특수상대성 이론

0. 광속 불변

광속은 어느 관성계에서 보든 항상 c다. 이를 통해 시간을 거리로 바꾸는 것을 할 수 있다.

1. 동시성

한 점 동시성

한 점에서 동시에 일어난 사건은 어떤 관성계에서 보든 항상 동시이다.

관성계 동시

특정 관성계에서 사건 P와 Q가 각각 점 A와 B에서 동시에 일어났다고 할 때, 그것은 A와 B의 중점인 점 C에서 두 사건을 동시에 관측*할 수 있음을 의미한다. 사건 P와 Q가 발생함과 동시에 (각각 한 점 동시성) 점 A와 B에서 빛을 발사했을 때, 점 C에 두 빛이 동시에 도달(한 점 동시성)이라는 것이다.

Note* 사건의 발생과 관찰

사건 P가 점 A에서 발생하였고, 그것을 점 O의 관찰자가 관찰한 사건을 사건 Q라 하자. 사건 Q는 마치 사건 P와 동시에 점 A에서 방출된 빛이 점 O에 도달하는 사건과 같다.

관찰 또한 사건이다.

2. 시각과 시간의 측정

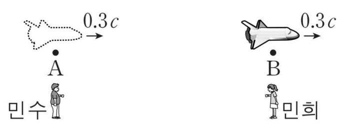
한 점에서의 시간(고유 시간)

한 점에서 일어난 두 사건 간의 시간은 그 점에서의 시계로 측정하면 되며, 이것을 고유 시간이라고 한다.

시각의 동기화 - 시간을 정의하는 방법

아래는 2016학년도 9월 모의고사 물리I 6번 문항의 일부이다.

(다) A에 정지해 있는 관측자 민수는 일정한 속도 $0.3c$로 날아가는 우주선이 A를 지나는 시각 t_A를 측정하고, B에 정지해 있는 관측자 민희는 그 우주선이 B를 지나는 시각 t_B를 측정하여, 시간 $T_3 = t_B - t_A$를 계산한다.



[유의 사항]

○ 각 관측자는 자신의 위치에 고정된 시계로 시간을 측정한다.

○ (다)에서 민수와 민희의 시계는 A, B를 잇는 선분의 중점에서 보았을 때 서로 같은 시각을 가리키도록 미리 맞춘다.

이렇게 시각의 동기화를 하면 서로 다른 점에서 일어난 사건 간의 시간을 정의할 수 있다.

3. 길이

고유 길이

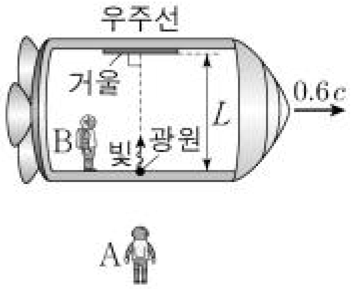
고유 길이는 (특정 관성계에서) 정지해 있는 두 점 사이의 거리이다.

점 A와 점 B사이의 고유 길이를 재는 방법으로는 점 A에서 출발한 빛이 B에서 반사되어 A로 돌아오는 시간을 이용하는 것이 대표적이다.

4. 상대성

시간 팽창

아래는 21년 9월 물리학I 11번 문항의 그림이다.(그림만 참조함)



B의 관성계에서, 빛이 반사되어 광원으로 되돌아오는 데 걸린 시간은 고유 시간이고, t_0라 하자.

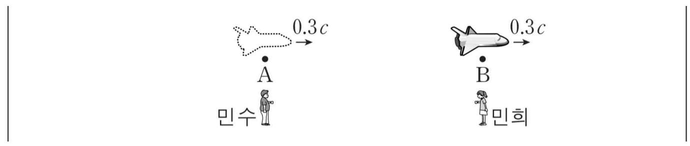
이때 $2L = ct_0$가 성립한다. A의 관성계에서 걸린 시간을 t라 하고, 우주선이 움직이는 속도를 v라 하자.

이때 $2\sqrt{L^2+\left(\frac{vt}{2}\right)^2} = ct$이 성립하고, 정리하면 $t = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$이 된다.

$t_0 = \frac{2L}{c}$과 $t = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$를 쉽게 비교하기 위해 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$인 로렌츠 인자를 도입한다.

$t = t_0\gamma$이다. 이것을 **시간 팽창**이라고 한다.

길이 수축



그림의 상황에서 점 A를 우주선이 지나는 사건 P부터 점 B를 우주선이 지나는 사건 Q까지 걸린 시간과 점 A와 점 B사이의 거리를 민수와 민희의 관성계, 우주선의 관성계에서 각각 파악해 보자.(우주선의 속도는 v이다.)

우주선의 관성계에서 사건 P와 사건 Q사이의 시간 : 고유시간(t_0)

민수와 민희의 관성계에서 사건 P와 사건 Q사이의 시간 : 팽창된 시간($t_0\gamma$)

우주선의 관성계에서 점 A와 점 B사이의 거리 : 수축된 길이($L = t_0 v$)

민수와 민희의 관성계에서 점 A와 점 B사이의 거리 : 고유길이($L_0 = t_0 v\gamma$)

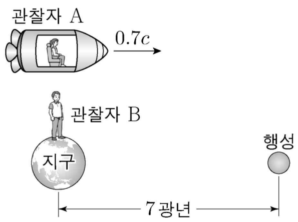
파악해본 바와 같이 두 점이 정지해있지 않는 관성계에서 두 점 사이의 거리를 측정하면

$L = \frac{L_0}{\gamma}$로 **길이수축**이 일어남을 알 수 있다.

4. 상대성에 대한 예제

아래는 20년 6월 물리학I 12번 문제이다.

12. 그림과 같이 관찰자 A가 탄 우주선이 행성을 향해 가고 있다. 관찰자 B가 측정할 때, 행성까지의 거리는 7 광년이고 우주선은 $0.7c$의 속력으로 등속도 운동한다. B는 멀어지고 있는 A를 향해 자신이 측정하는 시간을 기준으로 1 년마다 빛 신호를 보낸다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, c는 빛의 속력이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. A가 B의 신호를 수신하는 시간 간격은 1 년보다 짧다.
ㄴ. A가 측정할 때, 지구에서 행성까지의 거리는 7 광년보다 작다.
ㄷ. B가 측정할 때, A의 시간은 B의 시간보다 느리게 간다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

관찰자 A와 관찰자 B의 각각에서 **빛 신호를 보내는 시간 간격과 빛 신호를 받는 시간 간격**을 측정해 보자.(1년을 단위 시간 T로 표기하겠음)

A의 관성계에서 빛 신호를 보내는 시간 간격은 $T\gamma$로 팽창된 시간이다.

B의 관성계에서 빛 신호를 보내는 시간 간격은 T이다.

A의 관성계에서 빛 신호를 받는 시간 간격을 구하는 과정은 아래와 같다.

빛 신호를 보내는 시간 간격이 $T\gamma$이라는 것은 1번째 빛 신호를 보낼 때보다 2번째 빛 신호를 보낼 때 우주선과 B의 거리는 $Tv\gamma$만큼 멀어져 있다는 것을 의미한다.(우주선은 정지, 지구가 움직임)

$t=0$일 때 빛 신호를 받았다면, $t=T\gamma$일 때 빛 신호는 우주선보다 $Tv\gamma$만큼 뒤에 있다. 빛 신호가 도달하기까지 남은 시간을 t'이라고 하면, $ct'=Tv\gamma$라는 식으로부터 $t'=\dfrac{Tv\gamma}{c}$이다. 따라서 구하는 시간 간격은 $T\gamma+\dfrac{Tv\gamma}{c}=\dfrac{c+v}{c}T\gamma$

B의 관성계에서 빛 신호를 받는 시간 간격을 구하는 과정은 아래와 같다.

빛 신호를 보내는 시간 간격이 T이므로, 1번째 빛 신호를 보낼 때보다 2번째 빛 신호를 보낼 때 우주선과 B의 거리는 Tv만큼 멀어져 있다.(지구 정지, 우주선이 움직임)

$t=0$일 때 빛 신호를 받았다면, $t=T$일 때 우주선은 빛 신호보다 Tv만큼 앞에 있다. 빛 신호가 도달하기까지 남은 시간을 t''이라고 하면, $ct''=vt''+Tv$라는 식으로부터 $t''=\dfrac{Tv}{c-v}$이다. 따라서 구하는 시간 간격은 $T+\dfrac{Tv}{c-v}=\dfrac{c}{c-v}T$이다.

A의 관성계에서 빛 신호를 받는 시간 간격은 한 점에서 일어난 두 사건 간의 시간이므로, 고유 시간이며, B의 관성계에서 빛 신호를 받는 시간 간격은 팽창된 시간이라는 것이다.

$\dfrac{c+v}{c}T\gamma$를 t_A, $\dfrac{c}{c-v}T$를 t_B라 하면 $\dfrac{t_B}{t_A}=\dfrac{c^2}{(c^2-v^2)\gamma}=\gamma$가 되는 것을 통해 확인해 볼 수 있다.

5. 동시성의 상대성

유도

A의 관성계에서 사건 P와 사건 Q가 점 p, 점 q에서 동시에 일어난다고 하자. 사건이 일어남과 동시에 빛을 쏘아 점 m에 두 빛이 동시에 도달하였다. (p m q)

B의 관성계에서 바라볼 때 점 p, m, q가 $+x$방향으로 움직인다고 하자. 한 점 동시성은 불변이므로, 점 m에 두 빛이 동시에 도달하는 것은 변하지 않는다. q에서 쏜 빛이 m에 도달하는 시간이 p에서 쏜 빛이 m에 도달하는 시간보다 짧기 때문에, p에서 먼저 빛을 쏘게 된다.

암기

한 관성계에서 동시에 일어난 사건은 다른 관성계에서 볼때 원래 관성계의 운동방향의 반대방향 사건이 먼저 발생한다.

추가적 이해

광원 3개가 ㅗ모양으로 배치되어 있는 경우에도 이 암기된 내용은 성립하는데, 동일하게 두 광원에 대해 점 m을 설정하고 점 m까지 빛이 도달하는 시간이 누가 짧은지를 볼 때 y방향의 길이는 같게 되어 의미가 없고, x방향(진행방향)만 대소비교에 의미를 갖는 것을 확인해 볼 수 있다.

6. 단일 광선 전진

유도1(수식적 유도)

(x방향) 고유길이가 L인 우주선이 있다. 우주선의 왼쪽에 광원이 있고, 오른쪽에는 반사판이 있다.

우주선의 관성계에서 광원에서 반사판까지 빛이 진행하는 시간을 t_1, 반사판에서 광원까지 빛이 진행하는 시간을 t_2라 하자. $t_1 = \frac{L}{c}$, $t_2 = \frac{L}{c}$이다.

외부 관찰자가 보았을 때 우주선이 $+x$방향으로 속력 v로 진행한다고 하자. 광원에서 반사판까지 빛이 진행하는 시간을 t_1'이라 하면, 우주선의 길이는 $\frac{L}{\gamma}$이므로 $ct_1' = vt_1' + \frac{L}{\gamma}$, $t_1' = \frac{L}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\gamma$이며,

반사판에서 광원까지 빛이 진행하는 시간을 t_2'이라 하면, $ct_2' + vt_2' = \frac{L}{\gamma}$, $t_2' = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)\gamma$이다.

또한 시간팽창에 의해 $t_1' + t_2' = \frac{2L}{c}\gamma$ 또한 성립한다.

유도2(정성적 유도)

유도1에서 설정한 것처럼, 우주선이 움직이는 방향과 같게 움직인 빛의 경로의 길이를 ct_1', 우주선과 반대 방향으로 움직인 빛의 경로의 길이를 ct_2'이라 하자. 정성적으로 두 가지를 쉽게 알 수 있다.

$ct_1' + ct_2' > 2L$(왕복한 경로는 시간 팽창에 의해 고유 길이보다 크다)와 $ct_2' < \frac{L}{\gamma}$(우주선과 반대 방향으로 움직였을 때 수축된 길이보다도 더 짧게 움직인다)이다.

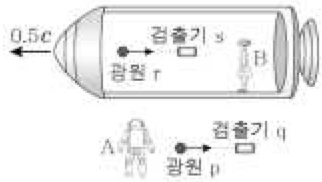
이때 $ct_2' < L$도 역시 참이므로 $ct_1' > L$임을 추론할 수 있다.

해석

ct_2'(우주선과 반대방향 빛의 경로) < 수축된 길이 < 고유 길이 < ct_1'(우주선과 같은방향 빛의 경로)

****6. 단일 광선 전진에 대한 예제**

13. 그림과 같이 관찰자 A에 대해 광원 p와 검출기 q는 정지해 있고, 관찰자 B, 광원 r, 검출기 s는 우주선과 함께 $0.5c$의 속력으로 직선 운동한다. A의 관성계에서 빛이 p에서 q까지, r에서 s까지 진행하는 데 걸린 시간은 t_0으로 같고, 두 빛의 진행 방향과 우주선의 운동 방향은 반대이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, 빛의 속력은 c이다.) [3점]

① A의 관성계에서, r에서 나온 빛의 속력은 $0.5c$이다.
② A의 관성계에서, r와 s 사이의 거리는 ct_0보다 작다.
③ B의 관성계에서, p와 q 사이의 거리는 ct_0보다 크다.
④ B의 관성계에서, A의 시간은 B의 시간보다 빠르게 간다.
⑤ B의 관성계에서, 빛이 r에서 s까지 진행하는 데 걸린 시간은 t_0보다 크다.

1) 광속은 어느 관성계에서 관찰하든 c이다. (x)
2) A의 관성계에서 우주선 반대방향 단일광선이 이동한 경로(ct_0)는 수축된 길이(A의 관성계에서 r과 s사이의 거리)보다 짧다.(x)
3) ct_0는 p와 q 사이의 고유길이이고, 길이수축되므로 작다(x)
4) x
5) B의 관성계에서 r에서 s까지 거리가 ct_0보다 크다. (o)