제 2 교시

수학 영역

안내

1번부터 3번까지는 해설이 주어지지 않고,

4번부터 7번까지는 해설이 주어지는 문항입니다.

1-3번 문항은 풀이 후 손풀이 제출, 문항 검토 사항을 제출해주시면 되고,

4-7번 문항은 문항, 해설 검토 사항을 제출해주시면 됩니다.

p.s 제출 양식은 점수에 영향을 미치지 않습니다. 편한 방식으로 제출해주십시오.

참고

문항 검토를 할 때 신경써야 할 부분

1. 답이 제대로 나오는지
2. 출제된 상황에 오류가 없는지
3. 과조건/일부 조건을 사용하지 않아도 답이 나오는지
4. 해당 문제에 사용된 표현에 이상이 없는지

등이 있습니다.

또한, 해설 검토를 할 때 신경써야 할 부분에는

1. 실제로 답이 맞는지
2. 논리적 오류/오타 확인

등이 있습니다

참고하셔서 검토사항을 작성해주시기 바랍니다.

p.s 해당 내용 외 추가적인 의견을 검토사항으로 제출하셔도 좋습니다.

1. 함수 $f(x)=x^3+ax+b$가 $x=2$에서 $\boxed{\text{극댓값}}$ 12를 가질 때 $a+b$의 ~~값은~~? [3점]

극솟값

값을 구하시오.

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-2}=\infty\ ,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [4점]

때

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-2}=\infty$ $\Rightarrow$ '양의 무한대'로 발산이므로 $f(x)-2=(x-1)^3$

2) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$ $\Rightarrow$ $f(2)=0,\ f'(2)=0$

이때 삼차함수 $f(x)$가 1)과 2)를 모두 만족하는 것은 불가능하므로, 문제오류!

3. 두 상수 $a\,(a>1)$, $b\,(b<0)$에 대하여 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$~~의~~ 가 모든 실수 x에 대하여

$$(x+6)(x-2a)|g(x)|=\int_{a+1}^{x}\cancel{f(x)dx}\ f(t)dt\times\int_{b}^{x}\cancel{f(x)dx}\ f(t)dt$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$의 최댓값이 $M\,(M>0)$일 때, $a+b+M$의 값은? [4점]

① $\frac{277}{9}$ ② $\cancel{\frac{93}{3}}$ 31 ③ $\frac{281}{9}$ ④ $\frac{283}{9}$ ⑤ $\cancel{\frac{285}{9}}$ $\frac{95}{3}$

발문에 '에 대하여'가 반복된다.

4. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{7}(-1)^n \times a_n = 3 \quad \sum_{n=1}^{4}(-1)^n a_n = 6$$

을 만족시킬 때, $a_2+a_3+a_7$의 값은? [4점]

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 0 ⑤ 3

$a_2+a_3+a_7 = 3a_4$

$a_4 = -3$

즉, $\sum_{n=1}^{4}(-1)^n a_n = 6$은 사용되지 않으므로

해당 온항은 과조건이다.

정답: ①

해설:

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면,

$\sum_{n=1}^{7}(-1)^n \times a_n = 3$이므로

$-(a_1+a_3+a_5+a_7)+(a_2+a_4+a_6)=3$

$\Leftrightarrow -4a_4+3a_4=3$

$\Leftrightarrow a_4=-3$

이고,

$\sum_{n=1}^{4}(-1)^n a_n = 6$이므로

$-(a_1+a_3)+(a_2+a_4)=6$

$\Leftrightarrow 2d=6$

$\Leftrightarrow d=3$

이다.

따라서,

$a_2=a_4-2d=-9$. $a_3=a_4-d=-6$, $a_7=a_4+3d=6$

이므로

$a_2+a_3+a_7=-9$

이다.

5. $\cos(\angle ABC) = \cos(\angle ACB) = \frac{7}{8}$ 인 삼각형 ABC 에 대하여 선분 BC 위에 있는 두 점 D, E가

$$\overline{BD} < \overline{BE}\ ,\ \cos(\angle DAE) = \frac{1}{4}$$

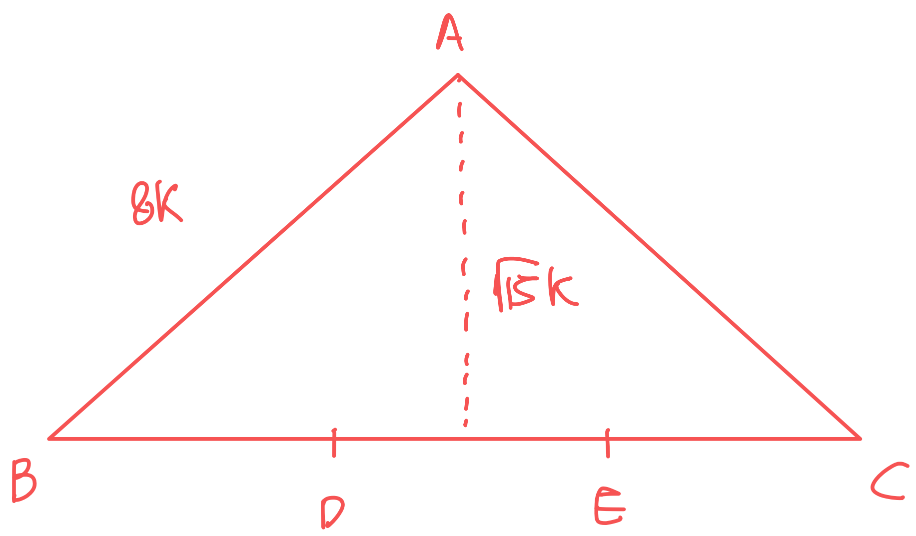
이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ADE 의 넓이를 S_1, 삼각형 ADE 의 외접원의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = \sqrt{15} : 16\pi$ 이다.

(나) 삼각형 ABD 의 외접원이 넓이와 삼각형 ACE 의 외접원의 넓이의 합은 $\frac{128}{25}\pi$ 이다.

$\overline{AD} + \overline{AE}$ 의 값은? [4점]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3



$\overline{BC} = 14k$

(가) 조건으로 부터

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{15}k \times \overline{DE}$$

$$S_2 = \pi \times \left(\frac{\overline{DE}}{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}} \right)^2$$

이고, $S_1 : S_2 = \sqrt{15} : 16\pi$ 이므로 $\overline{DE} = 30k$

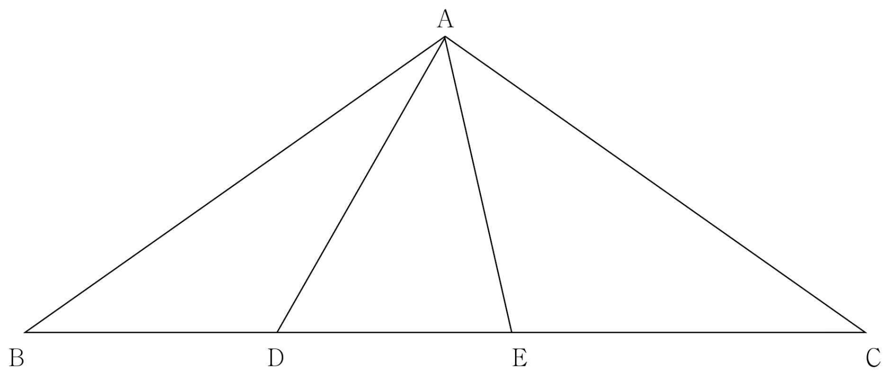
∴ $\overline{BC} < \overline{DE}$ 이므로 모순이고, 문제 오류이다.

정답: ②

해설:

step1 구하는 길이를 미지수로 나타내기

$\overline{AD} = x$, $\overline{AE} = y$라 하자.



$\cos(\angle ABC) = \cos(\angle ACB) = \frac{7}{8}$ 으로부터

$$\sin(\angle ABC) = \sin(\angle ACB) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

이므로 사인법칙에 의해

삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{\overline{AD}}{2\sin\angle ABD} = \frac{4x}{\sqrt{15}}$$ 글씨체

이고, 삼각형 ACE 의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{\cancel{\overline{AD}}\ \overline{AE}}{2\sin\angle ACE} = \frac{4y}{\sqrt{15}}$$ 글씨체

이다.

따라서, 조건 (나)에 의해

$$\pi\left(\left(\frac{4x}{\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{4y}{\sqrt{15}}\right)^2\right) = \frac{128}{25}\pi \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{24}{5}$$

이다.

step2 곱셈공식을 이용해 $x+y$의 값 구하기

$\cos(\angle DAE) = \frac{1}{4}$ 로부터

$$\sin(\angle DAE) = \cancel{\frac{1}{4}}\ \frac{\sqrt{15}}{4}$$

이므로 삼각형 ADE 의 넓이는

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \sin(\angle DAE) \times x \times y = \frac{\sqrt{15}}{8}xy$$

글씨체

이다.

이때 조건 (가)에 의해 $S_1 : S_2 = \sqrt{15} : 16\pi$이므로

$$S_2 = 2xy\pi$$

이고, 삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2xy}$ 이다.

따라서, 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의해

글씨체

$$2\times\sqrt{2xy}\times\sin(\angle DAE)=\overline{DE} \rightarrow \overline{\mathrm{DE}}=\frac{\sqrt{30xy}}{2}$$

이고, 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의해

$$x^2+y^2-2\times x\times y\times\frac{1}{4}=\frac{15}{2}xy$$

이므로 $x^2+y^2=\frac{24}{5}$ 을 이용해 정리하면

$$8xy=x^2+y^2=\frac{24}{5}$$

이고, 이로부터

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=10xy=6$$

이므로 $x+y=\sqrt{6}$, 즉 $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{6}$ 이다.

6. 두 상수 a, b와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & (x<1) \\ 3^{-x+a}+b & (x \ge 1) \end{cases}$$

가 있다. x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 개수가 1일 때, 9^a+b의 값을 구하시오. [4점]

정답: 146

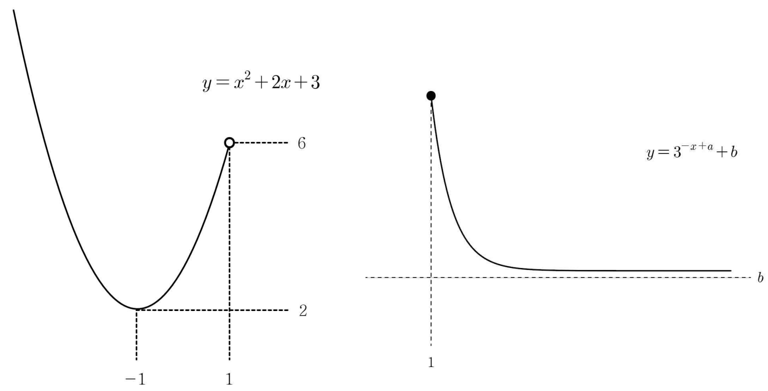
해설:

step1 확정된 부분에 대한 그래프 그리기

함수 $f(x)$를 관찰해보자.

함수 $f(x)$는 $x<1$에서 $y=x^2+2x+3$이고,

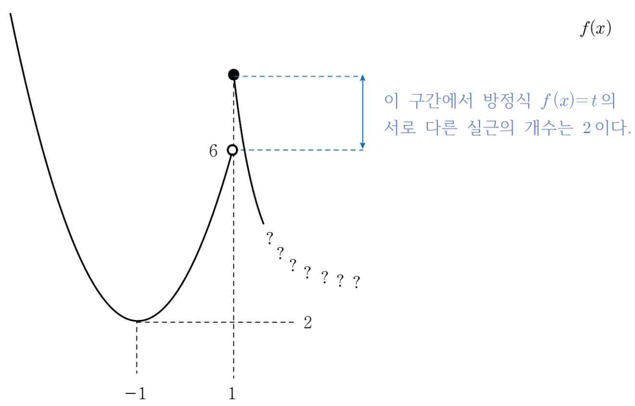
$x \ge 1$에서 $y=3^{-x+a}+b$이므로,



$x \ge 1$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 점근선을 가지면서 감소하는 개형임을 알 수 있다.

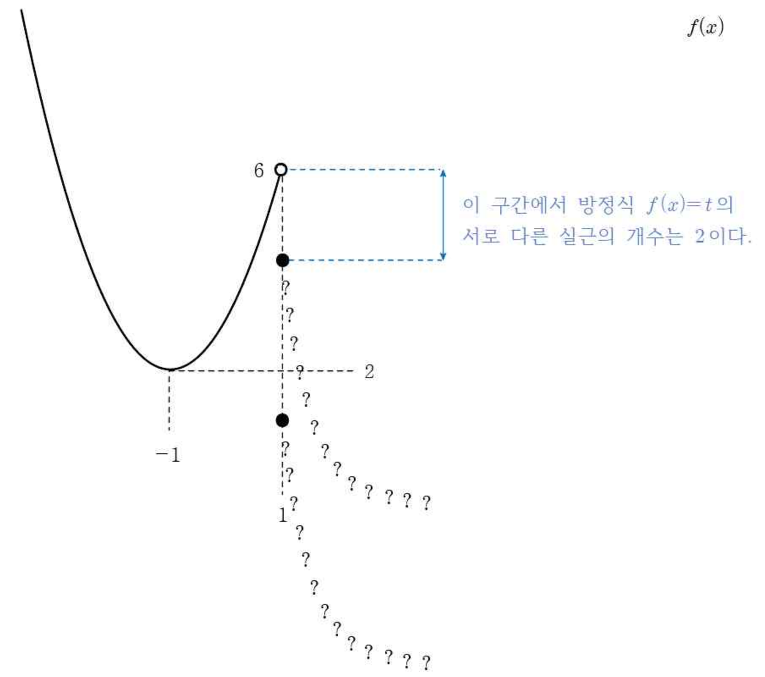
step2 불연속(의심)점을 기준으로 조건을 만족시키는 상황 찾기

1) $f(1)>6$인 경우



위 그림과 같이, 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 개수가 무수히 많으므로 조건을 만족하지 않는다.

2) $f(1)<6$인 경우



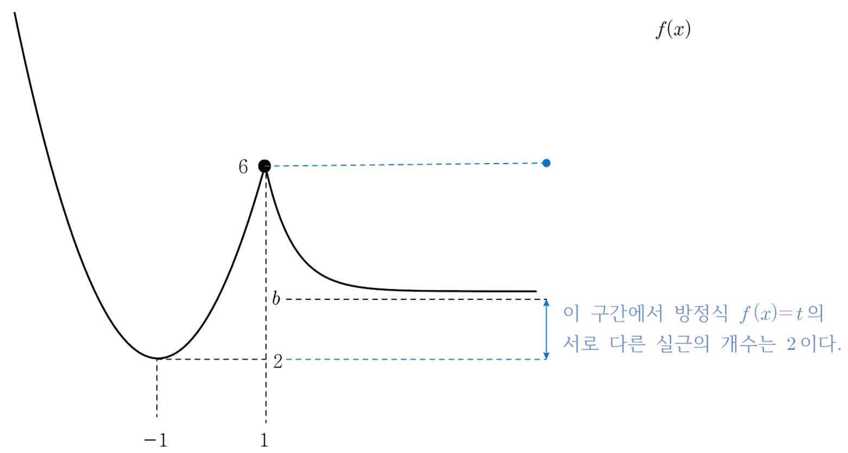
위 그림과 같이, 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 개수가 무수히 많으므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $f(1)=6$이다.

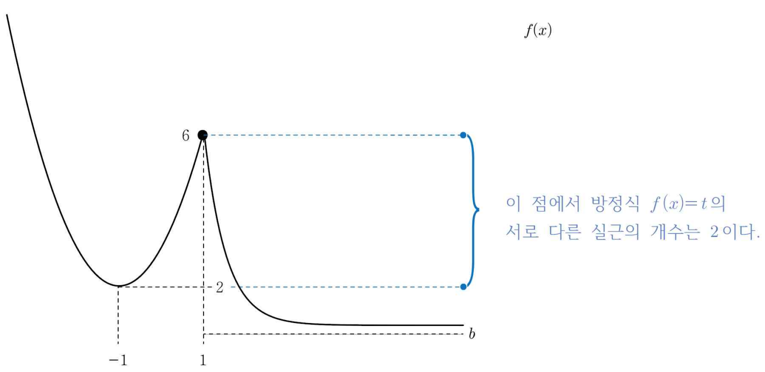
step3 점근선을 기준으로 조건을 만족시키는 상황 찾기

$f(1)=6$이므로 $t=6$일 때 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

이때, $b>2$이거나 $b<2$라면,



($b>2$인 경우)



($b<2$인 경우)

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이도록 하는 t의 값이 추가적으로 존재하므로 모순이다.

따라서

$$b=2$$

이고, $f(1)=6$으로부터

$3^{1+a}+b=6 \rightarrow 3^a=12$

이다. $3^{-1+a}+b=6$

$\therefore\ 9^a+b=(12)^2+2=146$

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 모두 정수이다. 세 수

$$f'(-1)f'(0)\ ,\ f(1)f(3)\ ,\ f(4)f(6)$$

이 모두 음수일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

정답: 20

해설:

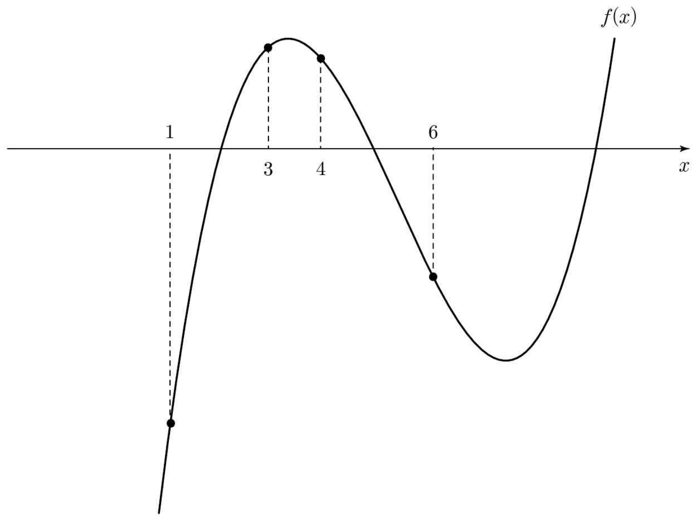
step1 $f(x)$의 개형 찾기

두 수의 곱이 음수라는 것은, 한 수는 양수, 한 수는 음수임을 의미한다.

$f(4)f(6)$이 음수임을 이용해 경우를 나누어 보자.

1) $f(4)>0$, $f(6)<0$인 경우

$f(1)f(3)<0$이므로 $f(1)<0$, $f(3)>0$이어야 하는데,



이 경우

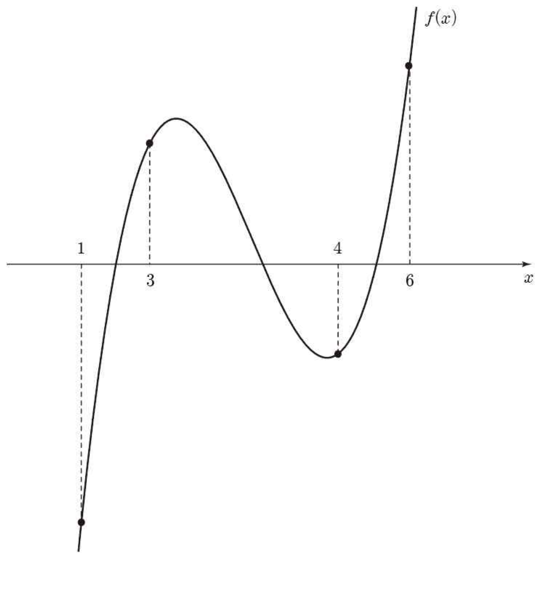
$f'(-1)>0$, $f'(0)>0$이므로 $f'(-1)f'(0)<0$을 만족하지 않는다.

2) $f(4)<0$, $f(6)>0$인 경우

$f(1)f(3)<0$이므로

$f(3)>0$, $f(1)<0$ 이거나 $f(3)<0$, $f(1)>0$이다.

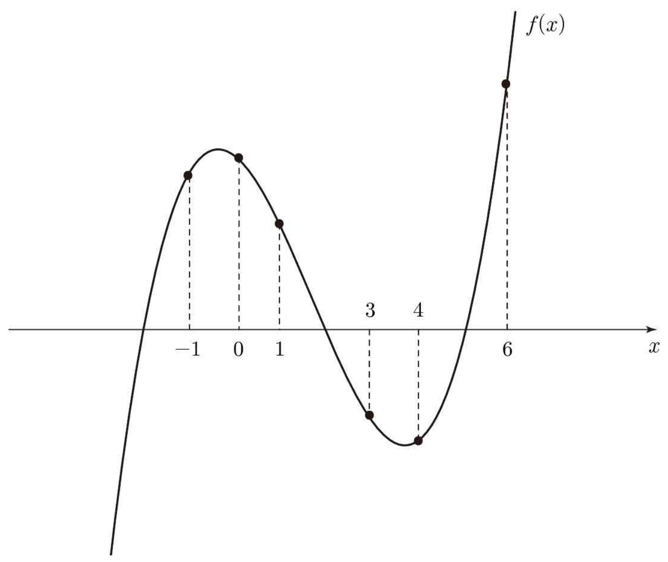
2-ⅰ) $f(3)>0$, $f(1)<0$인 경우



이때

$f'(-1)>0$, $f'(0)>0$이므로 $f'(-1)f'(0)<0$을 만족하지 않는다.

2-ⅱ) $f(3)<0$, $f(1)>0$인 경우



이때 $f'(-1)f'(0)<0$이므로 $f'(-1)\overset{>}{\cancel{<}}0$, $f'(0)\overset{<}{\cancel{>}}0$이다.

step2 $f(x)$의 식 구하기

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 모두 정수이므로,

그 중 두 실근은 $x=2$와 $x=5$이다.

따라서

$$f(x)=(x-p)(x-2)(x-5)$$

라 하면, (단, $p<-1$)

$$f'(0)=7p+10<0$$

$$f'(-1)=9(p+1)+18>0$$

이므로 ~~수 p의 값은~~ $p=-2$이다.

$\therefore$ $f(x)=(x+2)(x-2)(x-5)$ → $f(0)=20$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.