠

$y+1=x-1$에서 $x-y-2=0$ …… ㉡

두 직선 사이의 거리는 직선 ㉠ 위의 점 $(0,2)$와 직선 ㉡사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

$l=2\sqrt{2}$

따라서 $l^2=8$

2) 정답 15

$\sum_{n=1}^{9}(a_n+1)^2=84$, $\sum_{n=1}^{9}(a_n-2)^2=21$에서

$$\begin{aligned}63&=\sum_{n=1}^{9}\left\{(a_n+1)^2-(a_n-2)^2\right\}\\&=\sum_{n=1}^{9}(6a_n-3)\\&=6\sum_{n=1}^{9}a_n-27\end{aligned}$$

이므로 $6\sum_{n=1}^{9}a_n=90$

따라서 $\sum_{n=1}^{9}a_n=15$

3) 정답 1

$f'(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ 에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$

$F'(x)=f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt&=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\\&=F'(1)\\&=f(1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

에서 $f(1)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+C=\frac{1}{2}$

$\therefore\ C=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}$이고

구하는 값은

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\int_x^0 f(t)dt\\&=-\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\int_0^x f(t)dt=-3\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}\\&=-3F'(0)=-3f(0)\\&=(-3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1\end{aligned}$$

4) 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{7}|a_k|\neq\sum_{k=1}^{7}a_k$이므로 $a_1>0$, $d<0$ 또는 $a_1<0$, $d>0$인 경우가 될 수 있다.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_n	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

에서 $\sum_{k=1}^{7}a_k=21-7d$

(i) $a_1>0$, $d<0$에서

a_7부터 음수항이면 즉,$-3\le d<-\frac{3}{2}$이면

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_n	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\|a_n\|$	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$-3-2d$

에서 $\sum_{k=1}^{7}|a_k|=15-11d$이다.

$\sum_{k=1}^{7}|a_k|=\sum_{k=1}^{7}a_k+36$에서 $15-11d=21-7d+36$

$-4d=42$

$\therefore\ d=-\frac{21}{2}$ (모순)

(ii) $a_1>0$, $d<0$에서

a_6부터 음수항이면 즉, $d<-3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_n	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\|a_n\|$	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$-3-d$	$-3-2d$

에서 $\sum_{k=1}^{7}|a_k|=9-13d$이다.

$\sum_{k=1}^{7}|a_k|=\sum_{k=1}^{7}a_k+36$에서 $9-13d=21-7d+36$

$-6d=48$

$\therefore\ d=-8$

따라서 $a_1=35$

(iii) $a_1<0$, $d>0$일 때,

a_5부터 양수항이면 즉, $d\ge3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_n	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\|a_n\|$	$-3+4d$	$-3+3d$	$-3+2d$	$-3+d$	3	$3+d$	$3+2d$

에서 $\sum_{k=1}^{7}|a_k|=-3+13d$이다.

$\sum_{k=1}^{7}|a_k|=\sum_{k=1}^{7}a_k+36$에서 $-3+13d=21-7d+36$

$20d=60$

$\therefore\ d=3$

따라서 $a_1=-9$

(iv) $a_1<0$, $d>0$일 때,

a_4부터 양수항이면 즉, $\frac{3}{2}\le d<3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_n	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\lvert a_n\rvert$	$-3+4d$	$-3+3d$	$-3+2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

에서 $\sum_{k=1}^{7}|a_k|=3+11d$이다.

$\sum_{k=1}^{7}|a_k|=\sum_{k=1}^{7}a_k+36$에서 $3+11d=21-7d+36$

$18d=54$

$\therefore\ d=3$ (모순)

(v) $a_1<0$, $d>0$일 때,

a_3부터 양수항이면 즉, $1\le d<\frac{3}{2}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_n	$3-4d$	$3-3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\lvert a_n\rvert$	$-3+4d$	$-3+3d$	$3-2d$	$3-d$	3	$3+d$	$3+2d$

에서 $\sum_{k=1}^{7}|a_k|=9+7d$이다.

$\sum_{k=1}^{7}|a_k|=\sum_{k=1}^{7}a_k+36$에서 $9+7d=21-7d+36$

$14d=48$

$\therefore\ d=\frac{24}{7}$ (모순)

마찬가지로 a_2항부터 양수항일 때도 모순이다.

(i)~(v)에서 가능한 a_1의 값은 $a_1=35$, $a_1=-9$이다.

따라서 a_1의 합은 26이다.

5) 정답 ②

점 P의 $t=2$에서의 위치는

$$\int_0^2\left(2t-\frac{3}{2}\right)dt=\left[t^2-\frac{3}{2}t\right]_0^2=1$$

이다.

$v_2(t)=t^2-at=t(t-a)=0$에서 $v_2(t)=0$인 t의 값은 $t=a$이다.

(i) $a\le 0$일 때,

점 Q가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2|t^2-at|dt$

$=\int_0^2(t^2-at)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}-2a=1$

$\therefore\ a=\frac{5}{6}$ (모순)

(ii) $a\ge 2$일 때,

점 Q가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2|t^2-at|dt$

$=\int_0^2(-t^2+at)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$

$=-\frac{8}{3}+2a=1$

$\therefore\ a=\frac{11}{6}$ (모순)

(iii) $0<a<2$일 때,

점 Q가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2|t^2-at|dt$

$=\int_0^a(-t^2+at)dt+\int_a^2(t^2-at)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_a^2$

$=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}+\frac{8}{3}-2a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}$

$=\frac{a^3}{3}-2a+\frac{8}{3}=1$

$a^3-6a+5=0$

$(a-1)(a^2+a-5)=0$

$a=1$ 또는 $a=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 a의 값은 1 또는 $a=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$이다.

가능한 모든 a의 값의 합은 $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$이다.

제4회 - 선택

6) 정답 21

(가)에서 $f(2)\le f(1)\le f(0)\le f(-1)\le f(-2)$

(나)에서

$x=-2$일 때, $f(-2)-2\in X$이므로 $f(-2)=2,\ 1,\ 0$이 가능하다.

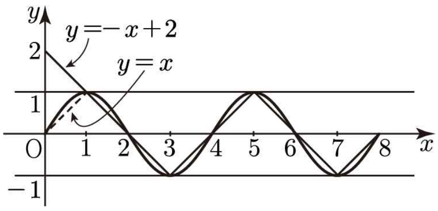
$x=-1$일 때, $f(-1)-1\in X$이므로 $f(-1)=2,\ 1,\ 0,\ -1$이 가능하다.

$x=0$일 때, $f(0)\in X$이므로 $f(0)=2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$로 모두

가능하다.
$x=1$일 때, $f(1)-1\in X$이므로 $f(1)=2,1,0,-1$이 가능하다.
$x=2$일 때, $f(2)-2\in X$이므로 $f(2)=2,1,0$이 가능하다.
(i) $f(-2)=2$, $f(2)=0$일 때,
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$은 2, 1, 0을 중복을 허용해서 선택하는 경우의 수와 같다.
$\rightarrow$ ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$
(ii) $f(-2)=2$, $f(2)=1$일 때,
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$은 2, 1을 중복을 허용해서 선택하는 경우의 수와 같다.
$\rightarrow$ ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$
(iii) $f(-2)=2$, $f(2)=2$일 때,
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$은 2을 중복을 허용해서 선택하는 경우의 수와 같다.
$\rightarrow$ ${}_1\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$
(iv) $f(-2)=1$, $f(2)=0$일 때,
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$은 1, 0을 중복을 허용해서 선택하는 경우의 수와 같다.
$\rightarrow$ ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$
(v) $f(-2)=1$, $f(2)=1$일 때,
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$은 1을 중복을 허용해서 선택하는 경우의 수와 같다.
$\rightarrow$ ${}_1\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$
(vi) $f(-2)=0$, $f(2)=0$일 때,
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$은 0을 중복을 허용해서 선택하는 경우의 수와 같다.
$\rightarrow$ ${}_1\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$
(i)~(vi)에서 모든 경우의 수는
$10+4+1+4+1+1=21$이다.

7) 정답 128
조건 (나)에서 $a+b+c$는 3의 배수이므로
(i) $a+b+c=3$인 경우
(1, 1, 1)이므로 1가지
$d+e=10$이므로 $d'=d+1$, $e'=e+1$라 하자.
$d'+e'=8$(d', e'는 음이 아닌 정수)이므로 ${}_2\mathrm{H}_8={}_9\mathrm{C}_1=9$
조건 (다)에 의해 2의 배수의 개수는 2이상이어야 하므로
d, e가 모두 2의 배수가 아닌 경우를 구하면
$d''=2d+1$, $e''=2e+1$라 하자.
$d''+e''=4$(d'', e''는 음이 아닌 정수)이므로 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$
따라서 $1\times(9-5)=4$가지이다.
(ii) $a+b+c=6$인 경우
(1, 1, 4)이면 $\dfrac{3!}{2}=3$가지
(1, 2, 3)이면 $3!=6$가지
(2, 2, 2)이면 1가지
$d+e=7$이므로 $d'=d+1$, $e'=e+1$라 하자.
$d'+e'=5$(d', e'는 음이 아닌 정수)이므로 ${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$
a, b, c중 적어도 하나는 2의 배수이고 또한 d, e중 적어도 하나는 2의 배수이므로 조건 (다)를 항상 만족시킨다.
따라서 $6\times(3+6+1)=60$가지
(iii) $a+b+c=9$인 경우
(1, 1, 7)이면 $\dfrac{3!}{2}=3$가지
(1, 2, 6)이면 $3!=6$가지
(1, 3, 5)이면 $3!=6$가지
(1, 4, 4)이면 $\dfrac{3!}{2}=3$가지
(2, 2, 5)이면 $\dfrac{3!}{2}=3$가지
(2, 3, 4)이면 $3!=6$가지
(3, 3, 3)이면 1가지
$d+e=4$이므로 $d'=d+1$, $e'=e+1$라 하자.
$d'+e'=2$(d', e'는 음이 아닌 정수)이므로 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$
조건 (다)에 의해 2의 배수의 개수는 2이상이어야 하므로
a, b, c가 모두 홀수 즉, (1, 1, 7), (1, 3, 5), (3, 3, 3)일 때에는 d, e가 모두 2의 배수여야 한다.
d, e가 모두 2의 배수가 아닌 경우를 구하면
$d''=2d+1$, $e''=2e+1$라 하자.
$d''+e''=1$(d'', e''는 음이 아닌 정수)이므로 ${}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$
따라서 $(3\times28)-(2\times10)=64$가지이다.
(i), (ii), (iii)에서 구하는 값은 $4+60+64=128$

8) 정답 28
(가)에서 함수 $g(x)$는 임의의 정수이고
$f(x)=x+g(x)$ 또는 $f(x)=-x+g(x)$이다.
함수 $h(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$는 주기가 4이고
$0\le x\le 2$일 때, $h(x)\ge 0$
$2\le x\le 4$일 때, $h(x)\le 0$
$4\le x\le 6$일 때, $h(x)\ge 0$
$\vdots$ $\vdots$
$x\ge 0$일 때, $f(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\ge 0$을 만족시키는 연속함수 $f(x)$는 기울기가 1 또는 -1인 직선을 이어서 만든 그래프를 갖는다.



따라서 $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$는 다음과 같다.
$$f(x)=\begin{cases}-x+2 \text{ 또는 } x & (0\le x<1)\\ -x+2 & (1\le x<3)\\ x-4 & (3\le x<5)\\ -x+6 & (5\le x<7)\\ x-8 & (7\le x\le 8)\end{cases}$$
$\displaystyle\int_0^8 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$의 값이 최대가 되기 위해서는 $0\le x<1$일 때, $f(x)=-x+2$이어야 한다.
또한, 그림에서
$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\int_1^2(-x+2)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\int_2^3(-x+2)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$= \int_3^4 (x-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \int_4^5 (x-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \cdots$

임을 알 수 있다.

따라서

$\int_0^8 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$\le \int_0^1 (-x+2)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx + 7\times\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$ ...... ㉠

$= \frac{4\pi-4}{\pi^2} + 7\times\frac{4}{\pi^2}$

$= \frac{4\pi+24}{\pi^2}$

$m=4,\ n=24$이므로 $m+n=28$이다.

[랑데뷰팁] – ㉠

$\int_0^1 (-x+2)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= \left[(-x+2)\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= 0-\left(2\times-\frac{2}{\pi}\right)-\frac{4}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1$

$= \frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}$

$= \frac{4\pi-4}{\pi^2}$

$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= \left[x\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= 0+\frac{4}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1$

$= \frac{4}{\pi^2}$

9) 정답 15

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 조건 (가)에 의하여 $\frac{a}{1-r}=2$ ......㉠

수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases} 1 & (|a_n|<\alpha) \\ -\frac{{a_n}^2}{3} & (|a_n|\ge\alpha) \end{cases}$$

모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|<\alpha$라 하면 $\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{m}1=m$의 값이 최소가 되도록 하는

자연수 m의 값은 1이므로 조건 (나)에 의하여

$\sum_{n=1}^{1}b_n=\sum_{n=1}^{1}a_n=a=-11$

㉠에 의하여 $r=\frac{13}{2}>1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_k|\ge\alpha,\ |a_{k+1}|<\alpha$인 자연수 k가 존재한다.

$1\le n\le k$일 때, $\frac{a_n}{b_n}=-\frac{{a_n}^2}{3}<0$

$n\ge k+1$일 때, $\frac{a_n}{b_n}=1>0$

그러므로 $\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 k이고

$\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=\frac{ar^k}{1-r}=-\frac{1}{16}$

㉠에 의하여 $r^k=-\frac{1}{32}$ ...... ㉡

$\sum_{n=1}^{k}b_n=\sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{3}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{k}\left\{-\frac{3}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{-\frac{3}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^k\right\}}{1-\frac{1}{r}}=-11$

$r^k=-\frac{1}{32}$이므로 $\frac{-\frac{3}{a}(1+32)}{1-\frac{1}{r}}=-11$

$-\frac{99}{a}=-11\left(\frac{r-1}{r}\right)$

㉠에서 $a=2-2r$이므로

$\frac{9}{2(1-r)}=\frac{r-1}{r}$

$9r=-2r^2+4r-2$

$2r^2+5r+2=0$

$(2r+1)(r+2)=0$

$-1<r<1$이므로

$\therefore\ r=-\frac{1}{2}$

따라서 $a=3$

㉡에서 $k=p=5$이다.

따라서 $a_1\times p=3\times5=15$이다.

10) 정답 ①

쌍곡선의 정의에 의해서 거리차가 $2a$임을 이용하면

$\overline{\mathrm{QF}'}=q+2a$, $\overline{\mathrm{QF}}=q$ 이고 $\overline{\mathrm{PF}'}=p+2a$, $\overline{\mathrm{PF}}=p$ 라 할 수 있다.

직각삼각형 FQF′의 넓이가 10, 내접원의 반지름이 $r=6-\sqrt{26}$ 임을 이용하여

$(q+2a)q=20$, $4c^2=(q+2a)^2+q^2$에서

$c^2=10+a^2$ 이므로 $b=\sqrt{10}$이고

$\frac{2(q+a+c)}{2}\times r=10$ 에서

$q+a+c=6+\sqrt{26}$을 얻고

$a=\frac{10}{q}-\frac{q}{2}$, $c=6+\sqrt{26}-\frac{10}{q}-\frac{q}{2}$로 변형한 다음

$(c+a)(c-a)=10$ 에 대입하면 $q=2, a=4$ 를 얻을 수 있다.

또 직각삼각형 PQF′에서 $\overline{\mathrm{PF}'}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}'}^2$ 임을 이용하면

$(p+2a)^2=(p+2)^2+(q+2a)^2$ 에서 $(p+8)^2=(p+2)^2+10^2$이고

$p = \frac{10}{3}$ 이다.

따라서 직각삼각형 PQF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QF'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}+2\right)\times 10 = \frac{80}{3}$ 이다.

11) 정답 21

점 A의 좌표를 $A(a,0)$ 이라 하자. 원점을 지나는 쌍곡선 G_2의 주축길이가 2 이므로 쌍곡선의 중심을 점 C(1,0)라 하면, 쌍곡선의 두 초점 A,F′에서 중심 C까지 거리가 같으므로 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{CF'}}$ 이고 $a-1=1+c$ 가 되어서 $a=c+2$ 이다.

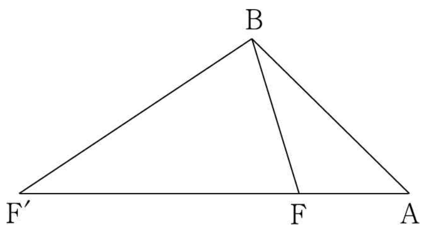
또 $\overline{\mathrm{BF'}}=p$, $\overline{\mathrm{BA}}=q$, $\overline{\mathrm{BF}}=r$ 이라 하면

$p-q=2$ (⇐주축길이) 이고 $p+r=2a$ (⇐타원의 정의) 이다.

그리고 조건에서 $\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BA}} = 2\overline{\mathrm{AO}}+1$ 이므로

$p+q = 2a+1$이다. 위 식들을 정리하면

$p=c+\frac{7}{2}$, $q=c+\frac{3}{2}$,$r=c+\frac{1}{2}$이고 삼각형 BF′A에서



(단, $\overline{\mathrm{BF'}}=p$, $\overline{\mathrm{BA}}=q$, $\overline{\mathrm{BF}}=r$, $\overline{\mathrm{FF'}}=2c$, $\overline{\mathrm{AF}}=2$)

코사인 법칙을 적용하면 $\cos(\angle \mathrm{BFF'})+\cos(\angle \mathrm{BFA})=0$ 이므로

$\frac{r^2+4c^2-p^2}{2r\times(2c)}+\frac{r^2+4-q^2}{2r\times 2}=0$ 이다.

이제 방정식을 풀면

$4c^2+(r-p)(r+p)+c\{4+(r-q)(r+q)\}=0$ 이고 $c^2-2c-6=0$ 가 되어서

$c = 1+\sqrt{7}$ $(2<c<a)$ 이다.

따라서 $3\times(c-1)^2 = 21$이다.

제5회 - A

1) 정답 ③

$2\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{-1}^{1}\left(3x^2+f(x)\right)dx$

$=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{-1}^{1}3x^2dx$

$=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}6x^2dx$

에서

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}f(x-1)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}\{f(x-1)+f(x)\}dx$

$=\int_{0}^{1}\left(x^3+6x^2-x\right)dx$

$=\int_{0}^{1}\left(x^3-x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

2) 정답 ⑤

$\lim_{x\to 0}\left\{x^2\times g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$의 값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 0+}\left\{x^2\times g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to 0-}\left\{x^2\times g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$

$t=\frac{1}{x}$이라 하면

$x\to 0+$이면 $t\to\infty$이고, $x\to 0-$이면 $t\to-\infty$이므로

$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{g(t)}{t^2}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{f'(2)(t-2)^2+f(2)}{t^2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{f'(0)t^2+f(0)}{t^2}$

즉, $f'(2)=f'(0)$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

또한 $f'(2)=f'(0)=k$라 하면

$f'(x)=3x(x-2)+k$라 놓을 수 있다.

한편, $\lim_{x\to 0}\left\{x^2\times g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=-2g'(1)$에서

$f'(0)=-2g'(1)$, $f'(0)=-2f'(1)$이므로

$k=-2\times(-3+k)$, $k=6-2k$ $\quad\therefore k=2$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$f(x)=\int\left(3x^2-6x+2\right)dx=x^3-3x^2+2x+C$ (C는 적분상수)

$g(3)=f'(2)+f(2)=5$이므로

$2+C=5$에서 $C=3$

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+3 & (x<0)\\ x^3-3x^2+2x+3 & (0\le x<2)\\ 2(x-2)^2+3 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$g(-1)+g(4)=5+11=16$

3) 정답 ①

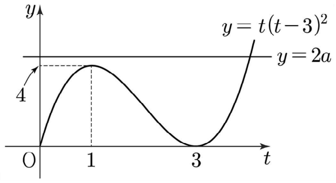
점 P는 초기위치가 0이므로 $s_1(t)=t^3-6t^2$, 점 Q는 초기위치가 $2a$이므로 $s_2(t)=-9t+2a$이다.

두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 최소의 자연수 a를 구하면

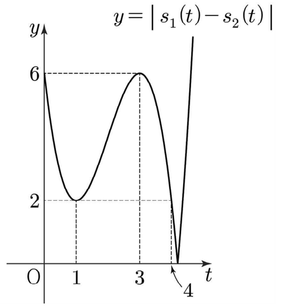
$t^3-6t^2=-9t+2a$

$t(t^2-6t+9)=2a$

$y=t(t-3)^2$와 $y=2a$의 교점이 한 개가 되려면



$2a>4$
$a>2$이므로 $a=3$이다.
$a=3$일때 시각 $t=0$에서 $t=4$사이에 점 P와 Q의 거리가 가장 가까울 때의 시각 $t=t_1$을 구해보자.
$y=|s_1(t)-s_2(t)|=|t^3-6t^2+9t-6|$ 그래프를 그려보면 아래와 같다.



시각 $t=0$에서 $t=4$사이에 거리가 가장 가까울 때의 시각 $t_1=1$임을 알 수 있다.
점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=5t_1=5$까지 움직인 거리를 구하면
$$\int_0^5|3t^2-12t|dt=\int_0^4(-3t^2+12t)dt+\int_4^5(3t^2-12t)dt$$
$$=\frac{3}{6}(4-0)^3+\left[t^3-6t^2\right]_4^5$$
$$=32+7$$
$$=39$$

4) 정답 ②
$\angle ADB=\angle ACB=\beta$이므로 삼각형 ABC에서
$\angle ABC=\pi-(\alpha+\beta)$이다.
$\cos\angle B=\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$
한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면
$\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\frac{1}{3}$
$=6^2$
$\therefore \overline{AC}=6$
따라서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이고, 선분 AD와 선분 BC가 평행하고 사각형 ABCD가
한 원위에 있으므로 등변사다리꼴이므로 $\overline{BD}=\overline{AC}=6$이고,
$\overline{AE}=x$라 하면, $\overline{BE}=6-x$이다.
삼각형 ABE에서 코사인법칙을 적용하면
$\cos\angle A=\frac{x^2+4^2-(6-x)^2}{2\times4\times x}$
$=\frac{3x-5}{2x}$
$=\frac{1}{3}$
$\therefore x=\overline{AE}=\frac{15}{7},\ \overline{BE}=\frac{27}{7}$
삼각형 ABE에서 사인법칙을 적용하면
$\cos\angle A=\frac{1}{3}$이므로 $\sin\angle A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\frac{\frac{27}{7}}{\sin\angle A}=2R$ (R은 삼각형 ABE의 외접원의 반지름의 길이)
$\therefore R=\frac{81\sqrt{2}}{56}$

5) 정답 ④
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$f(2)=f(0)+3,\ f'(2)=f'(0)$을 만족시킨다.
사차함수 $f(x)$가 $f(0)=1$이므로 $f(2)=4$이고 $x=0$과 $x=2$에서의 접선의 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로 사차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서
직선 $y=\frac{3}{2}x+1$에 접한다.
따라서 $f(x)=ax^2(x-2)^2+\frac{3}{2}x+1$이라 할 수 있다.
방정식 $2g'(x)-3=0$의 실근은 $g'(x)=\frac{3}{2}$에서
$x\le2$일 때, 방정식 $f'(x)=\frac{3}{2}$의 실근에서 찾을 수 있다.
$$f'(x)=2ax(x-2)^2+2ax^2(x-2)+\frac{3}{2}$$
$$=4ax(x-1)(x-2)+\frac{3}{2}$$
$f'(x)=\frac{3}{2}\ \rightarrow\ 4ax(x-1)(x-2)=0\ \rightarrow\ x=0,\ x=1,\ x=2$
$x>2$일 때는 함수 $f(x)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이므로 $g'(x)=\frac{3}{2}$의 실근은
$x=2,\ x=3,\ x=4$이다.
따라서 방정식 $2g'(x)-3=0$의 모든 실근의 합은
$0+1+2+3+4=10$이다.

제5회 - B

1) 정답 ③
곡선 $y=-x^2+4$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=\frac{4^3}{6}=\frac{32}{3}$
이다.
따라서 직선 $y=m(x-2)$와 곡선 $y=-x^2+4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{16}{3}$이어야 한다.
$-x^2+4=mx-2m$
$x^2+mx-2m-4=0$

$(x-2)(x+m+2)=0$

따라서

$\frac{16}{3}=\int_{-m-2}^{2}-(x-2)(x+m+2)dx=\frac{(4+m)^3}{6}$

$(4+m)^3=32$

$4+m=2^{\frac{5}{3}}$

$\therefore\ m=-4+2^{\frac{5}{3}}$

2) 정답 3

$\sin x=\cos\frac{\pi}{5}$을 만족시키는 x의 값을 α, β라 하면

$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$ 또는 $\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$이다.

따라서 $\alpha=\frac{3}{10}\pi$, $\beta=\frac{7}{10}\pi$이다.

$\beta-\alpha=\frac{4}{10}\pi=\frac{2}{5}\pi$이다.

$p=5$, $q=2$이므로 $p-q=3$이다.

3) 정답 ③

$a=\log\frac{1}{5}+\log_2 4+\log_2 10\ =-\log 5+2+\frac{1}{\log 2}$

$b=\log\frac{1}{20}=\log\frac{5}{100}=\log 5-2$

$c=\frac{1}{\log_2 10}=\log 2$

에서 $(a+b)c=\frac{1}{\log 2}\times\log 2=1$

4) 정답 ①

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점은

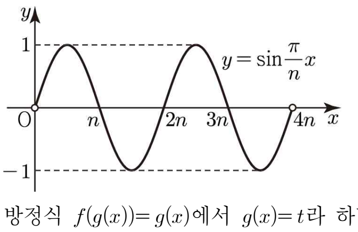
$\left(\frac{2\log_3\frac{3}{4}+\log_3 a}{3},\ \frac{2\log_2\sqrt{2}+8}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\log_3\frac{9a}{16},\ 3\right)$이다.

이 점이 $y=3x$위에 있으므로

$3=\log_3\frac{9a}{16}\ \rightarrow\ \frac{9a}{16}=27\ \rightarrow\ a=27\times\frac{16}{9}=48$

5) 정답 872

$y=\sin\frac{\pi}{n}x$는 최댓값이 1, 최솟값이 -1이고 주기가 $2n$인 그래프이다. 집합 A의 정의역이 $0<x<4n$이므로 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(g(x))=g(x)$에서 $g(x)=t$라 하면

$f(t)=t$

$nt^2+t-1=t$

$t^2=\frac{1}{n}$

$t=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

따라서 두 방정식 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $g(x)=-\frac{1}{\sqrt{n}}$의 모든 실근의 합이 a_n이다.

(i) $n=1$일 때,

$0<x<4$에서

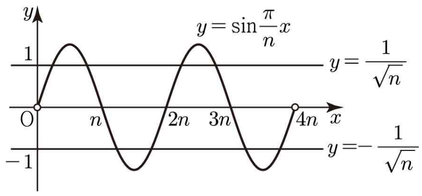
방정식 $\sin\pi x=1$의 실근은 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{2}$으로 실근의 합은 3이다.

방정식 $\sin\pi x=-1$의 실근은 $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{7}{2}$으로 실근의 합은 5이다.

$\therefore\ a_1=8$

(ii) $n\ \geq\ 2$일 때,

$0<x<4n$에서



방정식 $\sin\frac{\pi}{n}x=\frac{1}{\sqrt{n}}$의 실근은 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{n}x$와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{n}}$의 교점의 x좌표이다.

교점의 x좌표를 크기가 작은 순으로 α_1, α_2, α_3, α_4라 하면

α_1과 α_2는 $x=\frac{n}{2}$에 대칭이므로 $\alpha_1+\alpha_2=n$

α_3과 α_4는 $x=\frac{5n}{2}$에 대칭이므로 $\alpha_3+\alpha_4=5n$

방정식 $\sin\frac{\pi}{n}x=-\frac{1}{\sqrt{n}}$의 실근은 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{n}x$와 직선 $y=-\frac{1}{\sqrt{n}}$의 교점의 x좌표이다.

교점의 x좌표를 크기가 작은 순으로 β_1, β_2, β_3, β_4라 하면

β_1과 β_2는 $x=\frac{3n}{2}$에 대칭이므로 $\beta_1+\beta_2=3n$

β_3과 β_4는 $x=\frac{7n}{2}$에 대칭이므로 $\beta_3+\beta_4=7n$

따라서 $a_n=16n$이다.

(i), (ii)에서

$a_n=\begin{cases}8 & (n=1)\\ 16n & (n\ \geq\ 2)\end{cases}$

이다.

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}16n-8=16\times\frac{10\times 11}{2}-8=872$

제5회 - 선택

6) 정답 ⑤

(가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0개, 1개, 2개가 가능하다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0개인 경우

(나)에서 학생 B는 적어도 한 개의 빨간 공을 가져야 하므로

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 남은 두 개의 빨간 공을 B, C에게 나누어주는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

${}_2H_3\times{}_2H_3=({}_4C_3)^2=16$

즉, $3\times16=48$이다.

(다)에서 학생 C가 받는 공의 개수가 0개인 경우와 1개인 경우를 제외해야 한다.

즉, $48-(1+3)=44$

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1개인 경우

① 학생 A가 빨간 공 1개를 받는 경우

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 남은 한 개의 빨간 공을 B, C에게 나누어주는 경우의 수는 2

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

${}_2H_3\times{}_2H_3=({}_4C_3)^2=16$

즉, $2\times16=32$이다.

(다)에 의해 $32-(1+3)=28$

② 학생 A가 노란 공 1개 또는 흰 공 1개를 받는 경우

학생 A가 노란 공을 선택할지 흰 공을 선택할지 결정하는 경우의 수는 2

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 남은 두 개의 빨간 공을 B, C에게 나누어주는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

${}_2H_2\times{}_2H_3={}_3C_2\times{}_4C_3=12$

즉, $2\times3\times12=72$이다.

(다)에 의해 $72-(1+3)\times2=64$

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2개인 경우

① 학생 A가 빨간 공 2개를 받는 경우

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 빨간 공이 남지 않는다.

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

${}_2H_3\times{}_2H_3=({}_4C_3)^2=16$

즉, 16이다.

(다)에 의해 $16-(1+2)=13$

② 학생 A가 빨간 공 1개를 받는 경우

학생 A가 받는 다른 색깔의 공을 선택하는 경우의 수는 2

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 남은 한 개의 빨간 공을 B, C에게 나누어주는 경우의 수는 2

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

${}_2H_2\times{}_2H_3={}_3C_2\times{}_4C_3=12$

즉, $2\times2\times12=48$이다.

(다)에 의해 $48-(1+3)\times2=40$

③ 학생 A가 노란 공 2개 또는 흰 공 2개를 받는 경우

학생 A가 노란 공을 선택할지 흰 공을 선택할지 결정하는 경우의 수는 2

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 남은 두 개의 빨간 공을 B, C에게 나누어주는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

$2\times{}_2H_3=2\times{}_4C_3=8$

즉, $2\times3\times8=48$이다.

(다)에 의해 $48-(1+3)\times2=40$

④ 학생 A가 노란 공 1개, 흰 공 1개를 받는 경우

학생 B에게 빨간 공 한 개를 미리 주고 남은 두 개의 빨간 공을 B, C에게 나누어주는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

노란 공과 흰 공을 마찬가지로 B, C에게 나누어주는 경우의 수는

${}_2H_2\times{}_2H_2=({}_3C_2)^2=9$

즉, $3\times9=27$이다.

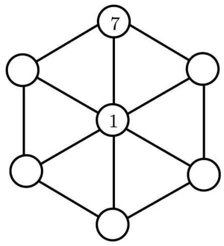
(다)에 의해 $27-(1+3)=23$

(i) ~ (iii)에서 구하고자 하는 경우의 수는

$44+28+64+13+40+40+23=252$

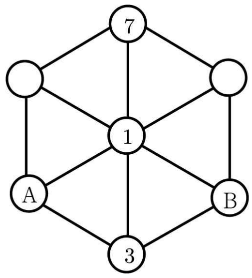
7) 정답 64

(i) 가운데 수가 1인 경우



7의 반대편에 올 수 있는 수는 2, 3, 4 세가지이고,

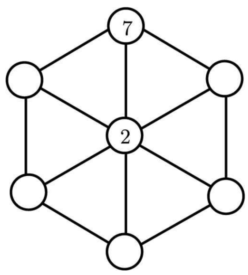
6은 7과 이웃 할 수 없으므로 아래와 같이 A, B 두 곳 중 하나에 놓여야 한다.



남은 세 자리에는 어떠한 수를 배치해도 관계없으므로 3!

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times2\times3!=36$가지다.

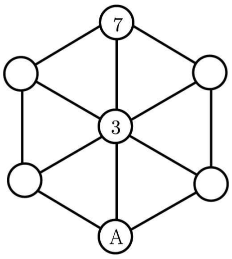
(ii) 가운데 수가 2인 경우



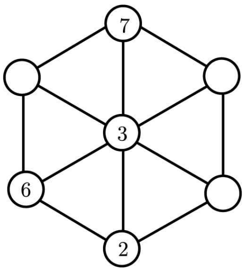
7의 반대편에 놓일 수 있는 수는 1 또는 3에서 두가지.

6과 5의 배치는 6이 놓일 수 있는 위치가 (i)과 마찬가지로 두가지, 5는 6의 반대편을 제외한 두가지, 이후 남은 두 수의 배치를 마무리하면 $2\times2\times2\times2!=16$가지다.

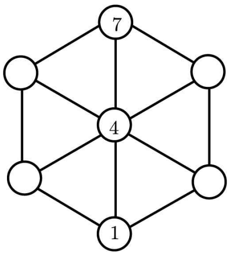
(iii) 가운데 수가 3인 경우



A에는 1 또는 2가 놓일 수 있고,
6의 배치는 2가지,



이 상태에서 6의 반대편에 놓일 수 있는 수는 1밖에 없고,(7의반대편에 1이 놓인 경우는 2가 가능)나머지 두 수의 배치는 2!에서
$2\times2\times2!=8$
(iv) 가운데 수가 4인 경우



6이 놓일 수 있는 자리는 2자리, 6의 반대편에 놓일 수 있는 수는 2밖에 없으므로
나머지 두 수의 배치에 따라 $2\times2!$이 가능하다.
(v) 가운데 5이상의 수는 배치할 수 없다.
따라서 구하는 경우의 수는 $36+16+8+4=64$이다.

8) 정답 25

(가)에서 $n=1$일 때, $\frac{b_1}{a_1}=-\frac{1}{5}$

(가)에서 n에 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{a_k}=\frac{1}{(-5)^{n-1}}$ $(n\geq2)$이므로

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{(-5)^n}-\frac{1}{(-5)^{n-1}}=\frac{1}{(-5)^{n-1}}\left(\frac{1}{-5}-1\right)=\frac{6}{(-5)^n}\quad(n\geq2)$$

$\therefore\ b_n=\frac{6}{(-5)^n}\times a_n$ $(n\geq2)$, $b_1=-\frac{a_1}{5}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r (r은 자연수)이라 하면
$a_n=a_1r^{n-1}$이다.

$$b_n=-\frac{6a_1}{5}\left(-\frac{r}{5}\right)^{n-1}\quad(n\geq2)$$

(나)에서 $-1<-\frac{r}{5}<1$이므로 자연수 r은 1, 2, 3, 4가 가능하다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+\frac{\frac{6a_1r}{25}}{1-\left(-\frac{r}{5}\right)}=-\frac{1}{5}a_1-\frac{6a_1r}{25+5r}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{-6a_1r}{25+5r}=\frac{a_1+1}{5}$$

$-6a_1r=5a_1+a_1r+5+r$

$7a_1r+5a_1+5+r=0$

$\therefore a_1=-\frac{r+5}{7r+5}$

$r=1$일 때, $a_1=-\frac{1}{2}$으로 최솟값이다.

$r=4$일 때, $a_1=-\frac{3}{11}$으로 최댓값이다.

따라서 $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{11}\right)=\frac{3}{22}$

$p=22$, $q=3$이므로 $p+q=25$이다.

9) 정답 34

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$가 수렴하므로 $-1<r<1$이고 $a_n=r^{n-1}$이다.

또한 $\sum_{n=1}^{\infty}(12a_{2n}+13|a_{3n-1}|)=0$에서 a_{2n}이 음수인 값이 발생해야 하므로 $-1<r<0$이다. 따라서 $|a_{3n-1}|$은 $|a_2|$, $|a_5|$, $|a_8|$이므로 공비가 $-r^3$이고 초항이 $-r$인 등비수열이고, 주어진 급수를 정리해보면

$12\times\frac{r}{1-r^2}+13\times\frac{-r}{1+r^3}=0$에서

$12(1-r+r^2)=13(1-r)$이므로 $12r^2+r-1=(3r+1)(4r-1)=0$

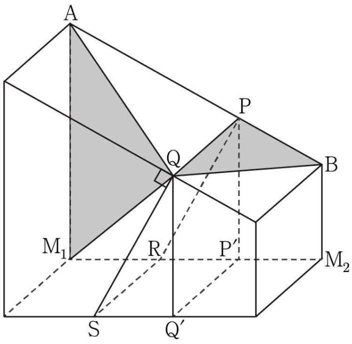
에서 $r=-\frac{1}{3}$이다.

따라서 $a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이고, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴하기 위한

등비수열 $b_n=-5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로 $b_3=-\frac{5}{9}$에서 $b_1\times b_3=\frac{25}{9}$이고

$p+q=34$이다.

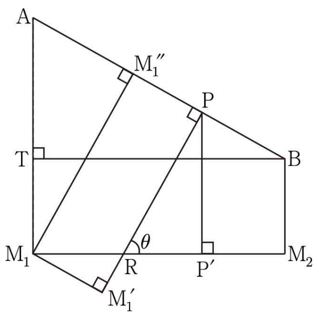
10) 정답 3



두 평면 α와 β가 이루는 각 θ은

$\angle PRP' = \angle QSQ' = \angle BAM_1 = \theta$이고 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ 이다.

삼각형 AQM_1의 평면 β 위로의 정사영은 삼각형 $PQM_1{}'$이 되고,
삼각형 BPQ의 평면 α위로의 정사영은 삼각형 $M_2P'Q'$이 된다.



$\overline{PM_1{}'} = \overline{M_1M_1{}''}$

이고

$\frac{\overline{M_1M_1{}''}}{\overline{AM_1}} = \frac{\overline{M_1M_1{}''}}{10} = \sin\theta = \frac{4}{5}$

이므로

$\overline{PM_1{}'} = \overline{M_1M_1{}''} = 8$, $\overline{PQ} = 4$

이다. S_1은 삼각형 $PQM_1{}'$의 넓이가 되고

$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{PM_1{}'} \times \overline{PQ} = 16$이다.

또 $\frac{\overline{BT}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BT}}{6} = \tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \overline{BT} = \overline{M_1M_2} = 8$이고

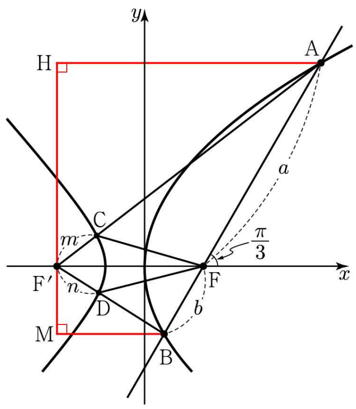
$\overline{P'M_2} = \frac{1}{3}\overline{M_1M_2} = \frac{8}{3}$, $\overline{P'Q'} = 4$

이다. S_2은 삼각형 $M_2P'Q'$의 넓이가 되고

$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{P'M} \times \overline{P'Q'} = \frac{16}{3}$이다.

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 3$

11) 정답 32



쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{4+5} = 3$ 이므로 $F'(-3,\ 0)$ 이고,
포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점은 $F(3,\ 0)$ 이다. 또한 점 A에서 포물선 $y^2 = 12x$ 의 준선 $x = -3$에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 B에서 내린 수선의 발을 M이라고 하자.

이때, $\overline{AF} = a$, $\overline{BF} = b$이라 하면 포물선의 정의에 의해
$\overline{AH} = a$, $\overline{BM} = b$이다.

사다리꼴 ABMH에서 $\overline{FF'} = 6 = \frac{ab+ba}{a+b}$ 이고 선분 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 $a+b = 2(a-b)$, $a = 3b$이다.

따라서 $a = 12$, $b = 4$이고
$\overline{HM} = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab} = 8\sqrt{3}$ 이다.
또한 $\overline{HF'} : \overline{MF'} = a : b = 3 : 1$이고
$\overline{HF'} = 6\sqrt{3}$, $\overline{MF'} = 2\sqrt{3}$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AF'} = 6\sqrt{7}$, $\overline{BF'} = 2\sqrt{7}$ 이다.
$\overline{F'C} = m$, $\overline{F'D} = n$이라 하면,
$\overline{AC} = 6\sqrt{7} - m$, $\overline{BD} = 2\sqrt{7} - \mathrm{n}$ 이고 쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{CF} = m+4$, $\overline{DF} = n+4$ 이므로 삼각형 ACF 의 둘레의 길이는
$a + (6\sqrt{7} - m) + (m+4) = 16 + 6\sqrt{7}$ 이고
삼각형 BFD 의 둘레의 길이는
$b + (2\sqrt{7} - n) + (n+4) = 8 + 2\sqrt{7}$ 이다.
그러므로 두 삼각형 ACF ,BFD 의 둘레의 길이의 합은
$(16 + 6\sqrt{7}) + (8 + 2\sqrt{7}) = 24 + 8\sqrt{7}$ 이다.
$\therefore\ p + q = 32$