제 2 교시

2026년 고2 내신 대비 R16 모의고사

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

랑데뷰수학-내신을 보다! R16 제0회

3. 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
4. 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
5. 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 3점 또는 4점입니다.

R16 모의고사

① 고2 과정의 중상난이도 14문항과 고난이도 2문항으로 구성된 콘텐츠

② 전문항 자작 문항이다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 황보백T

2026년 고2 내신 대비 R16 제0회

제 2 교시

수학 영역

2026년 랑데뷰 프리미엄 자료실 자료 구성 보고

월정액에 포함되는 자료
*중3 R8 한글 4회분
*고1 R12 한글 4회분
*고2 R16 한글 4회분
*고3 R20 한글 4회분

1. R8→8문항 / R12→12문항 / R16→16문항/ R20→공통15+선택5 총 30문제)
2. 월정액에 포함되는 R8/R12/R16/R20은 기존 심화교재 문제의 약간변형이거나 이전년도에 제작된 문항의 재탕
4. 프로모션의 중3/고1/고2 콘텐츠는 학교 시험 범위에 맞춰서 제작
5. 신규 문항으로 구성되는 R-20, R-30 시리즈와 지역 한정 R+20, R+30은 가격 대폭 할인

	중3 (8문항 모의고사)	
월정액	1월~10월	R8 월 4회분 한글

	고1 (12문항 모의고사)	
월정액	1월~12월	R12 월 4회분 한글

	고2 (16문항 모의고사)	
월정액	1월~12월	R16 월 4회분 한글

	고3&N수 (20문항 모의고사)	
월정액	1월~10월	R20 월 4회분 한글

(1) 월정액에 포함되는 기본 자료 일정표 (자료 샘플 요청하시면 보내드립니다.)

	기본 자료			
월정액/월	중3	고1	고2	고3&N수
25년 12월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
26년 1월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
2월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
3월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
4월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
5월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
6월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
7월	R8 4회분	R12 3회분	R16 4회분	R20 4회분
8월 휴가 및 재충전	**R8 2회분**	**R12 2회분**	**R16 2회분**	**R20 2회분**
9월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
10월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
11월		R12 4회분	R16 4회분	

수학 영역

그 외 프로모션

중3	각 학기 중간 기말고사 대비 1회분
고1	3,6,9,10 모고 대비 각 1회분
고2	3,6,9,10 모고 대비 각 1회분
고3	① 3,5,6,7,9,10 모고 대비 각 1회분 ② 수능특강 변형 ③ 수능완성 변형 ④ 교육청 모고 싱크로율 99% ⑤ 평가원 모고 분석서 ⑥ 강K 또는 서바이벌 주요문항

(2) 프로모션 일정표 (자료 샘플 요청하시면 보내드립니다.)

프로모션	EBS & 모의고사	중3	고1	고2	고3&N수
2월					수특/수완변형 (입고일에 맞춰서 정할 예정)
3월	3월 24일		(3모 대비 -3월10일 전)	(3모 대비 -3월10일 전)	(3모 대비 -3월10일 전) (3모 싱크로율 -3월28일 전)
4월		1학기 중간고사 대비 1회분			(5모 대비 -4월23일 전)
5월	5월 7일		(6모 대비 -5월21일 전)	(6모 대비 -5월21일 전)	(5모 싱크로율 -5월9일 전) (6모 대비 -5월21일 전)
6월	6월 4일				(6모 싱크로율 -6월6일 전) (6모 분석서 -6월19일 전) (7모 대비 -6월24일 전) (7모 싱크로율 -7월11일 전)
7월	7월 8일	1학기 기말고사 대비 1회분			
8월			(9모 대비 -8월19일 전)	(9모 대비 -8월19일 전)	(9모 대비 -8월19일 전)
9월	9월 2일	2학기 중간고사 대비 1회분			(9모 싱크로율 -9월5일 전) (9모 분석서 -6월18일 전)
10월	10월 20일	2학기 기말고사 대비 1회분	(10모 대비 -10월6일 전)	(10모 대비 -10월6일 전)	(10모 대비 -10월6일 전) (10모 싱크로율 -10월23일 전)
11월	11월19일 (수능)				(수능 싱크로율 -미정) (수능 분석서 -미정)

중상난이도

1. 이차함수 $f(x)$와 자연수 $n(n \geq 2)$에 대하여 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자.

$$0 < g(10) < g(8),\ f(8) = g(8) - g(10)$$

이고 $f'(10) = 0$일 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 상수 a에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} x + a + 1 & (x < 0) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2a - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x) - a\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a의 값은? (단, $a > 0$) [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

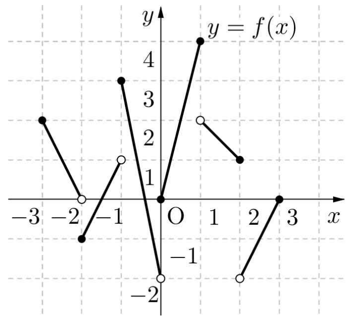
3. 두 양수 $a(a \neq 1)$, b에 대하여

$$\log_a b = \log_2 3,\ \log_6(ab) = \log_8 11$$

일 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt[3]{11}}{2}$ ② $\sqrt[3]{11}$ ③ $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

4. 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$$\lim_{x\to -1-} f(x) \times \lim_{x\to -3+} f(x) \times \lim_{x\to a+} f(x) = \left\{ \lim_{x\to -2+} f(x) - \lim_{x\to 2+} f(x) \right\} \times \lim_{x\to a-} f(x)$$

일 때, 상수 a의 값은? (단, a는 정수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 2이상의 자연수 n에 대하여 $(n-k)^2(n-k-2)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. 10보다 작은 홀수 a에 대하여

$$f(5)+f(6)+f(7)=f(8)+f(a)$$

이 되도록 하는 a와 k의 곱인 $a\times k$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, k는 상수이다.) 〔4점〕

① 80 ② 84 ③ 88 ④ 92 ⑤ 96

6. 다항함수 $f(x)$와 0이 아닌 상수 a에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x^3-f(x)}=-\frac{1}{a},\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=a$$

일 때, $f(a-3)$의 값은? 〔4점〕

① 58 ② 60 ③ 62 ④ 64 ⑤ 66

7. $a \geq b \geq 2$인 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |a^{x+1}-b| & (x \leq 0) \\ (a+b)(x-1)^2+(a-b) & (x>0) \end{cases}$$

이다. x에 대한 방정식 $f(x)=t$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 t의 개수가 9일 때, 가능한 모든 $a+b$의 값의 합은? [4점]

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x<1) \\ a(x+1)^2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{3}{15}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{5}{15}$

9. 곡선 $y=2^x-\frac{5}{3}$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 원점 O가 한 직선 위에 있고 $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{7\sqrt{5}}{4}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $\frac{\sqrt{85}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{85}}{2}$

10. 실수 $t\,(t>1)$에 대하여 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-2,\,0)$, $\mathrm{P}(t,\,2t-1)$이 있다. 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 Q를 Q_1이라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\overline{\mathrm{OQ}_1}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

11. 상수 $a(a>1)$에 대하여 곡선 $y=\log_a x$ 위의 x좌표가 각각 α, β, γ $(0<\alpha<1<\beta<\gamma)$인 서로 다른 세 점 A, B, C와 점 D$(1, 0)$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값은? (단, α, β, γ는 양의 실수이다.) [4점]

(가) $\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}=3\triangle\mathrm{ABD}$ (나) 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는 1이고 점 B는 곡선 $y=a^{2x-3}-1$위의 점이다.

① $\frac{39}{7}$ ② $\frac{40}{7}$ ③ $\frac{41}{7}$ ④ 6 ⑤ $\frac{43}{7}$

12. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+|(x-1)f(x)|}{f(x-1)-1}=-\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

13. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & (x<b) \\ (2x+a)^2 & (x \geq b) \end{cases}$$

이다. 방정식 $f(x)f(2-x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 함수 $f(x)f(2-x)$는 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(-2a)+f(3b)$의 최솟값은? [4점]

① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

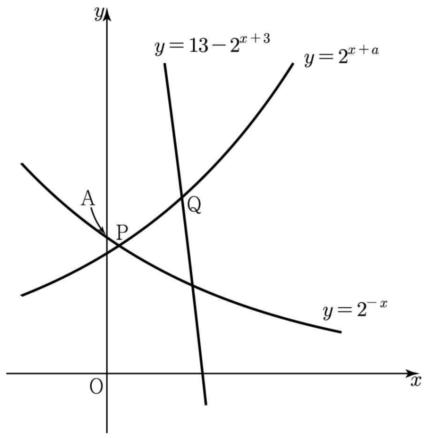
14. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+a) \leq -5x+15 \\ \dfrac{1}{a}\times 3^x \geq -5x+15 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x가 하나뿐일 때, 자연수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

고난이도

15. 곡선 $y=2^{x+a}$이 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=13-2^{x+3}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 P, Q를 지나는 직선의 y절편을 R라 할 때, $\overline{QR}=2\overline{QP}$를 만족시킨다. 곡선 $y=2^{-x}$이 y축과 만나는 점이 A일 때 삼각형 APQ의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [4점]



① $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\log_2\frac{\sqrt{6}}{4}$　② $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}$

③ $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}$　④ $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\log_2\sqrt{6}$

⑤ $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\log_2\sqrt{6}$

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{f(2x)}-\frac{f(2x)}{f(x)}\right\}=k\ (k<-4)$

(나) $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\frac{f(2x)}{f(x)}-\frac{f(x)}{f(2x)}\right\}=\frac{80}{9}$

$f(1)$의 최댓값을 M이라 할 때, $|M\times k|$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2026년 고2 랑데뷰 R16모의고사 제0회 - 빠른답

〔제작자 : 랑데뷰 황보백T
010-5673-8601〕

R16	1	②	2	④	3	②	4	④	5	②
	6	④	7	②	8	②	9	⑤	10	③
	11	③	12	③	13	①	14	240	15	③
	16	63								

2026년 고2 랑데뷰 R16모의고사 제0회 - 풀이

〔제작자 : 랑데뷰 황보백T
010-5673-8601〕

1) 정답 ②

n이 짝수일 때, 0이 아닌 $g(n)$의 값은 1 또는 2이다.

$0 < g(10) < g(8)$에서 $g(10)=1$, $g(8)=2$이다.

따라서 $f(10)=0$, $f(8)>0$이다.

이차함수 $f(x)$가 $x=10$에서 극값 0을 가지므로

$f(x)=a(x-10)^2$ $(a>0)$꼴이다.

$f(8)=g(8)-g(10) \rightarrow f(8)=2-1=1$

에서 $4a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}(x-10)^2$이므로 $f(6)=4$이다.

2) 정답 ④

함수 $\{f(x)-a\}^2$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)-a\}^2=1$, $\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)-a\}^2=(a-1)^2$

$1=(a-1)^2$

$a^2-2a=0$

$a>0$이므로 $a=2$

3) 정답 ②

$\log_a b=\log_2 3 \rightarrow a^{\log_2 3}=b$

$\log_6(ab)=\log_6\left(a\times a^{\log_2 3}\right)=\log_6\left(a^{\log_2 6}\right)$이므로

$a^{\log_2 6}=6^{\log_8 11}$

$6^{\log_2 a}=6^{\log_8 11}$

$\log_2 a=\log_2 \sqrt[3]{11}$

$\therefore\ a=\sqrt[3]{11}$

4) 정답 ④

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)\times\lim\limits_{x\to-3+}f(x)\times\lim\limits_{x\to a+}f(x)$

$=1\times2\times\lim\limits_{x\to a+}f(x)=2\lim\limits_{x\to a+}f(x)$

$\left\{\lim\limits_{x\to-2+}f(x)-\lim\limits_{x\to2+}f(x)\right\}\times\lim\limits_{x\to a-}f(x)$

$=\{-1-(-2)\}\times\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)$

따라서 $2\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)$

$a=1$일 때, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=4$

5) 정답 ②

$g(n)=(n-k)^2(n-k-2)$라 할 때,

$n<k$, $k<n<k+2$일 때, $g(n)<0$ …… ㉠

$n=k$, $n=k+2$일 때, $g(n)=0$ …… ㉡

$n>k+2$일 때, $g(n)>0$ …… ㉢

이고

n이 짝수일 때, $f(n)$의 값은

$g(n)<0$일 때, 0

$g(n)=0$일 때, 1

$g(n)>0$일 때, 2

이다.

a가 홀수이고 모든 홀수 n에 대하여 $f(n)=1$이므로

$f(5)+f(6)+f(7)=f(8)+f(a)\ \rightarrow\ 1+f(6)=f(8)$

$1+f(6)=f(8)$을 만족시키기 위해서는

(i) $f(6)=0$, $f(8)=1$일 때,

$\rightarrow\ k=8$ ($\because$ ㉠, ㉡)

(ii) $f(6)=1$, $f(8)=2$일 때,

$\rightarrow\ k=6$일 때, $k+2=8$이므로 $f(6)=f(8)=1$으로 모순이다.

($\because$ ㉡)

$\rightarrow\ k=4$일 때, $k+2=6$이므로 $f(6)=1, f(8)=2$ ($\because$ ㉢)

따라서 $k=4$

(i)에서 $a\times k$의 최댓값은 $a=9$, $k=8$일 때 72이다.

(ii)에서 $a\times k$의 최솟값은 $a=3$, $k=4$일 때 12이다.

따라서

$a\times k$의 최댓값과 최솟값의 합은 84이다.

6) 정답 ④

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x^3-f(x)}=-\dfrac{1}{a}$에서 함수 $f(x)=2x^3+ax+b$이라 할 수 있다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$의 값이 존재하므로 $f(1)=0$이다.

$f(1)=2+a+b=0\ \rightarrow\ b=-a-2$

$$\begin{aligned}f(x)&=2x^3+ax-a-2\\&=2(x^3-1)+a(x-1)\\&=(x-1)(2x^2+2x+2+a)\end{aligned}$$

이므로

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2+2x+2+a)}{(x-1)(x+1)}=\frac{a+6}{2}$$

$2a=a+6$

$\therefore\ a=6$

$f(x)=(x-1)(2x^2+2x+8)$이므로 $f(a-3)=f(3)=2\times 32=64$이다.

7) 정답 ②

$a\ge b\ge 2$인 두 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}-b$가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $x=\log_a b-1$이고 0보다 작거나 같다.

점근선의 방정식은 $y=-b$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 점근선의 방정식은 $y=b$이다.

또한 y축과 만나는 점의 y좌표는 $a-b$이고 $a-b\ge 0$이다.

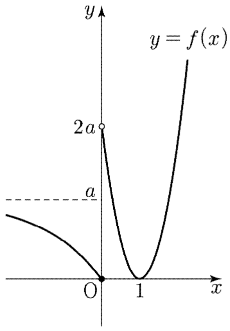
한편 곡선 $y=(a+b)(x-1)^2+(a-b)$가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $2a$이고 $x=1$에서 최솟값 $a-b$를 갖는다.

$a\ge b$이므로 $a=b$일 때와 $a>b$일 때, $a-b$와 b의 대소 관계 따라 경우를 나누어 생각한다.

(i) $a=b$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}|a^{x+1}-a| & (x\le 0)\\ 2a(x-1)^2 & (x>0)\end{cases}$$

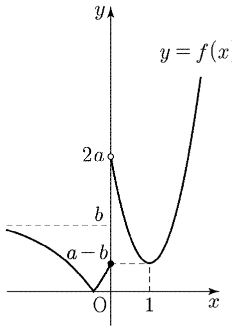
함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서 만나는 t값의 범위는 $t=0$ 또는 $a\le t<2a$이므로 정수 t의 개수는 $a+1=9$이므로 만족하는 두 자연수의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(8,\ 8)$이다.

(ii) $a-b<b$일 때,

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서 만나는 t값의 범위는 $0<t<a-b$ 또는 $b\le t<2a$이므로 정수 t의 개수는

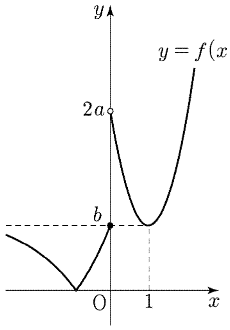
$(a-b-1)+(2a-b)=9$

$3a-2b=10$

이고 $b<a<2b$이므로 만족하는 두 자연수의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(6,\ 4)$, $(8,\ 7)$이다.

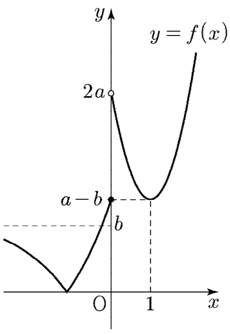
(iii) $a-b=b$일 때,

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서 만나는 t값의 범위는 $0<t<2a$이므로 정수 t의 개수는 $2a-1=9$, $a=5$일 때, $b=\frac{5}{2}$으로 자연수가 아니다.
따라서 조건을 만족하는 두 자연수의 순서쌍 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

(iii) $a-b>b$일 때,
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서 만나는 t값의 범위는 $0<t<b$ 또는 $a-b\le t<2a$이고 정수 t의 개수는
$(b-1)+(a+b)=9$
$a+2b=10$
에서 $a>2b$이고 $a+2b=10$을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(6,\ 2)$이다.

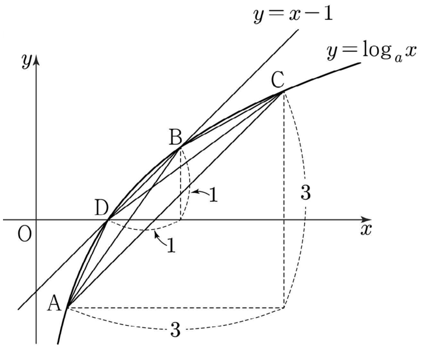
(i)~(iv)에서 조건을 만족하는 모든 $(a,\ b)$는 $(8,\ 8)$, $(6,\ 4)$, $(8,\ 7)$, $(6,\ 2)$이므로 가능한 모든 $a+b$의 값의 합은
$(8+8)+(6+4)+(8+7)+(6+2)=49$이다.

8) 정답 ②
함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$에서 연속이면 된다.
$\lim_{x\to1-}|f(x)|=\lim_{x\to1+}|f(x)|\ \rightarrow\ |1+a|=|4a|$
(i) $1+a=4a$일 때, $a=\frac{1}{3}$
(ii) $1+a=-4a$일 때, $a=-\frac{1}{5}$
따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$

9) 정답 ⑤
$\overline{OB}=2\overline{OA}$이므로 양수 t에 대하여 점 A의 x좌표를 $-t$, 점 B의 x좌표를 $2t$라 할 수 있다.
$A\left(-t,\ 2^{-t}-\frac{5}{3}\right)$, $B\left(2t,\ 2^{2t}-\frac{5}{3}\right)$
세 점 $O(0,\ 0)$, A, B가 한 직선 위에 있으므로
$$\frac{2^{-t}-\frac{5}{3}}{-t}=\frac{2^{2t}-\frac{5}{3}}{2t}$$
$2^t=a\ (a>0)$라 하면
$\frac{2}{a}-\frac{10}{3}=-a^2+\frac{5}{3}$
$a^2-5+\frac{2}{a}=0$
$a^3-5a+2=0$
$(a-2)(a^2+2a-1)=0$
$a>0$이므로 $a=2$ 또는 $a=-1+\sqrt{2}$이다.
$2^t=\sqrt{2}-1$에서 $2^{2t}=3-2\sqrt{2}$이고 점 B의 y좌표가
$(3-2\sqrt{2})-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}-2\sqrt{2}=\frac{4-6\sqrt{2}}{3}<0$이므로
점 B가 제4사분면 위의 점이라 모순이다.
$\therefore\ a=2$
$2^t=2$에서 $t=1$
$A\left(-1,\ -\frac{7}{6}\right)$, $B\left(2,\ \frac{7}{3}\right)$
이므로
$\overline{AB}=\sqrt{9+\frac{49}{4}}=\frac{\sqrt{85}}{2}$

10) 정답 ③
점 A를 $y=x$에 대칭이동한 점을 A′라 하자. → $A'(0,\ -2)$
$\overline{AQ}+\overline{PQ}=\overline{A'Q}+\overline{PQ}\ge\overline{A'P}$이므로
직선 A′P와 직선 $y=x$가 만나는 점이 Q_1이다.
두 점 $A'(0,\ -2)$, $P(t,\ 2t-1)$를 지나는 직선 A′P의 방정식은
$y=\frac{2t+1}{t}x-2$이다.
따라서
$\frac{2t+1}{t}x-2=x$
$\frac{t+1}{t}x=2$
$x=\frac{2t}{t+1}$
$Q_1\left(\frac{2t}{t+1},\ \frac{2t}{t+1}\right)$
$\therefore\ \overline{OQ_1}=\frac{2\sqrt{2}t}{t+1}$
$\lim_{t\to\infty}\overline{OQ_1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{2}t}{t+1}=2\sqrt{2}$

11) 정답 ③
$A(\alpha,\ \log_a\alpha)$, $B(\beta,\ \log_a\beta)$, $C(\gamma,\ \log_a\gamma)$이다.
두 삼각형 ACD와 ABC이 한 변 AC를 공유하고 (가)에서 $\triangle ACD=\triangle ABC$이므로 점 D와 직선 AC사이의 거리와 점 B와 직선 AC사이의 거리가 같다.
따라서 직선 BD는 직선 AC와 평행하다.
평행한 두 직선 사이의 거리를 h라 하면
$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times h$, $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times h$이고
$\triangle ACD=3\triangle ABD$에서 $\overline{AC}=3\overline{BD}$이다. …… ㉠



(나)에서 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는 1이므로 직선 BD의 방정식은 $y=x-1$이다.

따라서 점 $\mathrm{B}(\beta,\ \beta-1)$이다.

$\therefore\ \log_a\beta=\beta-1$ …… ㉡

(나)에서 점 B가 곡선 $y=a^{2x-3}-1$ 위의 점이므로

$a^{2\beta-3}-1=\beta-1$이다.

㉡에서 $a^{\beta-1}=\beta$이므로

$a^{2\beta-3}=a^{\beta-1}$

$2\beta-3=\beta-1$에서 $\beta=2$이다.

㉡에서 $a=2$이다.

따라서

$\mathrm{A}(\alpha,\ \log_2\alpha)$, $\mathrm{D}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$, $\mathrm{C}(\gamma,\ \log_2\gamma)$이다.

이때, 점 D를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이 B이므로 ㉠에서 점 A를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이 C이다.

따라서

$\gamma=\alpha+3$, $\log_2\gamma=\log_2\alpha+3$

에서

$\log_2(\alpha+3)=\log_2 8\alpha$

$\alpha=\dfrac{3}{7}$이다.

따라서

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{7}+2+\dfrac{24}{7}=\dfrac{3+14+24}{7}=\dfrac{41}{7}$

12) 정답 ③

$x\to1$일 때, (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=1$

$f(x)=x(ax^2+bx+c)+1$

$g(x)=(x-1)f(x)$라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=1$의 좌우에서 부호가 바뀌면

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)+|g(x)|}{f(x-1)-1}$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

$f(1)=0\ \to\ f(1)=a+b+c+1=0$

$c=-1-a-b$

$f(x)=x(ax^2+bx-1-a-b)+1$

$\quad=ax^3+bx^2-(1+a+b)x+1$

$\quad=(x-1)\{ax^2+(a+b)x-1\}$

$f(x-1)-1$

$=(x-2)\{a(x-1)^2+(a+b)(x-1)-1\}-1$

$=(x-2)\{ax^2+(-a+b)x-b-1\}-1$

$=(x-2)\{ax^2+(-a+b)x-b\}-x+1$

$=(x-2)(ax+b)(x-1)-(x-1)$

$=(x-1)\{(x-2)(ax+b)-1\}$

에서 (분모)의 식도 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 하므로

$(x-2)(ax+b)-1$이 $x-1$을 인수로 가져야 한다.

$-(a+b)-1=0$

$b=-a-1$

$(x-2)(ax+b)-1$

$=(x-2)(ax-a-1)-1$

$=ax^2-(3a+1)x+2a+1$

$=(x-1)(ax-2a-1)$

따라서

$f(x)=(x-1)(ax^2-x-1)$

$f(x-1)-1=(x-1)^2(ax-2a-1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)+|(x-1)f(x)|}{f(x-1)-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(ax^2-x-1)+|(x-1)^2(ax^2-x-1)|}{(x-1)^2(ax-2a-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{ax^2-x-1+|ax^2-x-1|}{ax-2a-1}$

$=\dfrac{a-2+|a-2|}{-a-1}$

$=\dfrac{2a-4}{-a-1}=-\dfrac{1}{2}\ \ (a>2)$

$4a-8=a+1$

$\therefore\ a=3$

$f(x)=(x-1)(3x^2-x-1)$이고

$f(2)=3\times2^2-2-1=12-3=9$

이다.

13) 정답 ①

$g(x)=f(x)f(2-x)$라 하면 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)f(2-x)=g(2-x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에 대칭이므로

함수 $g(x)$가 $x=b$에서 연속이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$x>1$에서 $g(x)\neq0$이면 $x<1$에서도 $g(x)\neq0$이므로

$g(x)=0$으로 가능한 $x=1$ 뿐이어서 모순이다.

(서로 다른 실근의 개수는 3이므로)

$x>1$에서 $g(x)=0$인 x가 2개 이상이면

$x<1$에서도 $g(x)=0$인 x가 2개 이상이므로 모순이다,

$x>1$에서 $g(x)=0$인 $x=\alpha\,(\alpha>1)$라 하면

$x<1$에서 $g(x)=0$인 $x=2-\alpha$이므로

서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$x=1$이 방정식 $g(x)=0$의 실근이어야 한다.

$g(1)=f(1)f(1)=0$이므로 $f(1)=0$

$b>1$이면 $f(1)=3$이므로 모순이다.

따라서 $b \le 1$이고 $f(1)=(2+a)^2=0$이고 $a=-2$이다.

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & (x<b) \\ (2x-2)^2 & (x \ge b) \end{cases}$$

이고

$b<1$와 $b=1$일 때를 생각해보자.

(ⅰ) $b=1$인 경우

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & (x<1) \\ (2x-2)^2 & (x \ge 1) \end{cases}$$

방정식 $f(x)=0$인 실근은 $x=-2,\ x=1$이고

방정식 $f(2-x)=0$인 실근은 $x=4,\ x=1$이므로

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은 $x=-2,\ x=1,\ x=4$

(ⅱ) $b<1$인 경우

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x \to b-$일 때, $g(x)=f(x)f(2-x) \to (-b^2+4)(2-2b)^2$

$x \to b+$일 때, $g(x)=f(x)f(2-x) \to (2b-2)^2(2-2b)^2$

이므로 $(-b^2+4)(2-2b)^2=(2b-2)^2(2-2b)^2$

$(2-2b)^2\{(2b-2)^2-(-b^2+4)\}=0$

$(2-2b)^2(5b^2-8b)=0$

이므로 $b=0,\ b=1,\ b=\dfrac{8}{5}$이지만

$b<1$이므로 $b=0$이다.

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & (x<0) \\ (2x-2)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

방정식 $f(x)=0$인 실근은 $x=-2,\ x=1$이고

방정식 $f(2-x)=0$인 실근은 $x=4,\ x=1$이므로

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은 $x=-2,\ x=1,\ x=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 b는 0 또는 1이다.

$a=-2,\ b=1$이면 $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & (x<1) \\ (2x-2)^2 & (x \ge 1) \end{cases}$이고

$f(-2a)+f(3b)=f(4)+f(3)=36+16=52$

$a=-2,\ b=0$이면 $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & (x<0) \\ (2x-2)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$이고

$f(-2a)+f(3b)=f(4)+f(0)=36+4=40$

따라서 $a=-2,\ b=0$일 때 $f(-2a)+f(3b)$의 최솟값은 40이다.

14) 정답 240

$x=3$을 대입하면

$\log_{\frac{1}{3}}(3+a) \le 0,\ 0 \le \dfrac{27}{a}$ 따라서 자연수 a의 값에 관계없이 항상 성립한다.

주어진 문제를 만족하려면

$-a<x \le 2,\ x \ge 4$인 모든 정수 x가 부등식을 만족시키지 않아야 한다.

i) $-a<x \le 2$인 모든 정수 x가 부등식을 만족시키지 않으려면

$x=2$일 때 $\dfrac{9}{a}<5$

$a>\dfrac{9}{5}$

ii) $x \ge 4$인 모든 정수 x가 부등식을 만족시키지 않으려면

$x=4$일 때

$\log_{\frac{1}{3}}(4+a)>-5$

$\log_3(4+a)<5$

$4+a<243$

$a<239$

i), ii)에 의해 a 값의 범위는 $\dfrac{9}{5}<a<239$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2, 최댓값은 238이므로 합은 240

15) 정답 ③

두 곡선 $y=2^{x+a}$이 $y=2^{-x}$와 만나는 점 P의 x좌표를 p라 하면 $2^{p+a}=2^{-p}$을 만족한

다. 양변에 2^p을 곱하면 $2^p \cdot 2^{p+a}=2^p \cdot 2^{-p}$, $2^{2p+a}=1$ …… ㉠

또, 두 곡선 $y=2^{x+a}$과 $y=13-2^{x+3}$이 만나는 점 Q의 x좌표가 q라고 하면

$2^{q+a}=13-2^{q+3}$이고 이때, $\overline{QR}=2\overline{QP}$을 만족하려면

$q=2p$이므로 $2^{2p+a}=13-2^{2p+3}$이

다. ㉠에 의해 $1=13-2^{2p+3}$, $8\times2^{2p}=12$, $2^{2p}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

$2p=\log_2\dfrac{3}{2}$

$p=\log_2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$\therefore\ p=\log_2\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $A(0,\ 1)$, $P(p,\ 2^{-p})$, $Q(2p,\ 13-2^{2p+3})$에서

$P\left(\log_2\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $Q\left(\log_2\dfrac{3}{2},\ 1\right)$

이므로 삼각형 APQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\log_2\dfrac{3}{2}\times\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\log_2\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.

16) 정답 63

(가)에서 $f(0)\neq0$이면 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{f(x)}{f(2x)}-\dfrac{f(2x)}{f(x)}\right\}=1-1=0$으로 모순이다.

따라서 $f(0)=0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)=xg(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{f(x)}{f(2x)}-\dfrac{f(2x)}{f(x)}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{xg(x)}{2xg(2x)}-\dfrac{2xg(2x)}{xg(x)}\right\}$

$=\dfrac{g(0)}{2g(0)}-\dfrac{2g(0)}{g(0)}$에서 $g(0)\neq0$이면

$= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ 으로 모순이다.

따라서 $g(0)=0$

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여

$f(x)=x^2 h(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{f(2x)} - \frac{f(2x)}{f(x)}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2 h(x)}{4x^2 h(2x)} - \frac{4x^2 h(2x)}{x^2 h(x)}\right\}$$

$= \frac{h(0)}{4h(0)} - \frac{4h(0)}{h(0)}$ 에서 $h(0) \neq 0$이면

$= \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$ 으로 모순이다.

따라서 $h(0)=0$

그러므로 $f(x)=x^3(x+a)$, $f(2x)=8x^3(2x+a)$

$\frac{f(x)}{f(2x)} = \frac{x+a}{8(2x+a)}$, $\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{8(2x+a)}{x+a}$

이다.

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{f(2x)} - \frac{f(2x)}{f(x)}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x+a}{8(2x+a)} - \frac{8(2x+a)}{x+a}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} - 8 = -\frac{63}{8}$$

$\therefore\ k = -\frac{63}{8}$

(나)에서

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(2x)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(2x)}\right\} = \frac{16+8a}{1+a} - \frac{1+a}{16+8a} = \frac{80}{9}$$

$\frac{16+8a}{1+a} = X$라 하면 $X - \frac{1}{X} = \frac{80}{9}$

$9X^2 - 80X - 9 = 0$

$(X-9)(9X+1)=0$

$X=9$ 또는 $X=-\frac{1}{9}$

(i) $\frac{16+8a}{1+a} = X = 9$일 때, $16+8a = 9+9a$

$\therefore\ a=7$

$f(x)=x^3(x+7)$

$\therefore\ f(1)=8$

(ii) $\frac{16+8a}{1+a} = X = -\frac{1}{9}$일 때, $144+72a = -1-a$

$73a = -145$

$\therefore\ a = -\frac{145}{73}$

$f(x) = x^3\left(x - \frac{145}{73}\right)$

$\therefore\ f(1) = 1 - \frac{145}{73} = -\frac{72}{73}$

(i), (ii)에서 $f(1)$의 최댓값 $M=8$이다.

따라서 $|M \times k| = \left|8 \times \left(-\frac{63}{8}\right)\right| = 63$이다.