YNTT

01 합성함수의 근본적 이해

02 적분법의 근본적 이해

03 명제와 함수의 그래프

04 명제와 도형

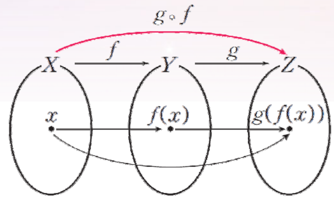
CHZZK
MATH

FREE
COLUMN

01 합성함수의 근본적 이해

학습목표 합성함수가 정의될 조건을 알고, 합성함수의 미분을 설명할 수 있다.

합성함수는 어떤 특징을 가질까?



생각열기

일반적으로 세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$$

가 주어졌을 때, 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Y의 원소 $f(x)$를 대응시키고, 다시 이 $f(x)$에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 f와 g의 **합성함수**라 하고, 기호 $g \circ f$로 나타낸다. 합성함수는 어떤 특징을 가질까?

합성함수의 정의

합성함수가 언제나 잘 정의되는 것은 아니다. 그러므로 합성함수가 정의되기 위한 조건을 확인해야한다. 또한 합성함수는 개별함수의 성질이 그대로 보존되기도 하며, 개별함수의 성질을 잃거나, 개별함수는 갖지 않았던 성질이 합성함수만의 고유한 성질로 나타날 수도 있다.

그렇다면 합성함수의 정의될 조건은 무엇이며, 합성에 의해 나타나는 여러 가지 변화는 어떻게 관찰해야할까? 개별함수가 연속함수 또는 미분가능한 함수일 때에는 연속함수의 성질과 미분가능한 함수의 성질을 적절히 이용하면 된다.

합성함수가 정의될 조건과 특징을 정리하면 다음과 같다.

두 포함관계 모두 겉함수가 주인공임에 주목하자.

정리 1.1.1 | 합성함수가 정의될 조건

두 함수 f, g에 대하여 합성함수 $f \circ g$가 정의될 필요충분조건은 g의 치역이 f의 정의역의 부분집합인 것이다.

(속함수의 치역)⊆(겉함수의 정의역)

정리 1.1.2 | 합성에 의한 치역의 변화

두 함수 f, g에 대하여 합성함수 $f \circ g$가 정의될 때, $f \circ g$의 치역은 f의 치역의 부분집합이다.

(합성함수의 치역)⊆(겉함수의 치역)

특히, f, g가 연속함수이면 **사잇값 정리**를 이용하여 위의 두 정리의 포함관계를 간단히 확인할 수 있다.

적용하기

① 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-\tan f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi$ 이면 $g(x) = x-\tan x$라 할 때 **사잇값 정리**에 따라 어떤 정수 k에 대하여 $(f$의 치역$) \subseteq \left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right) = (g$의 정의역$)$이다.

② 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2+2f(x) = a\cos x + b$이면 $g(x) = x^2+2x$, $h(x) = a\cos x + b$라 할 때 $(h$의 치역$) = [-a+b, a+b] \subseteq [-1, \infty) = (g$의 치역$)$이다.

합성함수만 가지는 고유한 특징점은 일반적으로 변곡점에서 확인할 수 있다.

정리 1.1.3 합성에 의한 특징점의 변화

연속함수 f의 미분가능하지 않은 점, 극점, 변곡점 등을 f의 **특징점**이라고 하자. 그러면 연속함수 g에 대하여 합성함수 $f \circ g$가 정의될 때, 합성함수 $f \circ g$의 대부분의 특징점은 f, g**의 특징점을 조사**하여 얻을 수 있지만, $f \circ g$**만 가지는 고유한 특징점이 존재할 수 있다.**

특히, f, g가 미분가능한 함수이면 **극값 정리**를, f, g가 이계도함수를 갖는 함수이면 **변곡점 판정법**을 이용하여 $f \circ g$의 특징점과 f, g의 특징점을 비교할 수 있다.

적용하기 함수 $h(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$에 대하여 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$라 하면 다음이 성립한다.

(1) 함수 $g(x)$는 $x = -\frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다. 실제로, 함수 $h(x)$는 $x = -\frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다.

(2) 곡선 $y = f(x)$는 위로 볼록이고, 곡선 $y = g(x)$는 아래로 볼록이다. 그러나 곡선 $y = h(x)$는 $x = -2$, $x = 1$에서 변곡점을 갖는다.

합성함수의 미분

합성함수의 미분법을 이해하기 위해, 두 가지 보조정리를 확인하자.

보조정리 1.2.1 수직선 위의 운동

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $f(t)$일 때, 시각 t에서 점 P의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

$$v = f'(t),\ a = v'(t)$$

(1) $v > 0$인 시각에서 점 P는 수직선 위에서 양의 방향으로 움직이고, $v < 0$인 시각에서 점 P는 수직선 위에서 음의 방향으로 움직인다.

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 v의 부호가 바뀌는 시각이다.

보조정리 1.2.2 매개변수로 나타낸 함수의 미분

미분가능한 함수 f, g와 매개변수로 나타낸 함수

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

에 대하여 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이다. (단, $f'(t) \neq 0$)

미분가능한 두 함수 $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$에 대하여 합성함수 $f \circ g : X \to \mathbb{R}$가 정의될 때, 함수 $y = f(g(x))$의 그래프는 $\{(t,\ f(g(t)))\,|\,t \in X\}$이다. 그러면 실수 $t \in X$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x = g(t)$로 주어질 때 함수 $y = f(g(x))$의 그래프는

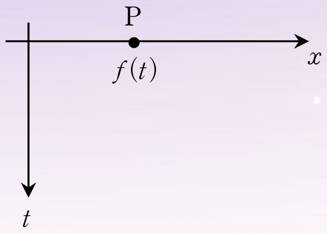
$$\{(t,\ f(x))\,|\,t \in X\}$$

로 나타낼 수 있다. 이때, 합성함수 $f(g(t))$는 결국 $x = g(t)$로 주어지는 위치에 대한 $f(x)$를 고려하는 것과 같으므로 위치 $x = g(t)$와 함수 $y = f(x)$를 나누어 관찰하면 합성함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

변수가 많아 헷갈린다면, 함수 $y = f(g(t))$의 그래프를 그리는 것으로 생각하자.

N축(?)으로 알려진 어둠의 스킬과 비슷한 관점이지만, 조금 더 근본적인 접근이다.

그렇다면 직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x=f(t)$로 주어질 때 이 점의 운동을 어떻게 이해해야할까?



위와 같이 t**축을 도입**하여 곡선 $x=f(t)$의 개형을 통해 P의 운동을 기술할 수 있고, 점 P의 운동 위에서 함수 $y=f(x)$에 의해 대응되는 점 $(t, f(x))$의 집합이 바로 합성함수 $y=f(g(x))$의 그래프인 것이다.

이러한 관점은 매개변수를 이용하여 합성함수를 정의하는 관점이라고 말할 수 있다. 이 관점에서 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하면 합성함수의 미분법을 새롭게 이해할 수 있다.

함수 $y=f(x)$를 다음과 같이 매개변수로 나타낸 함수로 나타내자.

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(g(t)) \end{cases}$$

그러면 다음을 얻는다.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\{f(g(t))\}'}{g'(t)}$$

따라서 $\{f(g(t))\}' = f'(x)g'(t) = f'(g(t))g'(t)$를 얻는다. 즉,

합성함수의 미분계수는 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기에 위치 $g(t)$의 속도가 반영된 값이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

겉함수의 접선의 기울기 곱하기 속함수의 속도로 기억하자.

정리 1.2.1 | 합성함수의 미분법

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 함수 $g(x)$가 $x=g(a)$에서 미분가능하면 합성함수 $f(g(x))$는 $x=a$에서 미분가능하고, 다음이 성립한다.

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \times g'(a)$$

정리 1.2.1와 **극값 정리**를 이용하면 **정리 1.1.3**에서 언급한 바와 같이, 미분가능한 함수 f, g, $f \circ g$의 특징점 중 극점을 조사하고 비교할 수 있다. 그렇다면 미분가능하지 않은 경우에는 어떨까?

합성함수의 미분가능성의 문제로 돌아가보자. 고등학교 수준에서 합성함수의 미분가능성은 개별함수가 정의역의 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재할 때에만 물을 수 있다. 그 이유는 교육과정의 설계에 있는데, 교과서에서는 합성함수의 미분을 증명할 때 수렴하는 극한의 성질을 이용하여 증명한다. 사실 이러한 증명은 사소한 오류가 있다. 때문에 합성함수의 미분가능성을 묻는다면 이 사소한 오류가 애초에 발생하지 않는 조건에서 물을 수 밖에 없는 것이다.

만약 좌미분계수나 우미분계수 중 어느 하나가 존재하지 않는 점이 있다면, 그 점에서만큼은 합성함수로 보는 것보다 단순히 하나의 함수로 보고 미분계수의 정의를 이용하는 것이 나을 것이다.

정의역의 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수 f, g에 대하여 합성함수 $f \circ g$가 정의되면 수렴하는 극한의 성질에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a+} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} &= \lim_{x \to a+} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a+} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \times \lim_{x \to a+} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\end{aligned}$$

$x \to a+$일 때 $t = g(x)$라 하면 $t \to g(a)+$ 또는 $t \to g(a)-$ 이다. $x \to a-$일 때에도 같은 방법을 이용하면 다음을 얻는다.

정의역의 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수는 연속함수이다.

정리 1.2.2 | 합성함수의 좌미분계수와 우미분계수

정의역의 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수 f, g에 대하여 합성함수 $f \circ g$가 정의되면 다음이 성립한다.

$(f \circ g$**의** a**에서 좌(우)미분계수**$)$

$= (f$**의** $g(a)$**에서** $\square$**미분계수**$) \times (g$**의** a**에서 좌(우)미분계수**$)$

(단, $\square$는 $x \to a+$ $(a-)$일 때 $g(x) \to g(a)+$인지 $g(x) \to g(a)-$에 따라 결정된다.)

정리 1.2.2와 **미분계수의 정의**를 이용하면 **정리 1.1.3**에서 언급한 바와 같이, 함수 f, g, $f \circ g$의 특징점 중 미분가능하지 않은 점을 조사하고 비교할 수 있다.

이제 합성함수의 변곡점을 알아보자. 고등학교 수준에서 변곡점은 이계도함수가 존재하는 함수에 대해서만 물을 수 있다. 특히, 이계도함수가 연속인 함수에 대해서는 **변곡점 판정법**을 이용하여 변곡점을 조사할 수 있다. 그렇다면 이계도함수가 존재하는 함수 f, g의 합성함수 $f \circ g$의 이계도함수는 어떻게 구할까?

합성함수 $f \circ g$가 정의되면 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$로부터

$$\{f(g(x))\}'' = \{f'(g(x))g'(x)\}' = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

이다. 위 등식 자체에 의미를 두고 관찰해보면

$g'(x) = 0$ **또는** $f'(g(x)) = 0$**일 때 한 항을 무시할 수 있음**

을 알 수 있다. 그러므로 합성함수의 이계도함수의 구조를 암기하는 것도 하나의 팁이 될 수 있다.

미분기하를 공부하다보면 더 기괴한 공식도 많이 등장한다. 이정도는 외우자!

다음과 같이 암기하도록 하자. (숫자는 미분된 횟수를 의미한다.)

(합성함수의 이계도함수) $= 2 \times 1^2 + 1 \times 2$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정리 1.2.3 | 합성함수의 이계도함수

이계도함수가 존재하는 함수 f, g의 합성함수 $f \circ g$가 정의되면 다음이 성립한다.

$$\{f(g(x))\}'' = \{f'(g(x))g'(x)\}' = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

음함수의 미분

15개정교육과정 [미적분] 및 22개정교육과정 [미적분II]에서 음함수의 미분법은 다음과 같이 소개되고 있다.

> 합성함수의 미분법을 이용하여 음함수의 꼴로 표현된 방정식 $x^2+y^2-1=0$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구해 보자.
>
> y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면
>
> $$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0)$$
>
> 이고, 합성함수의 미분법에 의하여
>
> $$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0),\ \text{즉}\ 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
>
> 이다. 따라서
>
> $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$
>
> 이다.
>
> 일반적으로 음함수의 꼴로 표현된 $f(x, y)=0$에서 $\frac{dy}{dx}$는 다음과 같이 구한다.
>
> **음함수의 미분법**
> x에 대한 함수 y가 $f(x, y)=0$의 꼴로 표현될 때, y를 x에 대한 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

음함수의 미분법에서 '**y를 x에 대한 함수로 보고**' 라는 표현이 등장하고 있는데, 이 표현은 당연히 수학적으로 엄밀한 표현이 아니다.

따라서 'y를 x에 대한 함수로 보는 방법' 자체를 문제에서 안내해주고 그것을 잘 이해했는지 평가하거나, x에 대한 함수를 적절히 도입하여 그 함수로부터 y와의 관계식을 올바르게 작성할 수 있는지를 평가하게 된다. 다시 말해, 음함수의 미분은 교육과정 설계상 간단히 다룰 수 밖에 없으며 고난도 합성함수의 미분을 묻는 문항으로 출제될 수 밖에 없다.

실제로 성취기준 고려사항에는 음함수의 미분을 간단히 다루도록 명시되어있다.

위에서 소개한 음함수 미분의 예는 다음과 같은 방법으로 합성함수의 미분 문항으로 간접출제된다.

[문제 1] $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 좌표평면에 x좌표가 t이고 y좌표가 음이 아닌 점 P가 있다. 선분 OP의 길이는 1로 일정할 때, 기울기가 -1이고 점 P를 지나는 직선의 y절편을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하다. $g'(t)$를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[문제 2] 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $-1 \le x \le 1$인 모든 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2 = 1-x^2$$

을 만족할 때, $f'(x)$를 구하시오.

[문제 3] $-1 < t < 1$인 실수 t에 대하여 곡선 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=t$ 의 교점의 x좌표 중 하나를 $f(t)$라 하자. $f(t)$가 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능할 때, $f'(t)$를 구하시오.

[문제 4] $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=1-t^2$와 곡선 $y=x^2$의 교점의 x좌표 중 하나를 $f(t)$라 하자. $f(t)$가 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능할 때, $f'(t)$를 구하시오.

[문제 1]은 'x에 대한 함수를 **직접 도입**'할 수 있는지를 묻는 문항이다. 변수의 의존 관계를 명확히 파악하고 항등식을 작성하면 그저 합성함수의 미분이다.

소개된 문제에서 점 P의 좌표를 (t, s)로 두면 선분 OP의 길이에 대한 조건으로부터

$$t^2 + s^2 = 1$$

를 얻는다. 또한 $g(t)$의 정의에 따라 $g(t) = t + s$ 임을 간단히 알 수 있다.

이때 s는 t의 값에 따라 정확히 하나씩 대응되므로 $s = f(t)$로 나타낼 수 있고, $g(t) = t + f(t)$로부터 $g'(t) = 1 + f'(t)$를 얻는다. 이때 등식 $t^2 + \{f(t)\}^2 = 1$ 로부터 $2t + 2f(t)f'(t) = 0$를 이용하면 된다.

[문제 2]는 음함수의 'y를 x에 대한 함수로 보고'라는 표현을 **항등식**의 형태로 표현하고 있다. 이 경우 항등식의 성질을 이용하여 적당한 수를 대입하고, 조건을 얻는 것이 중요하다.

또한 앞서 소개한 바와 같이 **사잇값 정리**를 이용하여 합성함수가 정의될 조건과 합성에 따른 치역 변화를 관찰할 수 있어야한다. 특히 미분가능하다는 조건이 있다면 **극값 정리**, 이계도함수가 존재한다는 조건이 있다면 **변곡점 판정법** 등을 떠올리도록 하자.

기출에서 가장 흔하게 접한 형태는 '~ 중 최댓(솟)값을 $f(t)$라 하자.'였을 것이다.

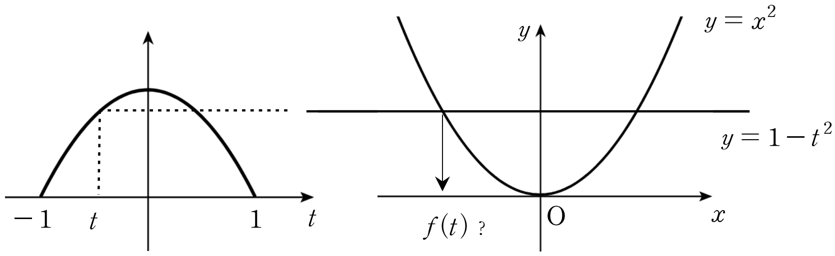
[문제 3]과 **[문제 4]**에서 '~ 중 하나를 $f(t)$라고 하자.'라는 표현을 확인하자. 이처럼 어떤 함수 $f(t)$가 t에 의해 결정되는 집합 X_t 가 존재하여

$$f(t) \in X_t$$

이면 f를 **선택함수**(choice function)라고 한다. 선택함수의 개념을 알아야한다는 건 절대 아니다. 그러나 연속함수의 뜻을 물어볼 때 종종 선택함수를 이용한다.

선택함수가 연속함수일 경우, **연속선택함수**라고 부른다. 사실, 음함수에서 'y를 x의 함수로 보고'라는 표현은 이 연속선택함수와 관련이 있다.

특히, **[문제 4]**는 직선 $y = 1 - t^2$가 어떻게 결정되는지 알기 어려운데, 이때는 곡선 $y = x^2$의 옆에 수직선이 t축인 평면을 그려 $y = 1 - t^2$의 그래프를 나타내면 직선 $y = 1 - t^2$가 결정되는 방식을 확인할 수 있다.



적용하기

[문제 4]에서 $f(t)$가 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능한 함수이고 $f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$일 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

풀이 $f(t)$가 미분가능하고 $f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$이므로 $f(t)$는 $-\frac{1}{2}$를 포함하는 어떤 열린구간에서 감소한다. 즉, $f(t) \le 0$ $(-1 \le t \le 0)$이고 이어서 $f(t)$는 연속이므로 $0 \le t \le 1$일 때도 $f(t) \le 0$이다. $f(t)$가 만족하는 등식은 $f(t)^2 = 1 - t^2$이고 $2f(t)f'(t) = -2t$로부터 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{f(1/2)}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이다.

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$를 얻는다.

[문제 3]과 **[문제 4]**의 해결방법을 충분히 이해했다면, **[문제 2]**를 해결하는 관점이 추가된다. 이 관점으로 바라보는 것이 자유로워진다면 **[문제 2]**와 같이 합성함수를 포함한 항등식 문항은 어렵지 않을 것이다. 먼저 함숫값의 의미를 다시 떠올려보자.

공통수학에서 배우는 내용이 가장 중요해!

정리 1.3.1 | 함숫값의 재해석

a, k가 실수일 때, 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=k$일 필요충분조건은

직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표 중 하나가 a인 것이다.

정리 1.3.1를 이용하면 합성함수를 포함한 항등식 문항을 해결하는 방법은 다음과 같이 정리할 수 있다.

재작성 과정에 익숙해지면 복잡한 함수가 주어지더라도 간단히 다룰 수 있게 된다.

정리 1.3.2 | 합성함수를 포함한 항등식 해석 알고리즘

항등식 $h(x)=p(x)$가 주어졌다고 하자.

$\boxed{1}$ **재작성**

(1) $p(x)=f(g(x))$로 작성하고, t에 대한 항등식 $h(t)=f(g(t))$으로 나타낸다.

(2) 이어서 $h(t)$, $f(x)$, $g(t)$에 대한 함수의 그래프의 **개형**을 각각 그린다.

그래프의 개형을 완성할 수 없더라도 알 수 있는 정보를 모두 반영하는 것으로 충분하다.

$\boxed{2}$ **확인**

(1) 합성함수가 **정의**될 조건 (2) 겉함수와 합성함수의 **치역의 변화**

(3) 겉함수와 속함수의 특징점과 합성함수의 **특징점** (미분가능하지 않은 점, 극점, 변곡점 등)

을 모두 확인한다. 이 과정에서 **대입**, **미분(정리 1.2.1~1.2.3)**을 이용할 수 있다.

$\boxed{3}$ **관찰**

필요에 따라 **연속선택함수**의 문제로 바꾸어 해석**(정리 1.3.1)**하면 관찰이 용이할 수 있다.

$$h(t)=f(g(t))$$

$\Leftrightarrow$ **직선 $y=h(t)$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표 중 하나를 $g(t)$라 하자.**

역함수의 미분

역함수에 관련된 성질을 정리하자.

정리 1.4.1 | 역함수의 정의

(1) 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건은 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인 것이다.

(2) f의 역함수 g가 존재하면 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$이고 f의 치역에 속하는 모든 y에 대하여 $(f\circ g)(y)=y$이다. 즉,

f의 정의역과 치역에 모두 속하는 모든 x에 대하여 $g(f(x))=f(g(x))=x$이다.

정리 1.4.2는 **사잇값 정리**를 이용하여 증명한다. 해당 증명은 <부록>에 소개한다.

정리 1.4.2 | 연속함수의 역함수의 성질

f가 연속함수일 때, f가 일대일함수일 필요충분조건은 f가 증가함수이거나 감소함수인 것이다.

정리 1.4.1의 함정에 빠져서는 안된다. 함수 f가 주어질 때, f의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(g(x)) = x$$

를 만족한다고 해서 함수 g가 f의 역함수인 것은 아니다. 그렇다면 위와 같은 항등식이 주어질 경우에는 어떻게 해석해야할까? 이 질문에 대한 답은 앞서 살펴본 내용 중에 있다.

$$f(g(t)) = t \quad (t \in X)$$

$\Leftrightarrow$ **직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표 중 하나를 $g(t)$라 하자.**

이렇게 g를 정의하게 되면 f가 역함수를 가질 때와 가지지 않을 때 모두를 포함하면서 함수 g를 관찰할 수 있게 된다. 당연하게도 f, g가 미분가능하다면 항등식의 양변을 미분하여 g'의 정보를 얻을 수 있으며, g의 성질로부터 $g(t)$를 구체적으로 결정할 수 있는 경우에는 함수 $y=g(x)$의 그래프도 그릴 수 있다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그래프의 정의에 따라

$$\{(t,\ g(t)) \mid t \in X\}$$

이다. 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 좌표는 $(g(t),t)$이므로 이 점을 직선 $y=x$에 대칭이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있는 것이다.

즉, 항등식 $f(g(x)) = x$이 주어질 때 f가 역함수를 갖느냐 갖지 않느냐는 전혀 중요하지 않다. 일대일대응임이 쉽게 관찰된다면 역함수를 갖는다는 점을 이용하여 문제를 해결할 수도 있겠지만 일대일대응이 아니라고 해서 두려워할 필요는 없는 것이다.

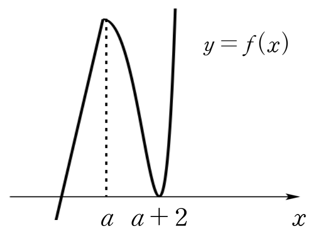
반대로 역함수가 존재한다는 조건이 먼저 주어져있을 때에는 두 가지 조건이 숨겨져 있다는 사실 (**일대일대응** + **항등식** $f(g(x)) = x$)만 잊지 않는다면 역함수에 관련된 문제는 어렵지 않을 것이며, 다음의 기하학적 의미를 숙지하는 것으로 충분하다. 역함수 관계에 있는 두 함수에 대하여

직선 $y=x$에 대하여 대칭인 각 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기는 서로 역수 관계에 있다.

적용하기

함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} (x-a-2)^2 e^x & (x \geq a) \\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x < a) \end{cases}$$



일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $g'(f(a+2))$, $g'(f(a+6))$의 값은?

풀이 $(x-a-2)^2e^x$의 도함수는 $(x-a-2)(x-a)e^x$ 이므로 곡선 $y=f(x)$은 $x=a$에서 극댓값, $x=a+2$에서 극솟값을 갖는다. $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속이므로 $f(a) = 4e^a = 12$이다. $f(a+2) = 0$, $f(a+6) = 4e^{a+6} = 12e^6 > 12$를 이용하자. 실수 t에 대하여 $f(g(t)) = t$이므로 $f'(g(t))g'(t) = 1$이고 $f'(g(f(a+2)))g'(f(a+2)) = 1$, $f'(g(f(a+6)))g'(f(a+6)) = 1$을 얻는다.

$g(f(a+2)) = g(0) < a$ 이므로 $f'(g(f(a+2))) = e^{2a}$ (직선의 기울기)이고,

$f(a+6) > 12$ 이므로 $g(f(a+6)) = a+6$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

g가 f의 역함수인지 아닌지는 논의대상이 아님을 확인하자.

$$g'(f(a+2)) = \frac{1}{e^{2a}} = \left(\frac{1}{e^a}\right)^2 = \frac{1}{9},\quad \frac{1}{g'(f(a+6))} = f'(a+6) = 24e^{a+6} = 72e^6$$

01 2018학년도 수능 (가) 21번

양수 t 에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t + \ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a) = \dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.

$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

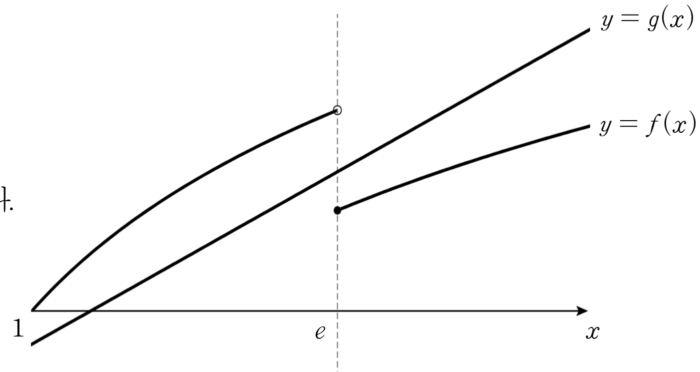
풀이 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있다. [합성함수 문제유형 01]

step 1 조건을 만족하는 일차함수 $g(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$를 나타내면 다음과 같다.

이때, $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$는 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \geq e)$에 그은 접선이 존재할 경우 그 접선의 기울기이고, 만약 존재하지 않으면 $(1,\ 0)$과 $(e,\ 1-t)$를 연결한 직선의 기울기이다.

step 2 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \geq e)$에 그은 접선이 존재할 t의 범위를 구해보자.

두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ 1-t)$을 연결한 직선이 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \geq e)$의 접선인 경우,



$x=e$에서 이 곡선의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이므로

$$1-t=\frac{e-1}{e}=1-\frac{1}{e}$$

로부터 $t=\frac{1}{e}$이다. 따라서 $h(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h(t)=\begin{cases} \dfrac{1-t}{e-1} & \left(t \leq \dfrac{1}{e}\right) \\ \dfrac{1}{x(t)}=\dfrac{-t+\ln x(t)}{x(t)-1} & \left(t > \dfrac{1}{e}\right) \end{cases}$$

(직선의 기울기)
=(접선의 기울기)

(단, $x(t)$는 곡선과 직선의 접점의 x좌표)

그러므로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$이고 $h'(a)$를 구하면 충분하다.

step 3 $h(a)=\frac{1}{e+2}<\frac{1}{e}$이므로 $a>\frac{1}{e}$이고 $h(t)=\frac{1}{x(t)}=\frac{-t+\ln x(t)}{x(t)-1}$에서

$$h(t)=\frac{-t+\ln\frac{1}{h(t)}}{\frac{1}{h(t)}-1}$$

이므로 분모 분자에 $h(t)$를 곱하여 정리하면 $h(t)=\frac{(-t-\ln h(t))h(t)}{1-h(t)}$이고 이어서 정리하면 $1-h(t)=-t-\ln h(t)$,

곧 $h(t)-\ln h(t)-1=t$를 얻는다.

다시 말해 <u>$p(x)=x-\ln x-1$이라 하면 $p(h(t))=t$</u>이고 $p'(h(t))h'(t)=1$을 얻는다.

$t=a$를 대입하면 $h(a)=\frac{1}{e+2}$이므로 $p'\left(\frac{1}{e+2}\right)h'(a)=1$이다. $p'(x)=1-\frac{1}{x}$로부터

$$p'\left(\frac{1}{e+2}\right)=1-(e+2)=-1-e$$

이고 $h'(a)=\frac{-1}{e+1}$이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1}=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

02 2024학년도 수능 (미적분) 27번

실수 t 에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$ 에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$　② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$　③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$

④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$　⑤ $-e\sqrt{e}$

풀이 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있다. [합성함수 문제유형 01]

원점에서 곡선 $y=e^{-x}+e^{t}$에 그은 접선의 기울기가 $f(t)$이므로 접점의 x좌표를 $x(t)$라 하면 다음이 성립한다.

$$f(t)=-e^{-x(t)}=\frac{e^{-x(t)}+e^{t}}{x(t)}$$

(직선의 기울기)
=(접선의 기울기)

$f(t)=-e^{-x(t)}$로부터 $x(t)=-\ln(-f(t))$이고 등식

$$f(t)=\frac{-f(t)+e^{t}}{-\ln(-f(t))}$$

은 다음과 같이 정리된다.

$$-\ln(-f(t))f(t)+f(t)=e^{t}$$

$f(a)=-e\sqrt{e}$로부터 $e^{a}=-\ln(-f(a))f(a)+f(a)=\frac{3}{2}e\sqrt{e}-e\sqrt{e}=\frac{1}{2}e\sqrt{e}$이고

$p(x)=-\ln(-x)x+x$라 하면 $p(f(t))=e^{t}$이다. t에 대하여 미분하면

$$p'(f(t))f'(t)=e^{t}$$

이고 $p'(f(a))f'(a)=e^{a}$이다. $p'(x)=-\ln(-x)$로부터 $p'(f(a))=p'(-e\sqrt{e})=-\frac{3}{2}$이므로

$$f'(a)=\frac{1}{2}e\sqrt{e}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

03 2020학년도 수능 (가) 30번

양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

풀이 **여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있다. [합성함수 문제유형 01]**

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$가 만나는 한 점의 x좌표를 $x(t)$라 하면

$$t^3\ln(x(t)-t)=2e^{x(t)-a}$$

이고, 이 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$\frac{d}{dx}\left(t^3\ln(x-t)\right)_{x=x(t)}=\frac{d}{dx}\left(2e^{x-a}\right)_{x=x(t)}$$

에서 $\dfrac{t^3}{x(t)-t}=2e^{x(t)-a}$를 얻는다. 다시 말해 두 등식을 모두 만족시킬 때 a의 값이 $f(t)$이다. 곧,

$$2e^{x(t)-f(t)}=t^3\ln(x(t)-t)=\frac{t^3}{x(t)-t}$$

에서 $(x(t)-t)\ln(x(t)-t)=1$이므로 $g(x)=x\ln x$라 하면 $g(x(t)-t)=1$이다.

따라서 $g'(x(t)-t)\times(x'(t)-1)=0$이고 $g'(x)=\ln x+1$이므로

$g'(x(t)-t)=\ln(x(t)-t)+1=\dfrac{2e^{x(t)-f(t)}}{t^3}+1>0$이다. 즉, $x'(t)-1=0$이다.

여기서 $x'(t)=1$을 얻고 등식

$$2e^{x(t)-f(t)}=\frac{t^3}{x(t)-t}$$

의 양변을 미분하면

$$2e^{x(t)-f(t)}\times(x'(t)-f'(t))=\frac{t^3}{x(t)-t}\times\left\{\frac{3t^2}{t^3}-\frac{x'(t)-1}{x(t)-t}\right\}$$

이다. 각 변의 왼쪽 인수가 서로 같고, $x'(t)=1$이므로

$$1-f'(t)=\frac{3}{t}$$

이다. 따라서 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-8$, $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=64$이다.

04 2017학년도 9월 평가원 (가) 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

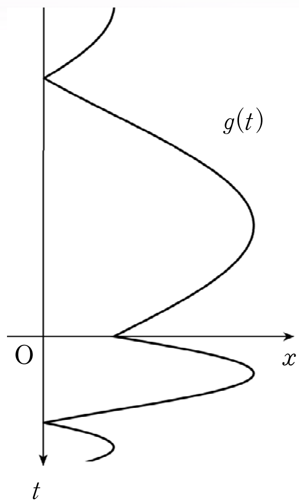
풀이 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수의 성질을 이용하여 합성함수의 미분가능성을 판단할 수 있다.

step 1 **재작성** : $h(t) = f(g(t))$에서 $h(t)$는 이계도함수가 존재하고 이계도함수가 연속인 함수이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

$g(t)$는 x축 위의 운동을 기술하기 위해 다음과 같이 나타내자.

step 2 **확인** : f의 정의역이 $(-\infty, \infty)$이므로 합성함수는 언제나 잘 정의된다.



h의 치역은 f의 치역에 포함되도록 한다.

이어서 특징점의 변화를 관찰해보자. g는 집합

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$$

에 대하여 $p \in A$이면 $x = p$에서 미분가능 하지 않고, $x = 0$에서 미분가능하지 않다.

그런데 합성함수인 h는 미분가능하다.

f, g는 모두 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수이다.

특히, f는 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 같은 함수이므로

$$(h\text{의 } a\text{에서 좌(우)미분계수}) = f'(g(a)) \times (g\text{의 } a\text{에서 좌(우)미분계수})$$

이다. $p \in A$일 때 g의 p에서 좌미분계수는 $-m$, p에서 우미분계수는 $+m$이다. 곧,

$$(h(x)\text{의 } a\text{에서 좌미분계수}) = f'(g(p)) \times -m,$$

$$(h(x)\text{의 } a\text{에서 우미분계수}) = f'(g(p)) \times m$$

이다. h가 미분가능한 함수이므로 $f'(g(p)) = f'(0) = 0$을 얻는다. 이어서 g의 0에서 좌미분계수는 -2, 우미분계수는 6 이므로

$$(h(x)\text{의 } 0\text{에서 좌미분계수}) = f'(g(0)) \times -2,$$

$$(h(x)\text{의 } 0\text{에서 우미분계수}) = f'(g(0)) \times 6$$

이다. h가 미분가능한 함수이므로 역시 $f'(g(0)) = f'(1) = 0$을 얻는다. 또한 h''은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$h''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad (g(x) \neq 0,\ x \neq 0)$$

에서

$$\lim_{x \to p} h''(x),\ \lim_{x \to 0} h''(x)$$

가 존재한다. 이때

$$\lim_{x \to p} h''(x) = \lim_{x \to p} f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) = f''(0)m^2$$

이므로 $f''(0)$의 값에 관계없이 극한이 존재하며,

$$\lim_{x \to 0+} h''(x) = \lim_{x \to 0+} f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) = f''(1)6^2$$

$$\lim_{x \to 0-} h''(x) = \lim_{x \to 0-} f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) = f''(1)(-2)^2$$

이므로 두 극한이 같기 위해서는 $f''(1) = 0$이다.

따라서 삼차함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4이고 0, 1을 근으로 가지며 1을 중근으로 가진다. 곧,

$f'(x) = 4x(x-1)^2$이고 $f'(3) = 48$를 얻는다. step 3. **더 관찰할 필요가 없어요**

05 2026학년도 6월 평가원 (가) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
(나) $g'(\ln 3)<0$, $\lvert g'(-\ln 3)\rvert=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

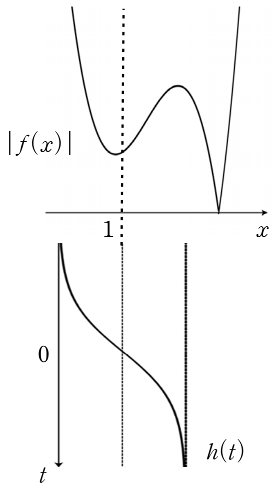
$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수의 성질을 이용하여 합성함수의 미분가능성을 판단할 수 있다. (강의 참고)

step 1 **재작성** :

$h(t)=\dfrac{2}{1+e^{-t}}$이라 하면 $g(t)=|f(h(t))|$이고, $g(t)$는 0에서 양수인 극솟값을 갖는 미분가능한 함수이다.

$|f(x)|$는 삼차함수의 절댓값이고 $h(t)$는 x축 위의 운동을 기술하기 위해 다음과 같이 나타낼 수 있다.



step 2 **확인** : $|f|$의 정의역이 $(-\infty, \infty)$이므로 합성함수는 언제나 잘 정의된다.

g의 치역은 $|f|$의 치역 $[0, \infty)$에 포함되도록 한다. → g의 치역에 0포함되면..? 의심하고 또 의심..!

이어서 특징점의 변화를 관찰해보자.

$f(p)=0$, $f'(p)\neq 0$인 점 p에서 $|f|$는 미분가능하지 않다.

그러나 g는 미분가능한 함수이다.

$|f|$, h는 모두 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하는 함수이다.

특히, h는 미분가능하므로 모든 점에서 좌미분계수와 우미분계수가 같은 함수이고,

a가 임의로 주어진 실수일 때 $x\to a+$이면 $h(x)\to h(a)+$, $x\to a-$이면 $h(x)\to h(a)-$이므로

$$(g\text{의 } a\text{에서 좌(우)미분계수}) = (|f|\text{의 } h(a)\text{에서 좌(우)미분계수})\times h'(a)$$

이다. 이때 $|f|$의 $h(a)$에서 좌(우)미분계수는 L로 일정하거나 $-(+)m$이다.

전자의 경우, $|f|$는 $h(a)$에서 미분가능하다. 후자의 경우, g가 미분가능한 함수이기 위해서는 $h'(a)=0$이거나 $m=0$이다. 그런데 $h'(t)>0$이므로 $m=0$이다. 다시 말해 $|f|$는 $h(a)$에서 미분가능하다.

즉, $|f|$는 임의의 $a\in\mathbb{R}$에 대하여 $x=h(a)\in(0, 2)$에서 미분가능하므로 $|f|$는 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

이어서 g가 0에서 극솟값이 양수이므로 $|f|$도 0에서 양수인 극솟값을 갖는다.

따라서 $|f(x)|=f(x)$ $(0<x<2)$이고 $f(x)$가 $x=1(=h(0))$에서 극소이거나

$|f(x)|=-f(x)$ $(0<x<2)$이고 $f(x)$가 $x=1(=h(0))$에서 극대이다.

전자의 경우,

$$g'(\ln 3)=f'(h(\ln 3))h'(\ln 3)=f'\left(\frac{3}{2}\right)h'(\ln 3)>0$$

이므로 (나)에 위배된다. 따라서 $|f(x)|=-f(x)$ $(0<x<2)$이고 다음을 얻는다.

$$f(x)=-f(x)\ (x\le 2),\quad |f(2)|=-f(2)\ge 0$$

이제

$$|g'(-\ln 3)|=|-f'(h(-\ln 3))h'(-\ln 3)|=-f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{8}=\frac{3}{8}g(-\ln 3)=\frac{3}{8}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

임을 이용하면 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$을 얻는다. 종합하면 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로

$$f(x)=(x-1)^2(x-1-3k)+f(1),\ f'(x)=3(x-1)(x-1-2k)$$

로 나타낼 수 있고 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f(2)\le 0$이므로 $f(1)=-\frac{5}{8}-\frac{9k}{4}$, $k\ge\frac{1}{14}$이다.

따라서 $g(0)=|f(1)|$의 최솟값은 $\frac{11}{14}$이다. $\left(*h'(t)=\dfrac{2e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}=\dfrac{2e^t}{(e^t+1)^2}\right)$

step 3. **더 관찰할 필요가 없어요**

06 2022학년도 수능 (공통) 12번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

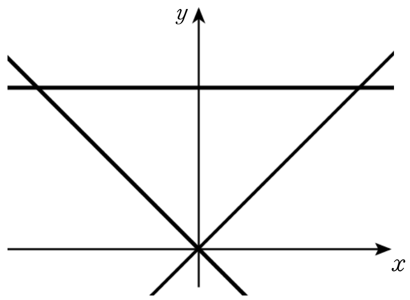
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

풀이 **연속함수의 뜻을 이해한다. (연속선택)**

주어진 등식은 $\{f(x)\}^2(f(x)-1)-x^2(f(x)-1)=0$, 곧

$$\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}\{f(x)-1\}=0$$

이므로 $f(x)$는 x, $-x$, 1 중 하나로 정의되는 연속함수이다.



이때 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0이므로

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|>1)\\ |x| & (|x|\le 1)\end{cases}$$

와 같이 결정된다. 따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이다.

07 2023학년도 수능 (공통) 22번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$ 이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3,\ f(g(1))=6$

풀이 **연속함수의 뜻을 이해한다. (연속선택) 삼차함수의 접선을 구할 수 있다.**

$$f'(g(t)) = \frac{f(t)-1}{t-1} \ (t \neq 1), \quad f(g(1)) = 6$$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$(1,\, f(1))$, $(t\,,\, f(t))$**를 연결한 직선의 기울기와 같은 접선의 기울기를 갖는 점의** x**좌표 중 하나를** $g(t)$**라 하자.**

그러면 $g(t)$는 연속이고 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

이러한 선택이 이루어지기 위해서는 $(1,\, f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 연결한 직선이 곡선 $y = f(x)$의 접선이어야한다. 따라서

삼차함수와 일차함수를 연립한 삼차방정식의 세 근의 합이 $1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 6$ 이므로 $f(0) = -3$임을 함께 이용하면

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 3$$

이다. 한편 $g(t)$는 $t = 1$에서도 연속이어야한다. 그러므로

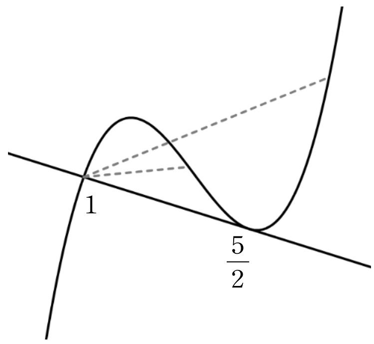
$$\lim_{t\to1} \frac{f(t)-1}{t-1} = \lim_{t\to1} f'(g(t)) = f'\left(\lim_{t\to1} g(t)\right) = f'(g(1))$$

이고, $f'(1) = f'(g(1))$을 얻는다.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$이므로 $x = 2$에 대하여 대칭이다. 즉, $f'(1) = f'(3)$이다.

다시 말해 $g(1)$은 1 또는 3 중 하나이고 (나) 조건을 만족해야하므로 $g(1) = 3$,

따라서 $f(3) = 6$을 얻는다. 그러면 $a = 12$로부터 $f(4) = 13$이다.



08 2024학년도 6월 평가원 (미적분) 28번

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$ 이다.
(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\dfrac{1}{16}$　② $-\dfrac{7}{64}$　③ $-\dfrac{5}{32}$　④ $-\dfrac{13}{64}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$

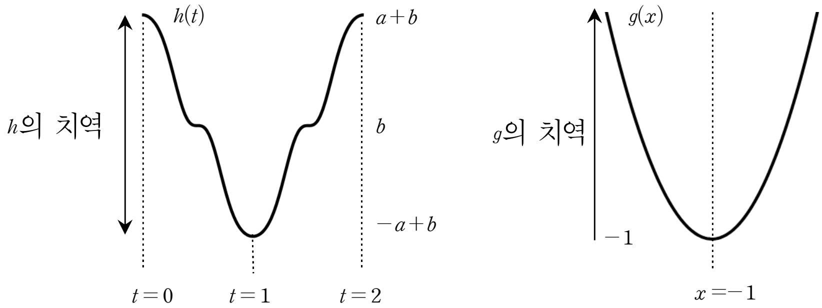
풀이 사잇값 정리를 이용하여 합성에 의한 치역의 변화를 이해한다. (강의 참고)

step 1 **재작성** : $h(t) = a\cos^3\pi t\, e^{1-\cos^2\pi t} + b$, $g(x) = x^2 + 2x$ 라 하자. 그러면

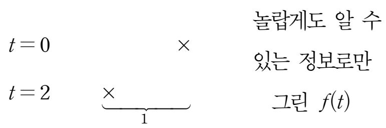
$$h(t) = g(f(t))$$

이고, 각 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

(이때, h는 $h(t) = \left(a x^3 e^{1-x^2}\right) \circ (\cos\pi t) + b$ 임을 이용하여 그래프의 개형을 그린다.)



step 2 **확인** : g의 정의역이 $(-\infty, \infty)$이므로 합성함수는 언제나 잘 정의된다.



h의 치역 $[-a+b, a+b]$는 g의 치역 $[-1, \infty)$에 포함되도록 한다.

즉, $-a+b \geq -1$이다. (혹시 $-a+b=-1$ (?) 의심하고 또 의심..)

이어서 특징점의 변화를 관찰해보자.

$-a+b > -1$이면 f를 모르기 때문에 특징점 대응이 잘 안된다. 몰루?

$-a+b = -1$이면 적어도 g가 극소일 때 h가 극소임이 확인된다.

step 3 **관찰** : $h(t) = g(f(t))$를 다음과 같이 해석하자.

직선 $y = h(t)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 하나를 $f(t)$라 하자.

만약 $-a+b > -1$이면 $f(t)$가 연속함수이므로 $0 \leq t \leq 2$일 때 $f(t) \leq -1$ 이거나 $f(t) \geq -1$인 것만 가능하며 $f(0) = f(2)$이다. 이는 $f(0) = f(2)+1$임에 모순이다.

따라서 $-a+b = -1$이다. 이때 $f(t)$가 $f(0) = f(2)+1$를 만족하는 연속함수이면 $f(t)$는 $0 \leq t \leq 2$일 때 감소하며 $f(1) = -1$이고 $t = 1$에 대칭임을 확인할 수 있다. 곧,

$$\frac{f(0)+f(2)}{2} = -1\text{로부터 } f(0) = -\frac{1}{2},\ f(2) = -\frac{3}{2}$$

을 얻는다. 따라서 $f(0)^2 + 2f(0) = a+b = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$이고 $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{7}{8}$이다.

풀이 2 이 문제의 경우, 3 **관찰** 파트를 생략할 수 있다.

$$f(0)^2 + 2f(0) = a+b,\ f(2)^2 + 2f(2) = a+b,\ f(0) = f(2)+1$$

를 이용하면 $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = -\frac{3}{2}$이 바로 나오기 때문에 **사잇값 정리**에 따라 $f(\alpha) = -1$인 $0 < \alpha < 2$가 존재하므로 합성함수인 h의 치역에 -1이 포함되어야하고, $-a+b = -1$임이 ($-a+b > -1$이면 합성함수의 치역에 -1이 포함되지 않는다.) 바로 얻어진다. 선택함수에 익숙해지도록 첫 번째 풀이도 기억하자.

09 2026학년도 6월 평가원 (미적분) 28번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^5 + \{f(x)\}^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$ 이다.
(나) $f(-3)f(3) < 0$, $f'(2) > 0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

풀이 사잇값 정리를 이용하여 합성에 의한 특징점(극점, 변곡점)의 변화를 이해한다.

(f''의 존재성은 수학교육평가론적 관점에서 과조건이 아니다/ 강의참고)

step 1 **재작성** : $h(t)=\ln\left(t^2+t+\dfrac{5}{2}\right)-(at+b)$, $g(x)=x^5+x^3$라 하자. 그러면

$$h(t)=g(f(t))$$

이고, 각 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

(이때, $h(t)=(\ln x)\circ\left(t^2+t+\dfrac{5}{2}\right)-(at+b)$임을 이용하여 그래프의 개형을 그린다.)

$p(t)=\ln\left(t^2+t+\dfrac{5}{2}\right)$는 $p'(t)=\dfrac{2t+1}{t^2+t+5/2}$, $p''(t)=\dfrac{-2(t+2)(t-1)}{(t^2+t+5/2)^2}$이므로 $t=-2$, $t=1$에서 변곡점을 갖고

$t=-\dfrac{1}{2}$에서 극소이다. 또한 $f(-3)f(3)<0$에서 **사잇값 정리**에 따라 $f(\alpha)=0$을 만족하는 $-3<\alpha<3$가 존재한다.

step 2 **확인** : g의 정의역이 $(-\infty,\infty)$이므로 합성함수는 언제나 잘 정의된다.

h의 치역은 g의 치역 $(-\infty,\infty)$에 언제나 포함된다.

이어서 특징점의 변화를 관찰해보자.

g는 0에서 $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$인 변곡점을 갖는다.

이때 f는 α에서 0이다. 그러면 $h(\alpha)=g(f(\alpha))=0$이고

$$h'(\alpha)=g'(f(\alpha))f'(\alpha)=g'(0)f'(\alpha)=0$$

$$h''(\alpha)=g''(f(\alpha))f'(\alpha)^2+g'(f(\alpha))f''(\alpha)=0$$

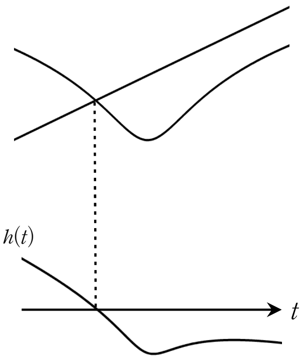
<u>f''의 존재성은 이 부분을 유도한 것</u>

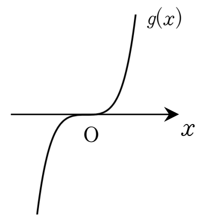
을 얻는다. 그런데 $h''(x)=p''(x)$이므로 $h''(\alpha)=0$이면

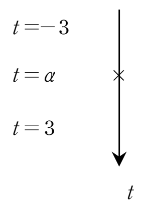
$\alpha=-2$ 또는 1이다. 곧,

곡선 $\ln\left(t^2+t+\dfrac{5}{2}\right)$와 직선 $at+b$가 만나는 점인 α $(h(\alpha)=0)$에서

$h(\alpha)=h'(\alpha)=h''(\alpha)=0$인 변곡점을 가진다. 다시 말해 $at+b$는 곡선 $\ln\left(t^2+t+\dfrac{5}{2}\right)$의 변곡접선이다.





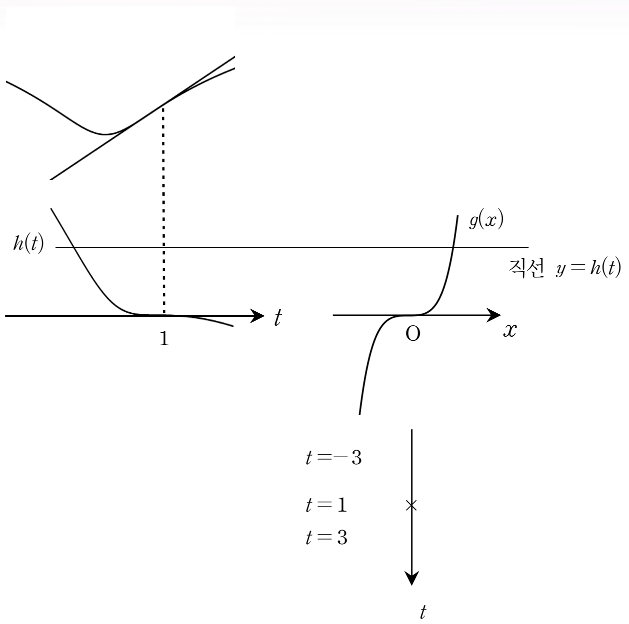


놀랍게도
$f(-3)f(3)<0$을
이용해서 그린 $f(t)$

step 3 **관찰** : $h(t) = g(f(t))$를 다음과 같이 해석하자.

직선 $y = h(t)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 하나를 $f(t)$라 하자.

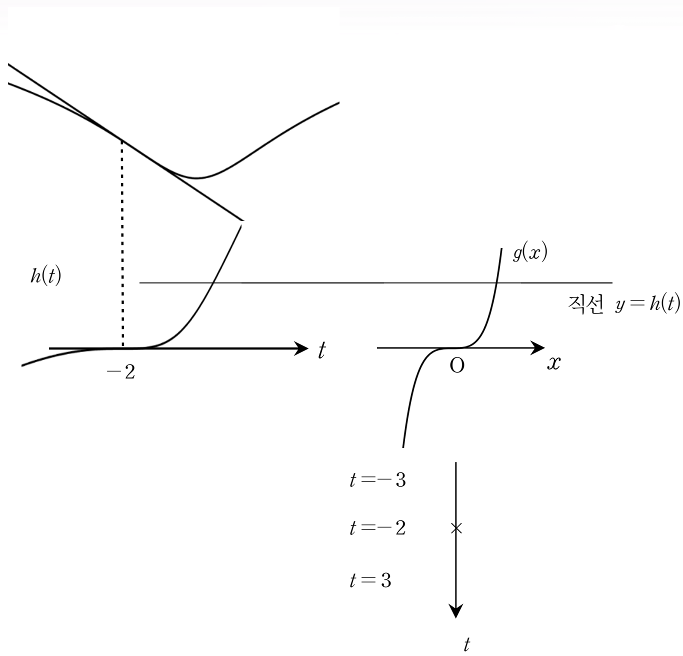
① $a = 1$인 경우,



$f(t)$는 연속함수이므로 $-3 < t < 3$일 때 $f(t)$가 감소함을 확인할 수 있다.

다시 말해 $f'(2) < 0$이므로 이는 조건 (나)에 위배된다.

② $a = -2$인 경우,



$f(t)$는 연속함수이므로 $-3 < t < 3$일 때 $f(t)$가 증가함을 확인할 수 있다.

다시 말해 $f'(2) > 0$이므로 $a = -2$이다.

종합하면

직선 $y = ax + b$는 곡선 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$의 $x = -2$에서 접선이다.

그러므로 a의 값은 도함수인 $p'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+5/2}$에 $x = -2$를 대입한 $a = -\dfrac{2}{3}$,

$$ax + b = -\frac{2}{3}(x+2) + \ln\left((-2)^2 + 2 + \frac{5}{2}\right) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + \ln\frac{9}{2}$$

로부터 $b = -\dfrac{4}{3} + \ln\dfrac{9}{2}$, $e^b = \dfrac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}$, $a \times e^b = -3e^{-\frac{4}{3}}$이다. 즉, 정답은 ① $-3e^{-\frac{4}{3}}$이다.

10 2026학년도 9월 평가원 (미적분) 28번

삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0) \times (g(0))^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0) = 0$, $f''(\pi) = 0$
(나) $\sin g(\pi) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

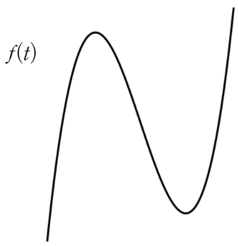
풀이 사잇값 정리를 이용하여 합성함수가 정의될 조건을 이해한다. (강의 참고)

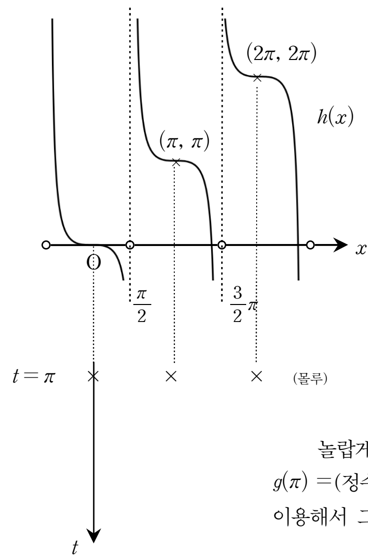
step 1 **재작성** : $h(x) = x - \tan x$라 하자. 그러면

$$f(t) = h(g(t))$$

이고, 각 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다. 이때, $h(x)$의 그래프는 $\tan x$가 $x=$(정수)π에서 접선의 기울기가 1임을 이용하면 빼서 그릴 수 있다.

step 2 **확인** : h의 정의역이 $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \dfrac{2n+1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$이므로 합성함수는 g의 치역에 $\dfrac{1}{2}$(홀수)π를 포함하지 않을 때 잘 정의된다.





놀랍게도 $g(\pi)=$(정수)π임을 이용해서 그린 $g(t)$

그런데 g는 연속함수이므로 **사잇값 정리**에 따라 어떤 정수 k에 대하여

$$(g\text{의 치역}) \subseteq \left(\frac{2k-1}{2}\pi,\ \frac{2k+1}{2}\pi\right)$$

이다. 다음으로 f의 치역은 $(-\infty, \infty)$, h의 치역은 $(-\infty, \infty)$이다.

이어서 특징점의 변화를 관찰해보자.
$g(\pi) = k\pi$이고, h는 $k\pi$에서 접선의 기울기가 0인 변곡점 $(k\pi, k\pi)$를 갖는다.

$$(h(k\pi) = k\pi,\ h'(k\pi) = h''(k\pi) = 0)$$

그러면 $f(\pi) = h(g(\pi)) = h(k\pi) = k\pi$이고

$$f'(\pi) = h'(g(\pi))g'(\pi) = 0$$

$$f''(\pi) = h''(g(\pi))g'(\pi)^2 + h'(g(\pi))g''(\pi) = 0$$ - *과조건인가?

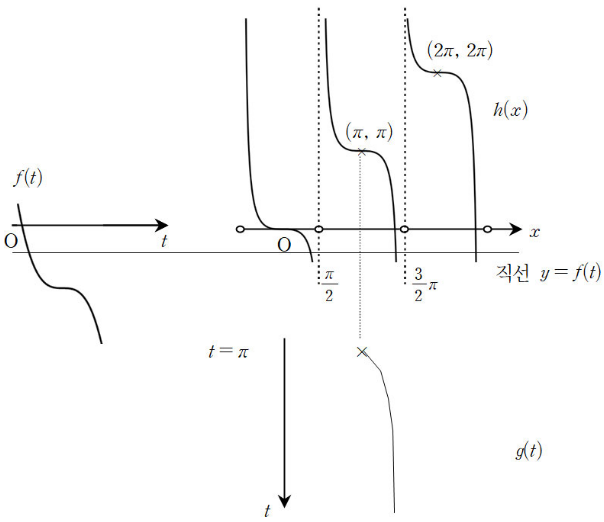
을 얻는다. 또한 f는 삼차함수이므로 f는 π에서 접선의 기울기가 0인 변곡점 $(\pi, k\pi)$를 갖는다. 즉, $f(t) = a(t-\pi)^3 + k\pi$로 나타낼 수 있다.

(*수학교육평가론적 관점에서 g가 두 번 미분가능하다는 조건이 주어져있지 않기 때문에 $f''(\pi) = 0$은 과조건이 아니다. $f''(\pi)$의 값을 구할 때 $g''(\pi)$가 쓰이는 것을 확인하여라.)

step 3 **관찰** : $f(t) = h(g(t))$를 다음과 같이 해석하자. (현재까지 안 쓴 조건 $f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$)

직선 $y=f(t)$와 곡선 $y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 하나를 $g(t)$라 하자.

① $a<0$인 경우, $g(t)$가 연속함수임을 이용하자.



$\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $g(t)$의 선택은

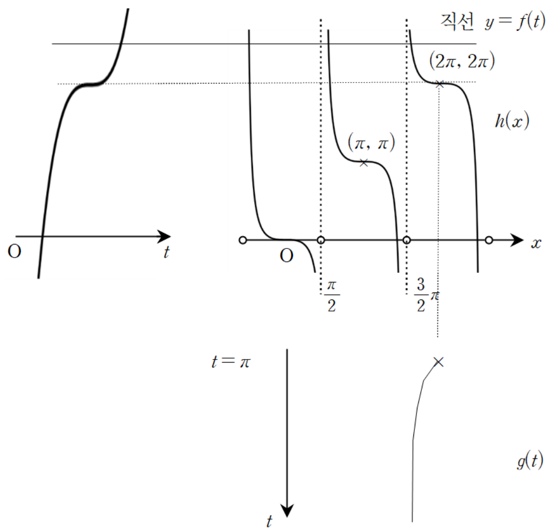
$$(g\text{의 치역}) \subseteq \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$$

이다. 곧, $k=1$이고

$$f(t) = a(t-\pi)^3 + \pi$$

이다. 그런데 이것은 $a<0$임에 모순이다.

② $a>0$인 경우, $g(t)$가 연속함수임을 이용하자.



$\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $g(t)$의 선택은

$$(g\text{의 치역}) \subseteq \left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi\right)$$

이다. 곧, $k=2$이고

$$f(t) = a(t-\pi)^3 + 2\pi$$

이다. 한편, $g(0) - \tan g(0) = f(0) = 0$이므로

$g(0) = \tan g(0)$이고

$$f'(x) = h'(g(x))\,g'(x),$$

$$h'(x) = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x$$

로부터

$$f'(0) = -\tan^2 g(0)\,g'(0) = -g'(0) \times (g(0))^2$$

이다. 그러므로 구하는 값은

$$-f'(0)$$

이다. 이어서 $f(x)$는 $(0,\ 0)$을 지나고 $(\pi,\ 2\pi)$에서 접선의 기울기가 0인 변곡점을 가지므로,

$$f'(0) = 3 \times \frac{2\pi}{\pi} = 6$$

이다. 따라서 답은 ② -6이다.

11 2026학년도 수능 (미적분) 30번

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert x\rvert \le 1$일 때, $4\times\left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2(x-5)^2$ 이다.
(나) $\lvert x\rvert > 1$일 때, $\lvert f^{-1}(x)\rvert = e^{\lvert x\rvert-1}+1$ 이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b$ $(a<b)$에서 불연속일 때,

$g(a)\times\left(\lim_{m\to a+} g(m)\right)+g(b)\times\left(\frac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$) [4점]

풀이 역함수의 뜻을 알고, 연속함수의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

step 1 **재작성** : 역함수의 정의에 따라 주어진 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(가) $4t^2 = f(t)^2\left(f(t)^2-5\right)^2$, $|f(t)| \le 1$

(나) $|t| = e^{|f(t)|-1}+1$, $|f(t)| > 1$

제곱근의 뜻과 절댓값의 성질에 따라

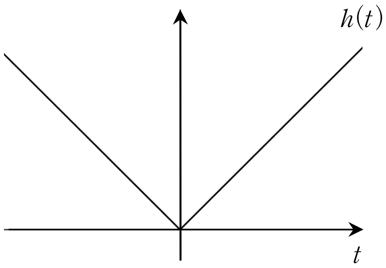
$$|t| = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|f(t)\left(f(t)^2-5\right)\right| & , |f(t)| \le 1 \\ e^{|f(t)|-1}+1 & , |f(t)| > 1 \end{cases}$$

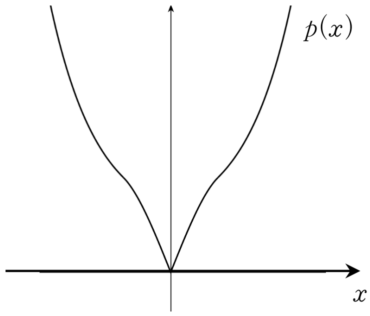
이므로 함수 $p(x)$를

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|x\left(x^2-5\right)\right| & , |x| \le 1 \\ e^{|x|-1}+1 & , |x| > 1 \end{cases}$$

라 하면 $|t| = p(f(t))$를 얻는다. $h(t) = |t|$라 하면 $h(t) = p(f(t))$이고 각각의

그래프는 다음과 같다.





$f(t)$에 대해 아는 정보는 역함수가 존재하는 증가함수인 것뿐이다.

step 2 **확인** : 겉함수 $p(x)$의 정의역은 $(-\infty, \infty)$이므로 합성함수는 잘 정의되며,

겉함수 $p(x)$의 치역은 $[0, \infty)$이고 합성함수 $h(t)$의 치역은 $[0, \infty)$이므로 $[0, \infty) \subseteq [0, \infty)$가 성립한다.

이어서 특징점의 변화를 살펴보자. $p(x)$는 간단히 $x=1$, $x=-1$에서 미분가능한 것이 확인된다. 그러나 $p(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않고 $h(t)$도 역시 $t=0$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $f(t)$는 $t=0$일 때 $f(0)=0$이다. (*이 부분은 여기서 얻지 못하여도 괜찮다.)

step 3 **관찰** : $h(t) = p(f(t))$를 다음과 같이 해석하자.

직선 $y=h(t)$와 곡선 $y=p(x)$의 교점의 x좌표 중 하나를 $f(t)$라 하자.

$f(t)$는 연속함수이고 증가함수이므로 (연속선택!) 실제로 $f(t)$는

직선 $y=h(t)$와 곡선 $y=p(x)$의 교점의 x좌표의 최솟값 $(t \le 0)$, **최댓값** $(t \ge 0)$

이다. 또한 실수 t에 대하여 $f(t) = -f(-t)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이제 양의 실수 전체 집합에서 함수의 그래프를 결정하면 충분하다.

$t>0$일 때 점 $(t\,,\,f(t))$를 나타내보자. 점 $(f(t)\,,\,t)$은 곡선 $y=p(x)\;(x>0)$ 위의 점이므로 $y=x$에 대하여 대칭하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 완성할 수 있다. 이어서 점 $(1,\,0)$을 지나는 직선의 기울기가 m일 때 이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수 $g(m)$은

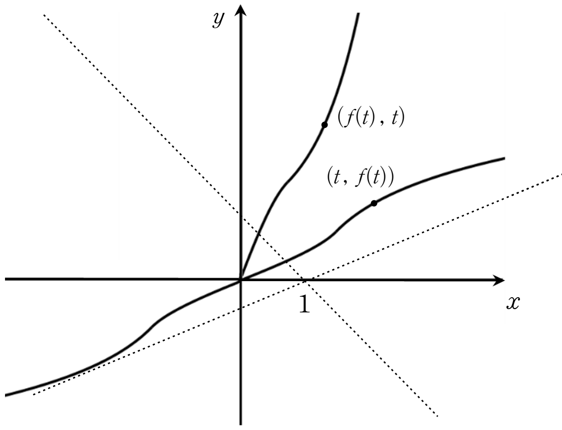
$m\le 0$일 때 $g(m)=1$ ($g(0)=1$은 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$에 의한 것)

$0<m<b$일 때 $g(m)=3$,

$m=b$일 때 $g(m)=2$,

$m>b$일 때 $g(m)=1$

(특히, $m=1$일 때 변곡접선임을 확인하여라.)



(기울기) $=m$

이다. 이때 $a=0$이고 b는 점 $(1,\,0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기이다.

다시 말해 b는 점 $(1,\,0)$에서 곡선 $y=-\ln(-x-1)-1$에 그은 접선의 기울기이다.

(*$e^{x-1}+1$의 역함수 $\ln(x-1)+1$을 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.)

접점의 x좌표를 p라 할 때 $(1,\,0)$과 접점을 연결한 직선의 기울기와 $(p,\,-\ln(-p-1)-1)$에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$\frac{\ln(-p-1)+1}{1-p}=\frac{1}{-p-1}=b$$

이고 $\ln b\times\dfrac{1}{b}=-\ln(-p-1)\times(-p-1)=\ln(-p-1)\times(p+1)$을 얻는다. 또한

$$\ln(-p-1)=\frac{p-1}{p+1}-1=\frac{-2}{p+1}$$

로부터 $\dfrac{\ln b}{b}=-2$이다. 그러므로

$$g(a)=g(0)=1,\ \lim_{m\to a+}g(m)=\lim_{m\to 0+}g(m)=3,\ g(b)=2,\ \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2=4$$

로부터 $1\times3+2\times4=11$이다.

02 적분법의 근본적 이해

학습목표 여러 가지 적분법을 이용하여 정적분을 구하고, 그 의미를 이해한다.

적분법은 어떤 의미를 가질까?

생각열기

다음은 정적분

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,dx$$

을 구하는 여러 가지 방법에 대해 토의하는 대화의 일부이다. 정적분을 구하는 방법은 어떤 것이 있을지 생각해보자.

민찬 : 나는 부분적분법을 이용해서 정적분의 값을 얻었어.

슬혜 : 적분구간 $[0, \pi]$에서 사인함수는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이라는 사실을 이용하면 어떨까?

적분법과 정적분

교과서에서 공부한 치환적분법은 다음과 같다.

정리 2.1.1 | 치환적분법

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

적용하기

치환적분법을 이용하여 정적분

$$\int_{-1}^{2} 2t\,e^{t^2+1}\,dt$$

을 구할 때, 일반적으로 $t^2+1=x$로 놓고 $t=-1$일 때 $x=2$, $t=2$일 때 $x=5$이고 $\frac{dx}{dt}=2t$이므로

$$\int_{-1}^{2} 2t\,e^{t^2+1}\,dt = \int_2^5 e^x\,dx = e^5-e^2$$

와 같이 구할 것이다. 그러나 위치가 $x=t^2+1$로 주어지는 수직선 위의 점의 시각 t에서의 속도는 $2t$이므로 dx를 $d(t^2+1)=2t\,dt$로 볼 수 있고, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{-1}^{2} 2t\,e^{t^2+1}\,dt = \int_{-1}^{2} e^{t^2+1}\,d(t^2+1) = e^{t^2+1}\Big|_{-1}^{2} = e^5-e^2$$

이와 같이 치환적분법은 함수 $y=f(x)$의 정적분은 위치가 $x=g(t)$로 주어지는 수직선 위의 점 위에서 t에 대한 정적분으로 변환하여 구할 수 있음을 의미한다. 이때 $g'(t)$가 시각 t에서 x의 속도임에 주목하면, 치환적분법의 궁극적 의미는 다음과 같다.

등식 $d(g(t))=g'(t)dt$를 $g(t)$의 외미분이라고 한다.

정적분의 dx는 $x=g(t)$이면 $d(g(t))=g'(t)\,dt$이다.

정리 2.1.1의 등식

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\underset{①}{\overset{②}{\rightleftarrows}}\; \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

에서 ① 방향은 치환보다는 t에 대한 정적분을 $g(t)$에 대한 정적분으로 **관점을 전환**하는 의미를 갖는다. 다시 말해 $f(g(t))$를 **그저 $g(t)$에 대한 함수로 바라본다**는 뜻이며, 오히려

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ 보다 } t \text{ 의 범위가 보존된 } \int_\alpha^\beta f(g(t))\,d(g(t)) \text{ 자체로 보는 것이 자연스럽다.}$$

$f(x)dx$ 에서 $f(g(t))g'(t)\,dt$ 로의 대응을 g에 의한 pullback 이라고 한다.

② 방향은 관점의 전환과는 완전히 다르며, g에 의한 변수의 변환이 일어난다. 이는 x를 **위치가 $g(t)$로 주어지는 수직선 위의 점으로 바라본다**는 뜻이다. x의 운동과 $g(t)$의 운동은 전혀 다르므로, $g(t)$가 적분구간에서 일대일함수가 아닐 수도 있으며 이때는 치환에 문제가 발생할 수 있다.

그러므로 변수의 변환이 일어날 때에는 $g(t)$가 일대일함수이고 $g'(t) \neq 0$인 구간으로 나누어야한다. 이를 **변수변환 정리**(change of variables theorem)라고 한다. 그러나 정적분은 다음과 같은 성질이 있다.

적분구간이 반대이기만 하면 그 합이 0이다.

적절한 적분구간의 합으로 자유롭게 나눌 수 있다.

이 성질 덕분에 몇 가지 귀찮은 논의를 생략할 수 있을 것이다.

즉, 치환적분법은 단순히 '치환을 이용하여 적분을 구할 수 있다.'라는 의미를 넘어 정적분의 개념 자체를 관통하는 의미를 담고 있는 것이다.

이어서 교과서에서 공부한 부분적분법을 다음과 같다.

치환적분의 의미를 통해 $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,d(g(t))$ 임을 떠올리자.

정리 2.1.2 부분적분법

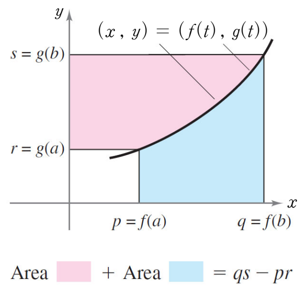
미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$\int_a^b g(t)\,d(f(t)) = \big[f(t)\,g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)\,d(g(t))$$

부분적분법도 앞서 확인한 치환적분법의 의미를 따라 이해해볼 수 있다. 부분적분법은 매개변수로 나타낸 함수

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

에서 **x에 대한 y의 정적분을 반대로 y에 대한 x의 정적분으로 변환**하여 구할 수 있음을 의미한다. 곧, 부분적분법의 궁극적 의미는 다음과 같다.



부호를 가진 넓이로 정의되는 정적분의 의미를 되짚어보면서 $y = f(x)$꼴이어야 한다는 틀을 벗어 나도록 하자.

'부분적분법은 역함수의 적분법의 일반화이다.'

적용하기

부분적분법을 이용하여 정적분

$$\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,dx$$

을 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,dx = \int_0^\pi x - \pi\ d\cos x = (x-\pi)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,d(x-\pi) = \pi$$

그렇다면 역함수의 정적분은 무엇이었는지 살펴보자.

역함수의 정적분의 두 등식을 자유자재로 이용할 수 있도록 하자.

정리 2.1.3 | 역함수의 정적분

미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 가질 때, $f'(x)$가 $[a, b]$에서 연속이고 $f'(x) \neq 0$이면

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = [x f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x f'(x)\,dx$$

[증명 1] 정리 2.2.3을 치환적분법을 이용해 증명해보자.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$$

에서 $x = f(t)$라 하면 $g(x) = g(f(t)) = t$, $dx = f'(t)\,dt$ 이고 f는 일대일대응이므로 $x = f(a)$일 때 $t = a$, $x = f(b)$일 때 $t = b$ 이다. 그러므로

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b t f'(t)\,dt$$

를 얻는다.

[증명 2] 정리 2.2.3을 부분적분법을 이용해 증명해보자.

부분적분법에 따라

$$\int_a^b x f'(x)\,dx = \int_a^b x\,d(f(x)) = [x f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$$

이 성립한다.

미분법과 정적분

앞서 여러 가지 적분법을 살펴보고 그 의미를 이해해보았다. 그 전에 적분의 본질적인 의미는 무엇이었는가? 적분은 결국 '**무엇이 미분되었는가?**'라는 물음에 대한 답을 찾는 과정이라고 할 수 있다.

다시 말해 적분의 본질은 적분을 계산하는 테크닉 그 자체보다도 무엇이 미분되어 그 함수가 되었는지를 거꾸로 추론하는 것에 있다.

이러한 추론을 위해서는 미분법에 대한 이해를 검토해볼 필요가 있다. 미분가능한 함수 f, g에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(2) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ $\quad (g(x) \neq 0)$

위 두 등식에서 만약 $f(x)$, $g(x) \neq 0$이라 가정하고 형식적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x) \times \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$$

그저 인수분해를 이용하여 변형하였을 뿐인데, $\square' = \square \times A$ 꼴의 등식을 얻었다. 그러면 이어서 $\square' = \square \times A$ 꼴의 등식으로부터 로그미분법과 관련이 있다는 것을 눈치챌 수 있었을 것이다.

우선 로그미분법을 살펴보자. 미분가능한 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

$$\{\ln|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0)$$

로그미분법을 이용하면 $f(x),\ g(x) \neq 0$일 때 자연스럽게 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\{f(x)g(x)\}'}{f(x)g(x)} = \{\ln|f(x)g(x)|\}' = \{\ln|f(x)| + \ln|g(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{\{f(x)/g(x)\}'}{f(x)/g(x)} = \{\ln|f(x)/g(x)|\}' = \{\ln|f(x)| - \ln|g(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

위 두 등식의 양변에 각각 $f(x)g(x),\ f(x)/g(x)$를 곱하면 다음을 얻는다.

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)g(x) \times \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f(x)}{g(x)} \times \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$$

이처럼 곱의 미분법과 몫의 미분법은 로그미분법을 통해 의미가 재해석된다. 더욱이, $\square' = \square \times A$ 꼴의 등식에서 A의 공통점이 있는데, 바로 **(도함수) / (함수)** 꼴을 포함한다는 것이다. 정리하면 다음과 같다.

> **정리 2.2.1 | 곱의 미분법과 몫의 미분법의 재해석**
>
> 미분가능한 함수 $f,\ g$에 대하여 다음이 성립한다.
>
> ① $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x)\left\{\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$
>
> ② $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f(x)}{g(x)}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right\} \quad (g(x) \neq 0)$
>
> ③ $\{\ln|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0)$

정리 2.2.1은 적분을 위해서 뿐만 아니라 미분의 편의성을 위해서도 알아 두도록 하자.

정리 2.2.1을 이용하여 적분을 구할 수도 있다.

적용하기

미분법의 재해석을 이용하여 정적분

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\, dx$$

을 구해보자. 곱의 미분법을 활용하기 위해서는 $(\pi - x)\sin x$에서 적당한 인수분해와 식의 변형을 통해 **(도함수) / (함수)** 꼴을 얻으면 된다. $(\cos x)' = -\sin x$ 임을 이용하여

$$(x - \pi)\cos x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

로 나타내면 **(도함수) / (함수)** 꼴을 얻을 수 있고, $x - \pi$가 곱해져있으므로

$$(x - \pi)\cos x\left(\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x - \pi}\right) - \cos x$$

와 같이 변형하면 곱의 미분법에 따라 $((x - \pi)\cos x)' - \cos x$로 나타낼 수 있고, $(\sin x)' = \cos x$이므로 최종적으로 $((x - \pi)\cos x - \sin x)'$을 얻는다. 즉,

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\, dx = \int_0^{\pi} ((x - \pi)\cos x - \sin x)'\, dx = (x - \pi)\cos x - \sin x\,\Big|_0^{\pi} = \pi$$

적용하기 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx = a$ (a는 상수)라 할 때, 정적분

$$\int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2}dx$$

을 a에 대한 식으로 나타내보자.

앞의 문제와 마찬가지로 무엇이 미분된 것인지 확인하기 위해서는 **(도함수) / (함수)** 꼴을 얻어야한다. $(1+x^4)' = 4x^3$임을 이용하면,

$$\frac{x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{4} \times \boxed{\frac{x}{1+x^4}} \times \left(\frac{4x^3}{1+x^4}\right)$$

로 나타낼 수 있다. 앞의 문제와는 달리 식의 변형이 쉽지 않아보이지만,

$$\frac{x}{1+x^4}$$

의 미분에서 얻을 수 있다는 사실을 분명히 알 수 있다. 이를 미분해보면

$$\left(\frac{x}{1+x^4}\right)' = \frac{x}{1+x^4} \times \left(\frac{1}{x} - \frac{4x^3}{1+x^4}\right)$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{4x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{1+x^4} - \left(\frac{x}{1+x^4}\right)'$$

이제 양변에 적분구간이 $[0, 1]$인 정적분을 취하면

$$4 \times \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx - \left[\frac{x}{1+x^4}\right]_0^1$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2}dx = \frac{1}{4}\left(a - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{1}{8}$$

을 얻는다.

읽어보기 **일계미분방정식 $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$의 해** [심화코너]

$y = p(x)$라 하면, $p'(x) + f(x)p(x) = g(x)$이고

$$p(x)\left\{\frac{p'(x)}{p(x)} + f(x)\right\} = g(x)$$

이다. 이때 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $f(x) = \frac{(e^{F(x)})'}{e^{F(x)}}$이므로 양변에 $e^{F(x)}$를 곱하면

$$e^{F(x)}p(x)\left\{\frac{p'(x)}{p(x)} + f(x)\right\} = (e^{F(x)}p(x))' = e^{F(x)}g(x)$$

이고 다음을 얻는다.

$$p(x) = \frac{1}{e^{F(x)}}\int e^{F(x)}g(x)\,dx$$

위 과정에서 $e^{F(x)}$를 **적분인자**(integrating factor)라 하고, $\mu(x)$로 나타낸다.

정리 2.2.2 | $f(x)$를 포함한 정적분 2가지

미분가능하고 도함수가 연속인 함수 f에 대하여 다음이 성립한다.

① $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^n f'(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)\}^n d(f(x)) = \left.\frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$

② $\displaystyle\int_a^b e^x(f(x)+f'(x))\,dx = \int_a^b e^x f(x)\left(\frac{(e^x)'}{e^x}+\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx = \int_a^b (e^x f(x))'\,dx = e^x f(x)\Big|_a^b$

정리 2.2.2의 두 등식은 매우 자주 등장하는 정적분인 만큼 암기하는 것도 좋은 선택이다.

함수와 정적분

이제 정적분의 의미를 재검토하고 확장해보자.

정리 2.3.1 | 정적분의 의미 I

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 f에 대하여 $a<x<b$이면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),\quad \text{다시 말해 } \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x) \text{ 이다.}$$

극한을 이용한 표현은 구간 $[x, x+h]$에서 정적분의 구간의 길이 h에 대한 비의 극한은 구간에 수직인 성분과 같다는 것을 의미한다.

정리 2.3.1은 함수

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

는 $f(x)$의 부정적분 중 하나임을 말해준다.

정리 2.3.2 | 정적분의 의미 II

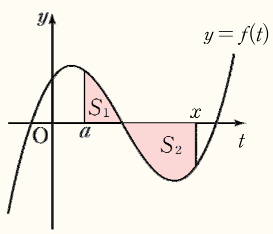
a를 포함하는 닫힌구간에서 연속인 함수 f에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 도형 중 $f(t)\geq 0$인 부분의 넓이를 S_1, $f(t)\leq 0$인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$\int_a^x f(t)\,dt = \begin{cases} S_1-S_2 & (x\geq a) \\ S_2-S_1 & (x<a)\end{cases}$$

이 성립하고,

$$\int_a^x |f(t)|\,dt = S_1+S_2$$

이다.



정리 2.3.2은 두 함수

$$\int_a^x f(t)\,dt,\quad \int_a^x |f(t)|\,dt$$

는 각각 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 도형의 부호를 가진 넓이 · 넓이이다.

이제 정적분의 의미를 위치가 $x=f(t)$로 주어지는 수직선 위의 점 P의 운동과 연관지어 이해해보자.

$$\int_a^b v(t)\,dt = (\text{시각 } t=a\text{부터 } t=b\text{까지 위치 } x\text{의 변화}),$$

$$\int_a^b |v(t)|\,dt = (\text{시각 } t=a\text{부터 } t=b\text{까지 위치 } x\text{가 실제로 이동한 거리})$$

그런데 $v(t)=f'(t)$이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

정리 2.3.3 정적분의 의미 III

미분가능한 함수 f에 대하여 f'이 a를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음이 성립한다.

(1) $\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x d(f(t)) = f(x)-f(a)$

$=$ (시각 $t=a$부터 $t=x$까지 위치 $f(t)$의 최종적인 변화)

$=$ (t의 값이 a에서 x까지 변할 때의 $f(t)$의 평균변화율) $\times$ $(x-a)$

(2) $\int_a^x |f'(t)|\,dt$ $=$ (시각 $t=a$부터 $t=x$까지 위치 $f(t)$가 실제로 이동한 거리)

함수의 정적분은 넓이와 관련 있고, 도함수의 정적분은 거리와 관련있다.

적용하기

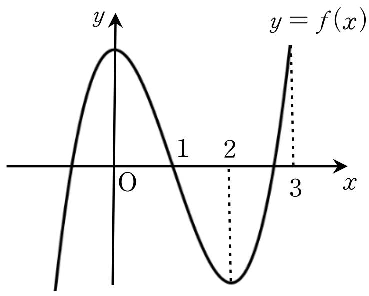
함수 $f(x)=x^3-3x^2+2$와 실수 t에 대하여

① 함수 $g(t)=\int_0^t f(x)dx$ 는 $t>0$일 때 구간 $[0,t]$에서 x에 대한 함수 $f(x)$의 정적분이고, $t<0$일 때 구간 $[t,0]$에서 x에 대한 함수 $f(x)$의 정적분의 부호를 바꾼 것이다.

$g(1) = \int_0^1 x^3-3x^2+2\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right]_0^1 = \frac{5}{4}$

$g(2) = g(1)-g(1) = 0$

$g(-1) = -\int_{-1}^0 x^3-3x^2+2\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right]_{-1}^0 = -\frac{3}{4}$



② 함수 $S(t)=\int_0^t |f(x)|dx$는 x축과 두 직선 $x=0$, $x=t$ 및 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

$$S(1) = g(1) = \frac{5}{4},\quad S(2) = g(1)+g(1) = \frac{5}{2}$$

③ 함수 $h(t)=\int_0^t f'(x)\,dx$는 시각 0부터 시각 t까지 위치 $f(x)$의 최종적인 변화 또는 (구간 $[0,t]$의 길이) $\times$ (x의 값이 0에서 t까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율)이다.

$$h(1)=1\times(-2)=-2,\quad h(2)=2\times(-2)=-4,\quad h(3)=3\times 0=0$$

④ 함수 $s(t)=\int_0^t |f'(x)|\,dx$는 시각 0부터 시각 t까지 위치 $f(x)$가 실제로 이동한 거리이다.

$$s(1)=2,\quad h(2)=4,\quad h(3)=4+4=8$$

정리 2.3.4 정적분의 의미 IV

미분가능한 함수 f, g에 대하여 f', g'이 a를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$: 도함수가 정적분

(2) $\frac{d}{dx}\int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt = g'(x)\int_a^x f(t)\,dt$: 도함수가 ($t=x$에서 $g(t)$ 속도) $\times$ (정적분)

정리 2.3.4를 증명해보자. (2)의 등식

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt = g'(x)\int_a^x f(t)\,dt$$

을 증명하면 (1)은 함께 증명된다. 이를 증명하는 방법은 4가지가 있으며, 모든 방법을 숙지하도록 하자.

① **변수의 구분** : 가장 많이 활용하는 방법으로, 미분법을 사용할 수 있도록 변수를 구분하는 방법이다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[g(x)\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x g(t)f(t)\,dt\right] = g'(x)\int_a^x f(t)dt$$

② **부분적분법** : 부분적분법의 의미와 미적분의 기본정리를 잘 이해했다면 활용할 수 있는 방법이다.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 라 하면 $F(a) = 0$이고

$$\begin{aligned}\int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt &= \int_a^x \{g(x)-g(t)\}\,d\,F(t)\\ &= \{g(x)-g(t)\}F(t)\Big|_a^x - \int_a^x F(t)\,d(g(x)-g(t)) = \int_a^x F(t)\,g'(t)\,dt\end{aligned}$$

이므로, 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_a^x F(t)\,g'(t)\,dt = F(x)g'(x) = g'(x)\times\int_a^x f(t)\,dt$$

③ **치환적분법** : 치환적분법과 합성함수의 미분법을 잘 이해했다면 활용할 수 있는 방법이다.
다만 이 방법은 (1)을 활용하므로 (1)을 증명할 필요가 있다.

$g(t) = s$로 적당히 치환할 수 있다고 가정하고 $t = \alpha(s)$라 하자.

$P(x) = \int_{g(a)}^x (x-s)f(\alpha(s))\alpha'(s)\,ds$라 하면 $P'(x) = \int_{g(a)}^x f(\alpha(s))\alpha'(s)\,ds$이고

함수 $\int_c^{g(x)}\{g(x)-t\}h(t)\,dt$ 에서 $g(x)$가 합성되어있다는 것을 눈치채야 한다.

치환적분법에 따라 $P'(g(x)) = \int_{g(a)}^{g(x)} f(\alpha(s))\alpha'(s)\,ds = \int_a^x f(t)\,dt$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\int_{g(a)}^{g(x)} \{g(x)-s\}f(\alpha(s))\alpha'(s)\,ds\\ &= \frac{d}{dx}P(g(x)) = g'(x)\times P'(g(x)) = g'(x)\times\int_a^x f(t)dt\end{aligned}$$

을 얻는다.

④ **미분의 정의** : 미분법을 바로 이용할 수 없는 미분은 미분의 정의를 이용하면 된다. 가장 추천!

정적분의 성질 $\int_a^{x+h} = \int_x^{x+h} + \int_a^x$ 과 $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \to f(x)$ 임을 이용하자.

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h}\{g(x+h)-g(t)\}f(t)\,dt - \int_a^x \{g(x)-g(t)\}f(t)\,dt\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h}\{g(x+h)-g(t)\}f(t)\,dt + \{g(x+h)-g(x)\}\int_a^x f(t)\,dt\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{g(x+h)\underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt}_{\to f(x)} - \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt}_{\to g(x)f(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}\int_a^x f(t)dt\right\}\\ &= g(x)f(x) - g(x)f(x) + g'(x)\int_a^x f(t)\,dt = g'(x)\int_a^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

적용하기 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 정적분

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,dx$$

을 구해보자. $f(x)=\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ 라 하고 $f(\pi)$의 값을 구하는 것과 동치이다. **정리 2.3.4**에 의해

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\int_0^x \sin t\,dt=\left[-\cos t\right]_0^x=-\cos x+1$$

이므로 $f(x)=x-\sin x$ 이고 $f(\pi)=\pi$를 얻는다.

읽어보기 **정리 2.3.4**를 이용하면 몇 가지 정적분의 의미를 재해석해볼 수 있다. 함수

$$g(x)=\int_a^x x-t\,dt$$

는 $g(x)=\int_a^x (x-t)\cdot 1\,dt$ 이므로 $g'(x)=\int_a^x 1\,dt=x-a$이다. $g(a)=0$이므로

$$g(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2$$

을 얻는다. 이어서 함수

$$h(x)=\int_a^x f(x)-f(t)\,dt$$

는 $h(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\cdot 1\,dt$ 이므로 $h'(x)=f'(x)\times\int_a^x 1\,dt=f'(x)\times(x-a)$이고

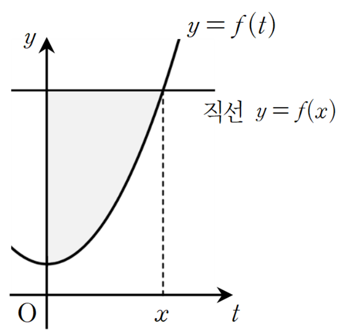
$$h(x)=\int_a^x (t-a)f'(t)\,dt$$

를 얻는다. 만약 $a=0$이면

$$h(x)=\int_0^x f(x)-f(t)\,dt=\int_0^x t\,f'(t)\,dt$$

임을 알 수 있는데, **정리 2.1.3**에 따라 우변은 역함수의 정적분과 관련이 있을 것이라 추측할 수 있다.

실제로 좌변은 다음과 같이 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=f(x)$, y축이 이루는 정적분이므로 역함수의 정적분과 관련이 있다.



위 두 사실을 암기할 필요는 없으며, **정리 2.3.4**를 이해하고 활용할 수 있다면 충분하다.

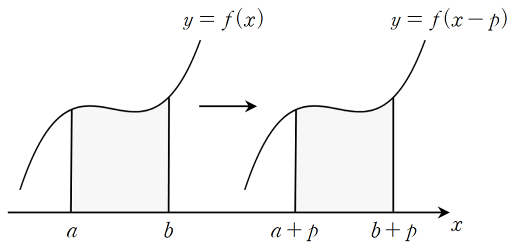
대칭성과 정적분

함수의 그래프의 대칭성을 이용하면 정적분을 간소화할 수 있다.

> **정리 2.4.1 | 우함수와 기함수의 정적분**
>
> 연속함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여
>
> ① **우함수** : $f(-x) = f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
>
> ② **기함수** : $f(-x) = -f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

정리 2.4.1은 교과서에서도 소개되고 있는 만큼 정확히 이해하고 활용할 수 있어야한다. 또한 평행이동을 이용하면 다음의 성질을 얻는다.

> **정리 2.4.2 | 평행이동과 정적분**
>
> a, b를 포함하는 닫힌구간에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.
>
> $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p)\,dx$$



정리 2.4.2는 정적분은 평행이동에 의해 변하지 않는다는 사실을 말해준다. 이를 이용하면 그래프가 직선 $x=p$에 대하여 대칭인 함수, 점 $(p,\,0)$에 대하여 대칭인 함수의 정적분을 간소화할 수 있다.

> **정리 2.4.3 | 대칭성과 정적분**
>
> p는 실수이고 연속함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여
>
> (1) $f(2p-x) = f(x)$이면 직선 $x=p$에 대하여 대칭이고 다음이 성립한다.
>
> $$\int_{p-a}^{p+a} f(x)\,dx = 2\int_{p}^{a+p} f(x)\,dx$$
>
> (2) $f(2p-x) = -f(x)$이면 점 $(p,\,0)$에 대하여 대칭이고 다음이 성립한다.
>
> $$\int_{p-a}^{p+a} f(x)\,dx = 0$$

두 항등식을 **미분**하면 $f'(x)$는 각각 점 $(p,\,0)$에 대하여 대칭, 직선 $x=p$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

정리 2.4.3의 대칭성을 나타내는 등식을 이해해보자. 정의역의 모든 실수 x에 대하여

(1) $g(-x) = g(x)$인 함수 g가 존재하여 $f(x) = g(x-p)$이면 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

(2) $g(-x) = -g(x)$인 함수 g가 존재하여 $f(x) = g(x-p)$이면 점 $(p,\,0)$에 대하여 대칭이다.

(1)에서 등식
$f(2p-x)$
$=g((2p-x)-p)$
$=g(p-x)$
$=g(x-p)$
$=f(x)$
이 성립함을 확인하자. (2)도 비슷한 방법으로 확인된다.

추가적으로, 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f(2p-x)+f(x) = 2q$이면 $h(x) = f(x)-q$라 할 때 $h(2p-x) = -h(x)$이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 점 $(p,\,0)$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(p,\,q)$에 대하여 대칭이다.

정리 2.4.4 | 함수의 곱과 대칭성

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $f(x)$, $g(x)$가 모두 우함수이거나 모두 기함수이면 $f(x)g(x)$는 우함수

$\Rightarrow$ f, g가 모두 직선 $x=p$ 대칭이거나 모두 점 $(p, 0)$ 대칭이면 fg는 직선 $x=p$ 대칭

(2) $f(x)$, $g(x)$가 적당한 순서로 우함수, 기함수이면 $f(x)g(x)$는 기함수

$\Rightarrow$ f, g가 적당한 순서로 직선 $x=p$ 대칭, 점 $(p, 0)$ 대칭이면 fg는 점 $(p, 0)$ 대칭

정리 2.4.4를 증명해보자. 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$ 이면 $f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$이다.

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ 이면 $f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$이다.

(2) $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ 이면 $f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$이다.

정리 2.4.5 | 주기성과 정적분

연속함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f(x+p)\text{이면 } \int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx \text{ 이다.}$$

정리 2.4.5의 다른 증명방법은 $f(x+p)-f(x)=0$에서 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(x+p)-F(x)=C$이므로 $\int_x^{x+p} f(t)\,dt=C$를 이용하는 것이다.

정리 2.4.5를 증명해보자. 항등식

$$f(x)=f(x+p)$$

의 양변을 적분구간이 $[a, b]$인 정적분을 취하면 **정리 2.4.2**에 의해

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x+p)\,dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx$$

이다.

정리 2.4.6 | 주기성과 대칭성의 관계

연속함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(2a-x)=f(x)$, $f(2b-x)=f(x)$이면 $f(x)=f(x+2(b-a))$이다.

(2) $f(2a-x)=f(x)$, $f(x)=f(x+p)$이면 $f(x)=f\left(2\left(a+\frac{p}{2}\right)-x\right)$이다.

정리 2.4.6은 선대칭 & 선대칭 $\Rightarrow$ 주기성, 선대칭 & 주기성 $\Rightarrow$ 선대칭임을 확인하는 것으로 충분하다.

정리 2.4.6를 증명해보자.

(1) $f(2a-x)=f(x)$, $f(2b-x)=f(x)$이면

$$f(2a-x)=f(x)=f(2b-2a+2a-x)$$

이고, $2a-x=t$로 치환하면 $f(t)=f(t+2(b-a))$를 얻는다.

(2) $f(2a-x)=f(x)$, $f(x)=f(x+p)$이면

$$f(2a-x)=f(x)=f(2a+p-(2a-x))$$

이고, $2a-x=t$로 치환하면 $f(t)=f\left(2\left(a+\frac{p}{2}\right)-t\right)$를 얻는다.

적용하기 대칭성을 이용하여 정적분

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,dx$$

을 구해보자. $\frac{\pi}{2}-x$는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)$에 대하여 대칭이고 $\sin x$는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x$는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)$에 대하여 대칭이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x\,dx + \cancel{\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x\,dx} = \pi$$

적용하기 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ $(c>0$인 상수$)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)이다.

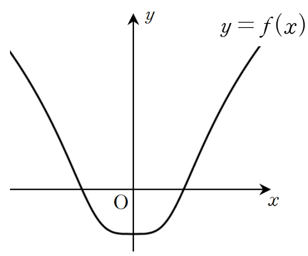
$a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|\,dx$

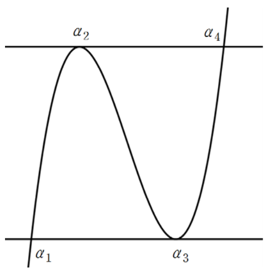
$mk\times e^c$의 값을 구하시오. **[2018학년도 6월 평가원 (가) 30번]**

풀이 $f(x)$는 우함수이므로 $g(x)-g(0)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_{-x}^0 f(t)\,dt = g(0)-g(-x)$ 로부터 $g(x)-g(0)$은 기함수이다. $f(x)=0$을 만족하는 x의 값을 각각 $r,\ -r\ (r>0)$로 나타내자. 그러면 $y=g(x)$의 그래프는 $x=-r,\ r$에서 극값을 갖는다. 또, $g(a)=0$은 $y=g(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 하나가 a인 것을 의미한다. $y=g(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서만 만나기 위해서는 $g(x)$의 두 극값 중 어느 하나는 0이어야한다.



오른쪽 그림과 같이 가능한 a의 값은 4개이므로 $m=4$이고 $g(x)-g(0)$이 원점에 대하여 대칭이었으므로,

$$a\in\{\alpha_1,\ \alpha_2=-r,\ \alpha_3=r,\ \alpha_4=-\alpha_1\}$$



이다. 이제 $a=\alpha_1$이라 하자. 그러면 $g'(x)=f(x)$로부터 (가)에 의해 $g'(1)=f(1)=0$이므로 $c=\ln 2$이다.

그러면 $f(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $-1,\ 1$이므로 $\alpha_2=-1,\ \alpha_3=1$를 얻는다.

$\alpha_1=-p,\ \ \alpha_4=p$로 나타내자. 그러면

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = \int_{-p}^{p}\cancel{g(x)-g(0)}+g(0)\,dx = 2p\times g(0),\quad \int_0^1|f(x)|\,dx = -\int_0^1 g'(x)\,dx = -(g(1)-g(0)) = g(0)$$

이고, $k=2$를 얻는다. 따라서 $mk\times e^c = 4\times 2\times 2 = 16$이다.

12 2026학년도 수능 (미적분) 28번

함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))$ $(s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$ 의 값은? [4점]

① $\frac{161}{12}+\ln 3$ ② $\frac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\frac{53}{4}+\ln 2$

④ $\frac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\frac{157}{12}+\ln 2$

풀이 1 **부분적분법을 이용하여 역함수의 정적분을 구할 수 있다.**

함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$를 고려하자.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, f(s))$이고 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$에서의 접선의 방정식은 $y = f'(s)(x-s) + f(s)$이므로 이 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -sf'(s) + f(s))$이다. 이 두 점 사이의 거리는

$$|-sf'(s)| = s \times \left(s - 1 + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s^3}{s+1} \quad (s > 0)$$

이므로 $h(s) = \frac{s^3}{s+1}$이라 하면 다음을 얻는다.

$$h(g(t)) = t$$

그런데 h의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이므로 h는 증가함수이다. 곧, h는 일대일대응인 함수임에 따라 g는 h의 역함수($g = h^{-1}$)이므로 주어진 정적분은 다음과 같다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt = \int_{g\left(\frac{1}{2}\right)}^{g\left(\frac{27}{4}\right)} sh'(s)\,ds$$

방정식 $h(s) = \frac{1}{2}$, $h(s) = \frac{27}{4}$을 풀자.

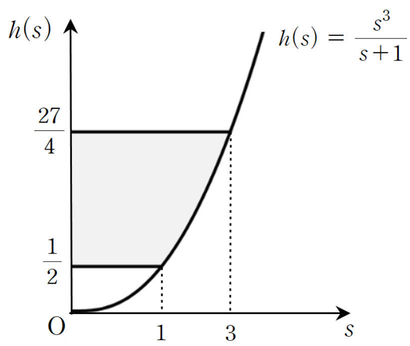
$\frac{s^3}{s+1} = \frac{1}{2}$로부터 $s = 1$, $\frac{s^3}{s+1} = \frac{27}{4}$로부터 $s = 3$이므로 $h(1) = \frac{1}{2}$, $h(3) = \frac{27}{4}$이고 부분적분법에 따라

$$\begin{aligned}\int_1^3 sh'(s)\,ds = sh(s)\Big|_1^3 - \int_1^3 h(s)\,ds &= 3h(3) - h(1) - \int_1^3 \frac{s^3}{s+1}\,ds \\ &= \frac{81}{4} - \frac{1}{2} - \int_1^3 s^2 - s + 1 - \frac{1}{s+1}\,ds \\ &= \frac{79}{4} - \left(\frac{20}{3} - \ln 2\right) = \frac{157}{12} + \ln 2\end{aligned}$$

를 얻는다. 그러므로 정답은 ⑤이다.

풀이 2 **함수의 그래프를 이용하여 역함수의 정적분을 구할 수 있다.**

함수 $h(s) = \frac{s^3}{s+1}$ $(s > 0)$의 그래프를 그려보자.



그러면 $g(t)$는 곡선 $y = h(s)$과 직선 $y = t$의 교점의 x좌표이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$$

는 오른쪽 그림에서 나타내어진 영역의 넓이와 같다. 그러므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt = 3 \times \frac{27}{4} - 1 \times \frac{1}{2} - \int_1^3 \frac{s^3}{s+1}\,ds = \frac{157}{12} + \ln 2$$

를 얻는다.

13 2025학년도 9월 평가원 (미적분) 28번

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f'(2x)\sin \pi x + x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\,dx + \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$　② $-\frac{1}{2\pi}$　③ $-\frac{1}{3\pi}$　④ $-\frac{1}{4\pi}$　⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

풀이 **부분적분법을 이용하여 역함수의 정적분을 구할 수 있다. 치환적분법을 이용하여 정적분을 간단히 나타낼 수 있다.**

우선 적분구간이 $[0, 1]$이므로 $g(0) = 0$, $g(1) = 1$임을 확인하자.

좌변을 간단히 하면

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(1)} x\,g'(x)\,dx = \int_0^1 x\,g'(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,d(g(x)) = \left[x\,g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_0^1 g(x)\,dx = 1 - \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x + x\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$$

이므로 등식

$$\frac{1}{2} - \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx + \frac{1}{4}$$

을 얻는다. 그러므로

$$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{12}$$

이고, $2x = t$로 치환하면 $dx = \frac{1}{2}dt$, $[0, 1] \to [0, 2]$이므로

$$\frac{1}{12} = \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f'(t)\sin\frac{\pi}{2}t\,dt$$

로부터 $\int_0^2 f'(x)\sin\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{1}{6}$을 얻는다. 이제 부분적분법을 이용하면

$$\frac{1}{6} = \int_0^2 f'(x)\sin\frac{\pi}{2}x\,dx = \int_0^2 \sin\frac{\pi}{2}x\,d(f(x)) = \left[f(x)\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^2 - \int_0^2 f(x)\,d\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

이고, 다음을 얻는다.

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = -\frac{1}{3\pi}$$

즉, 정답은 ③이다.

14 2022학년도 수능 (미적분) 30번

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
>
> $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

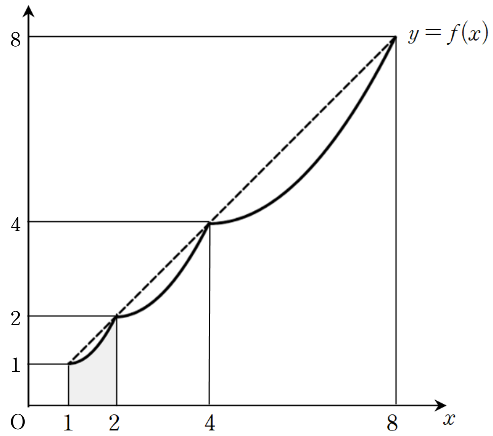
[4점]

풀이 함수의 그래프를 이용하여 역함수의 정적분을 구할 수 있다.

구하는 정적분이

$$\int_{1}^{8} x f'(x)\,dx = \int_{f(1)}^{f(8)} g(x)\,dx$$

이므로 $g(x)$에 대한 정보를 얻어보자. $g(1)=1$이고, $g(2)=2f(1)=2$, $g(4)=2f(2)=4$, $g(8)=2f(4)=8$ 로부터 $y=f(x)$의 그래프는 $(1,1)$, $(2,2)$, $(4,4)$, $(8,8)$을 지난다.



오른쪽 그림에서 색칠된 영역의 넓이는

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{5}{4}$$

이므로

$$\int_{1}^{2} g(x)\,dx = 2\times 2 - 1\times 1 - \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{7}{4}$$

이다. 항등식 $g(2x)=2f(x)$ $(x \geq 1)$은 곧

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \ (x \geq 2)$$

을 의미하므로 양변을 각각 적분구간이 $[2, 4]$, $[4, 8]$인 정적분을 취하면 치환적분법에 따라

$$\int_{2}^{4} g(x)\,dx = \int_{2}^{4} 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 4\int_{1}^{2} f(t)\,dt = 4\times\frac{5}{4} = 5$$

$$\int_{4}^{8} g(x)\,dx = \int_{4}^{8} 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 4\int_{2}^{4} f(t)\,dt = 4\times\left(4\times 4 - 2\times 2 - \int_{2}^{4} g(x)\,dx\right) = 28$$

을 얻는다. 그러므로

$$\int_{1}^{8} x f'(x)\,dx = \int_{1}^{8} g(x)\,dx = \frac{7}{4} + 5 + 28 = \frac{139}{4}$$

이다. 따라서 $p+q=143$이다.

15 2024학년도 수능 (미적분) 28번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고,

$x < 0$일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$이다.

모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.

두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k \quad (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx = e^4 - 1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$　② $\frac{4}{3}e^7$　③ $\frac{5}{4}e^9$　④ $\frac{6}{5}e^{11}$　⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

풀이 연속함수의 성질을 이해한다. 함수의 그래프를 이용하여 역함수의 정적분을 구할 수 있다.

함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형을 완성해보자. 주어진 조건으로부터

$$\lim_{t \to 0} g(t) = 0$$

이므로

$$2g(t) + h(t) = k$$

의 양변에 $t \to 0$인 극한을 취하면

$$\lim_{t \to 0} h(t) = k$$

를 얻는다. 그런데 정의에 따라 $f(h(t)) = t$이고 f는 연속함수이므로

$$\lim_{t \to 0} t = \lim_{t \to 0} f(h(t)) = f\left(\lim_{t \to 0} h(t)\right) = f(k)$$

이고, $f(k) = 0$이다. 이때, $k < 0$이면 $f(k) = -4ke^{4k^2} \neq 0$이므로 $k \geq 0$를 얻는다.

step 1 $f(x) = 0 \ \ (0 \leq x \leq k)$임을 보이자.

(i) $k = 0$인 경우는 자명하다.

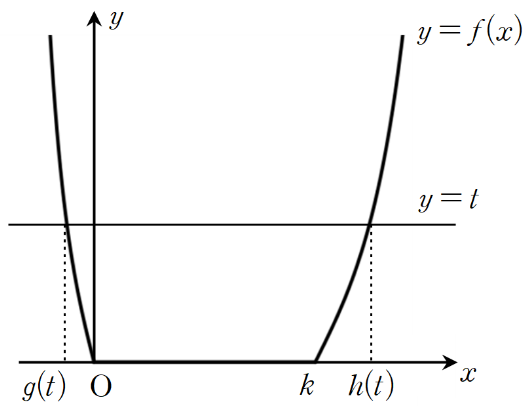
(ii) $k > 0$인 경우, $f(a) > 0$인 $a \in (0, k)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 사잇값 정리에 의해 $f(c_1) = \dfrac{f(a)}{2}$를 만족하는 $c_1 \in (0, a)$이 존재하고, 마찬가지로 사잇값 정리에 의해 $f(c_2) = \dfrac{f(a)}{2}$를 만족하는 $c_2 \in (a, k)$가 존재한다. 곧

$$f\left(g\left(\frac{f(a)}{2}\right)\right) = f(c_1) = f(c_2) = \frac{f(a)}{2}$$

이고 $g\left(\dfrac{f(a)}{2}\right) < 0 < c_1 < a < c_2 < k$이므로 방정식 $f(x) = \dfrac{f(a)}{2}$의 근이 2개임에 모순이다. 따라서

$$f(x) = 0 \ \ (0 \leq x \leq k)$$

이다.



step 2 주어진 등식의 의미를 파악해보자.

$f(x) = 0 \ \ (0 \leq x \leq k)$임을 얻었으므로

$$\int_0^7 f(x)\,dx = \int_k^7 f(x)\,dx = e^4 - 1$$

이고, $k \geq 7$이면 위 정적분은 0이므로 $k < 7$이다. 또한 주어진 등식은

$$h(t) - k, \quad |g(t)| = -g(t)$$

의 관계를 나타내는 등식임을 확인할 수 있다. 항등식

$$h(t) - k = -2g(t) = 2|g(t)| \quad (t \geq 0)$$

의 양변에 적분구간이 $[0, f(7)]$인 정적분을 취하면

$$\int_0^{f(7)} h(t) - k\,dt = 2\int_0^{f(7)} |g(t)|\,dt$$

을 얻는다.

step 3 정적분의 의미를 파악하여 k의 값을 구해보자.

이어서 위 등식의 좌변은

$$\int_0^{f(7)} h(t)-k\,dt = (7-k)\times f(7)-\int_k^7 f(x)dx = (7-k)f(7)-\left(e^4-1\right)$$

이고, 우변은

$$\begin{aligned}\int_0^{f(7)} |g(t)|\,dt &= \frac{7-k}{2}\times f(7)-\int_{\frac{k-7}{2}}^0 f(x)\,dx\\ &= \frac{7-k}{2}\times f(7)-\int_{\frac{k-7}{2}}^0 -4xe^{4x^2}dx\\ &= \frac{7-k}{2}\times f(7)+\frac{1}{2}\int_{\frac{k-7}{2}}^0 e^{4x^2}d\left(4x^2\right)\\ &= \frac{7-k}{2}\times f(7)+\frac{1}{2}\left[e^{4x^2}\right]_{\frac{k-7}{2}}^0\\ &= \frac{7-k}{2}\times f(7)+\frac{1}{2}\left(1-e^{(k-7)^2}\right)\end{aligned}$$

로부터 $2\int_0^{f(7)} |g(t)|\,dt = (7-k)f(7)+\left(1-e^{(k-7)^2}\right)$이다.

즉, $-e^4+1=1-e^{(k-7)^2}$, $k<7$로부터 $k=5$이고 $8-5=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)$, $9-5=-2\times(-2)$이므로

$$f(8)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-4\left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=6e^9,\quad f(9)=f(-2)=-4(-2)e^{4(-2)^2}=8e^{16}$$

이다. 따라서 정답은 ② $\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{8e^{16}}{6e^9}=\frac{4}{3}e^7$이다.

16 2026학년도 9월 평가원 (미적분) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1) = 4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx = 34\,, \qquad \int_1^2 x\,g(x)\,dx = 53$$

일 때, $\int_1^2 x\,e^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

풀이 1 곱/몫의 미분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있다. (추천)

$\dfrac{(e^{f(x)})'}{e^{f(x)}} = f'(x)$이므로 $g(x) = xe^{f(x)}\left(\dfrac{1}{x} + f'(x)\right) = [xe^{f(x)}]'$이다.

$$34 = \int_1^2 g(x)\,dx = xe^{f(x)}\Big|_1^2 = 2e^{f(2)} - e^{f(1)}$$

$$53 = \int_1^2 x\,g(x)\,dx = \int_1^2 x\,d\left(xe^{f(x)}\right) = x^2 e^{f(x)}\Big|_1^2 - \int_1^2 xe^{f(x)}\,dx = 4e^{f(2)} - e^{f(1)} - I$$

이므로 $f(1) = 4\ln 2$ 로부터 $I = 2\left(2e^{f(2)} - e^{f(1)}\right) + e^{f(1)} - 53 = 68 + 16 - 53 = 31$이다.

풀이 2 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있다. (정직, 추천X)

$I = \displaystyle\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$ 라 하자.

$$g(x) = e^{f(x)} + xf'(x)e^{f(x)}, \quad xg(x) = xe^{f(x)} + x^2 f'(x)e^{f(x)}$$

이므로,

$$\int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 e^{f(x)}dx + \int_1^2 xf'(x)e^{f(x)}\,dx, \quad \int_1^2 xg(x)dx = I + \int_1^2 x^2 f'(x)e^{f(x)}\,dx$$

를 얻는다. 이때 $f'(x)e^{f(x)}\,dx = d\left(e^{f(x)}\right)$이므로

$$\int_1^2 xf'(x)e^{f(x)}\,dx = \int_1^2 x\,d\left(e^{f(x)}\right) = xe^{f(x)}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{f(x)}dx$$

로부터 $34 = 2e^{f(2)} - e^{f(1)}$을 얻는다. 또한

$$\int_1^2 x^2 f'(x)e^{f(x)}\,dx = \int_1^2 x^2\,d\left(e^{f(x)}\right) = x^2 e^{f(x)}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{f(x)}2x\,dx = 4e^{f(2)} - e^{f(1)} - 2I$$

로부터 $53 = 4e^{f(2)} - e^{f(1)} - I = 2\left(2e^{f(2)} - e^{f(1)}\right) + e^{f(1)} - I = 68 + e^{f(1)} - I$를 얻는다.

$f(1) = 4\ln 2$로부터 $I = 68 - 53 + e^{f(1)} = 15 + 16 = 31$이다.

풀이 3 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다. (킬러 대비)

$h(x) = \displaystyle\int_1^x (x-t)g(t)\,dt$라 하면 $h(1) = 0$, $h(2) = \displaystyle\int_1^2 (2-t)g(t)\,dt = 2 \times 34 - 53 = 15$ 이다.

$$\begin{aligned} h'(x) = \int_1^x g(t)\,dt &= \int_1^x e^{f(t)} + tf'(t)e^{f(t)}\,dt = \int_1^x e^{f(t)}dt + \int_1^x t\,d\left(e^{f(t)}\right) \\ &= xe^{f(x)} - e^{f(1)} = xe^{f(x)} - 16 \end{aligned}$$

이므로 $xe^{f(x)} = h'(x) + 16$이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx = \int_1^2 h'(x) + 16\,dx = h(2) - h(1) + 16 = 31$$

17 자체문항

$2 \leq t \leq 4$인 실수 t에 대하여 최고차항의 계수가 t인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1,\ f(1)=5,\ f''(1)=0$

(나) $x \leq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x)$이고,

$x > 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x}{2}\{1+g(x)\} \geq \int_0^x g(s)\,ds$$

이다.

$\int_2^4 g(x)dx = 26$일 때, 함수 $h(t)=\int_{-2}^t g(x)\,dx$의 최솟값을 a라 하자. $a \times (1-g(2))$의 값을 구하시오. [4점]

풀이 최고차항의 계수가 t인 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 변곡점을 갖고 $(0,1)$을 지나므로

$$f(x) = tx^3 - 3tx^2 + kx + 1$$

로 나타낼 수 있다. 또한 $f(1) = 5$이므로 $k = 2t+4$이고, $f(x) - 5$는 $(1,0)$에 대하여 대칭이므로 $\int_0^2 f(x) - 5\,dx = 0$이다. 즉,

$$\int_0^2 g(x) = \int_0^2 f(x)\,dx = 10$$

풀이 1 **곱/몫의 미분법을 활용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있다. (킬러 대비)**

$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ 라 하자. 그러면 $G'(x) = g(x)$이고 $G(2) = 10$이며 $x=2$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다. 이어서

$$x + xG'(x) - 2G(x) = x + xG(x)\left\{\frac{G'(x)}{G(x)} - \frac{2}{x}\right\} \geq 0$$

이고 $\frac{(x^2)'}{x^2} = \frac{2}{x}$이므로 양변을 $x^3\,(x \geq 2)$으로 나누면

$$\frac{1}{x^2} + \frac{G(x)}{x^2}\left\{\frac{G'(x)}{G(x)} - \frac{2}{x}\right\} = \left[\frac{-1}{x}\right]' + \left[\frac{G(x)}{x^2}\right]' = \left[\frac{G(x)-x}{x^2}\right]' \geq 0$$

을 얻는다. 즉, 함수 $\frac{G(x)-x}{x^2}$는 $x \geq 2$일 때 감소하지 않는 함수이다. 그런데 $\frac{G(2)-2}{2^2} = 2$이고, 조건으로부터

$G(4) = G(2)+26 = 36$, 곧 $\frac{G(4)-4}{4^2} = 2$이므로 $\frac{G(x)-x}{x^2}$는 사잇값 정리와 롤의 정리에 따라 닫힌구간 $[2,4]$에서 상수함수 2이고 $G(x) = 2x^2 + x\ \ (2 \leq x \leq 4)$이다.

$$h(t) = \int_{-2}^2 g(x)dx + G(t) - G(2) = 2t^2 + t - 10 + \int_{-2}^2 f(x)\,dx$$

에서 $\int_{-2}^2 tx^3 - 3tx^2 + (2t+4)x + 1 = 2\int_0^2 -3tx^2 + 1 = 2\left[-tx^3 + x\right]_0^2 = -16t + 4$이고 $h(t) = 2t^2 - 15t - 6$을 얻는다.

$2 \leq t \leq 4$에서 $h(t)$의 최솟값은 $h\left(\frac{15}{4}\right)$이고 $g(2) = 9$이므로 $(-8) \times h\left(\frac{15}{4}\right) = 273$이다.

풀이 2 **정적분을 활용하여 넓이에 관련된 문제를 해결할 수 있다. (추천)**

점 $(2,9)$와 점 $(4,17)$을 연결한 직선이 $x=2$, $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 26이다. $g(2) = 9$이고 $\int_2^4 g(x)\,dx = 26$이므로 함수 $y = g(x)$의 그래프는 이 직선을 기준으로 정적분의 차가 0이다. 다시 말해 $\int_2^4 g(x) - (4x+1)\,dx = 0$이다. 조건 (나)에 따라 $x > 2$일 때 $g(x)$는 $(0,0)$, $(x,0)$, $(x,g(x))$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이가 구간 $[0,x]$에서의 정적분보다 작지 않다. 그런데 만약 $g(c) - (4c+1) < 0$인 $c \in (2,4]$가 존재한다면 조건 (나)에 모순이다. 즉, 임의의 $x \in (2,4]$에 대하여 $g(x) - (4x+1) \geq 0$이고 $g(2) = 9$로부터 부등식

$$g(x) - (4x+1) \geq 0\ \ (2 \leq x \leq 4)$$

를 얻고 정적분의 성질에 따라

$$\int_2^4 g(x) - (4x+1)\,dx \geq 0$$

이다. 만약 $g(c) - (4c+1) > 0$인 $c \in (2,4]$가 존재한다면 $\int_2^4 g(x) - (4x+1)\,dx > 0$이므로 $\int_2^4 g(x) - (4x+1)\,dx = 0$임에 모순이다. 즉, 임의의 $x \in [2,4]$에 대하여 $g(x) - (4x+1) = 0$이고 $g(x) = 4x+1$를 얻는다. 그러면 다음이 성립한다.

$$h(t) = \int_{-2}^2 f(x)\,dx + \int_2^t 4x + 1\,dx = 2t^2 + t - 10 + \int_{-2}^2 tx^3 - 3tx^2 + (2t+4)x + 1\,dx = 2t^2 + t - 10 - 16t + 4 = 2t^2 - 15t + 6$$

18 2025학년도 수능 (미적분) 28번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = -x + e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$

④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

풀이 **정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다.**

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$$g(t)=\int_0^t f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\,dx=f'(t)\int_0^t x-t\,dx+\int_0^t f(t)-f(x)\,dx$$

이다. 그런데

$$\frac{d}{dt}\int_0^t (t-x)dx=t,\quad \frac{d}{dt}\int_0^t f(t)-f(x)\,dx=f'(t)t=-t^2+te^{1-t^2}$$

이므로

$$\int_0^t (t-x)\,dx=\frac{t^2}{2},$$

$$\int_0^t f(t)-f(x)\,dx=\int_0^t -x^2+xe^{1-x^2}dx=-\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}\left[e^{1-x^2}\right]_0^t=-\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}\left(e^{1-t^2}\right)+\frac{e}{2}$$

이고, $f'(1)=0$이므로 $g(1)=-\frac{5}{6}+\frac{e}{2}$이다.

$$g'(t)=-f''(t)\frac{t^2}{2}-f'(t)t+f'(t)t=-f''(t)\frac{t^2}{2}$$

로부터 $g'(1)=-\frac{1}{2}f''(1)$이고 $f''(1)=-1+\left[e^{1-x^2}(-2x)\right]_{x=1}=-3$이고

$g'(1)=\frac{3}{2}$이다. 따라서 정답은 ② $g(1)+g'(1)=\left(-\frac{5}{6}+\frac{e}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$이다.

19 2018년 3월 교육청 (가) 30번

함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & (x < 1) \\ e^{2-x} & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 할 때, $0 < t < 2$인 실수 t에 대하여 함수

$$g(t) = \int_0^t |f(t) - f(x)|\,dx$$

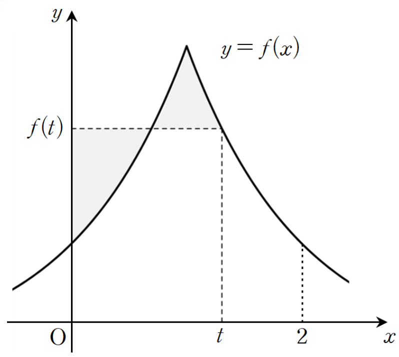
의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae + b\sqrt[3]{e^2}$이다. $a^2 \times b^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

풀이 **정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다. 대칭성을 이용하여 정적분을 간단히 할 수 있다.**

함수 $g(t)$는 직선 $y=f(t)$와 곡선 $y=f(x)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이를 의미한다.

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2-x)$를 만족하므로 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로



$g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t f(t)-f(x)\,dx & (0<t\le 1)\\ \displaystyle\int_0^{2-t} f(t)-f(x)dx-\int_{2-t}^{1} f(t)-f(x)\,dx-\int_1^t f(t)-f(x)dx & (1<t<2)\end{cases}$$

이다. 우선 $t=1$의 좌우에서 $g(t)$는 증가하다 감소하므로 $g(1)$이 $g(t)$의 극댓값임을

알 수 있다. 한편 $a\in\{0,\,1\}$일 때 $h_a(t)=\displaystyle\int_a^t f(t)-f(x)\,dx$ $(0<t<2)$라 하면

$$h_a{}'(t)=\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)-f(x)\,dx=f'(t)\,(t-a)$$

이다. 이때

$$\int_a^{2-t} f(t)-f(x)\,dx=\int_a^{2-t} f(2-t)-f(x)\,dx=h_a(2-t)$$

이므로 $t>1$일 때

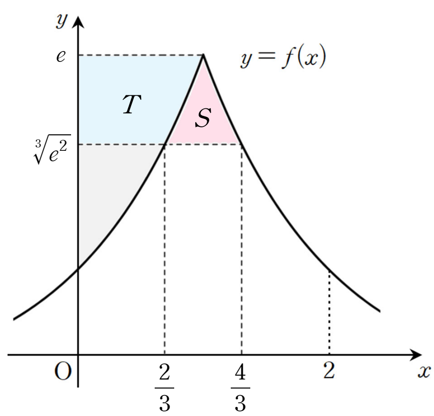
$$g(t)=h_0(2-t)+h_1(2-t)-h_1(t)$$

이고 $f'(t)=-f'(2-t)$임을 이용하면

$$\begin{aligned}g'(t)&=-h_0{}'(2-t)-h_1{}'(2-t)-h_1{}'(t)\\&=-f'(2-t)(2-t)-f'(2-t)(1-t)-f'(t)(t-1)\\&=f'(t)(2-t)+f'(t)(1-t)+f'(t)(1-t)\\&=f'(t)(4-3t)\end{aligned}$$

을 얻는다. 그러면 $f'(t)<0$ $(t>1)$임에 따라 $g'(t)$의 부호는 $t=\dfrac{4}{3}$의 좌우에서 $(-)\to 0\to(+)$으로 변하므로

$g\left(\dfrac{4}{3}\right)$가 $g(t)$의 극솟값이다.



오른쪽 그림에서 $\left|g(1)-g\left(\dfrac{4}{3}\right)\right|=|S-T|$이고

$f(x)-\sqrt[3]{e^2}$는 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$S=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x)-\sqrt[3]{e^2}\,dx=2\times\int_{\frac{2}{3}}^{1} e^x-\sqrt[3]{e^2}\,dx=2e-\frac{8}{3}\sqrt[3]{e^2}$$

$$T=e\times 1-\sqrt[3]{e^2}\times\frac{2}{3}-\int_{\frac{2}{3}}^{1} e^x\,dx=\frac{1}{3}\sqrt[3]{e^2}$$

이다. 따라서 $\left|g(1)-g\left(\dfrac{4}{3}\right)\right|=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$ 이고 $a=-2$, $b=3$이므로 $a^2\times b^2=36$이다.

20 2022학년도 6월 평가원 (공통) 20번

실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

21 2021학년도 사관학교 (공통)

상수 a $(a > 0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = 2x^2 + ax$ 이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$이다.

곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

풀이 **정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다.**

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x^2 - 8x + 15) = 3(x-3)(x-5)$이고

$$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4\,dt$$

이다. $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가진다는 것은 방정식 $g'(x) = 0$의 실근 중 좌우에서 $g'(x)$의 부호 변화가 일어나는 것이 유일하다는 것을 의미한다.

$g'(x) = 0$의 근의 집합 $\{3, 5, a\}$의 원소 중 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 일어나는 것이 유일하기 위해서는 $a = 3$ 또는 $a = 5$이다. 따라서 가능한 모든 a의 값의 합은 8이다.

풀이 **평행이동을 이용하여 정적분을 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있다.**

$f(x)$가 연속함수이므로

$$f(0) + a^2 = f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1-}(2x^2 + ax) = 2 + a$$

이고, $f(0) = 0$이므로 $a^2 = 2 + a$, $a^2 - a - 2 = 0$으로부터 $a = 2 > 0$를 얻는다. 그러면 양수 x에 대하여 $f(x) > 0$이고

$$\int_0^3 |f(x)|\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

이다.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2x^2 + 2x\,dx$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x+1)\,dx = \int_0^1 f(x) + a^2\,dx = 4 + \int_0^1 2x^2 + 2x\,dx$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x+1)\,dx = \int_1^2 f(x) + a^2\,dx = 4 + \int_1^2 f(x)\,dx = 4 + 4 + \int_0^1 2x^2 + 2x\,dx$$

이므로

$$\int_0^3 |f(x)|\,dx = 12 + 3\times\int_0^1 2x^2 + 2x\,dx = 12 + 2\int_0^1 3x^2\,dx + 3\int_0^1 2x\,dx = 12 + 2\left[x^3\right]_0^1 + 3\left[x^2\right]_0^1 = 17$$

을 얻는다.

22 자체문항 (공통)

상수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = x^2 - 4ax + 4a^2 - 1$$

이다. $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x) = 3F(x+3) + \int_{x}^{x+3} (x-t)f(t)\,dt$$

이라 하면 $g(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 갖는다. $g(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 가질 때, $a \times k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

풀이 1 정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다. (넓이 관점)

$f(x)=(x-2a+1)(x-2a-1)$에 대하여 $F(x)$는 삼차함수이므로 사잇값 정리에 따라 실근 α가 존재한다.
$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ 라 하자. 그러면

$$3F(x+3)=\int_{\alpha}^{x+3} 3f(t)\,dt,\quad \int_{x}^{x+3}(x-t)f(t)\,dt=\int_{\alpha}^{x+3}(x-t)f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x}(x-t)f(t)\,dt$$

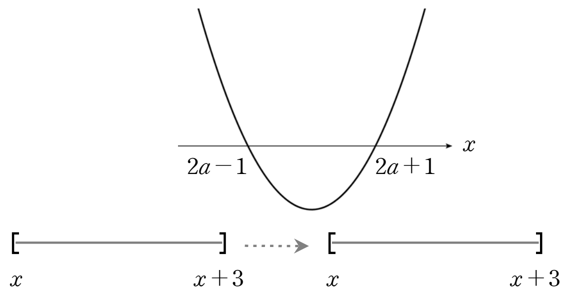
이고 $g(x)=\int_{\alpha}^{x+3}(x+3-t)f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x}(x-t)f(t)\,dt$ 이므로

$$g'(x)=\int_{x}^{x+3} f(t)\,dt$$

이다. 즉, 함수 $g(x)$는 도함수가 구간 $[x,\,x+3]$에서 함수 $f(t)$의 정적분이다. x가 정해질 때

$$\int_{x}^{x+3} f(t)\,dt$$

의 값을 관찰해보자.



구간의 길이가 3인 정적분이므로 $x=2a-1$ 또는 $x+3=2a+1$일 때 0이 된다. (*비율관계)

$x=2a-1$의 좌우에서 정적분의 부호가 $(-)\to 0\to(+)$로 변하고

$x+3=2a+1$의 좌우에서 정적분의 부호가 $(+)\to 0\to(-)$로 변한다.

이때, $x=5$에서 극대이므로 $5+3=2a+1$이다. 따라서 $a=7/2$이고 $k=2a-1=6$이므로 $a\times k=21$이다.

풀이 2 정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다. (평균변화율 관점)

$f(x)=(x-2a+1)(x-2a-1)$에 대하여

$$g'(x)=F(x+3)-F(x)$$

로 정리된다. 즉, 함수 $g(x)$의 도함수는

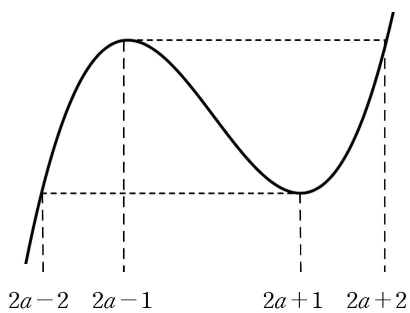
$$3\times(t\text{의 값이 } x\text{에서 } x+3\text{로 변할 때 함수 } F(t)\text{의 평균변화율})$$

이다. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수 $F(x)$는 $x=2a-1$, $x=2a+1$에서 극값을 가지고

주어진 평균변화율이 0이 되는 지점은 $x=2a-2$일 때, $x=2a-1$일 때이다. (*비율관계)

그런데 $x=2a-2$의 좌우에서는 평균변화율의 부호가 $(+)\to 0\to(-)$로 변하고

$x=2a-1$의 좌우에서는 평균변화율의 부호가 $(-)\to 0\to(+)$로 변하므로 $2a-2=5$이다.



23 2019학년도 사관학교 (가) 30번

함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$와 $t \geq \dfrac{12}{e^{12}}$인 실수 t에 대하여 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx$$

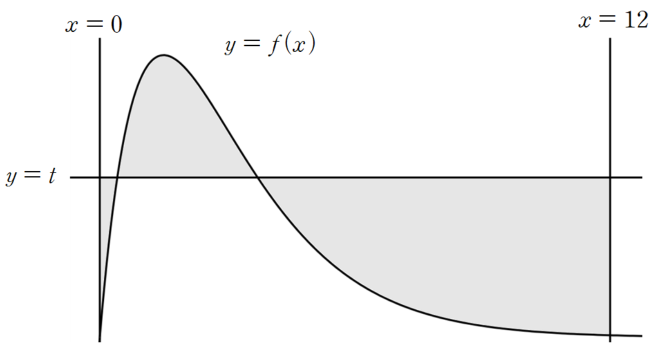
가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 실근 중 가장 작은 것을

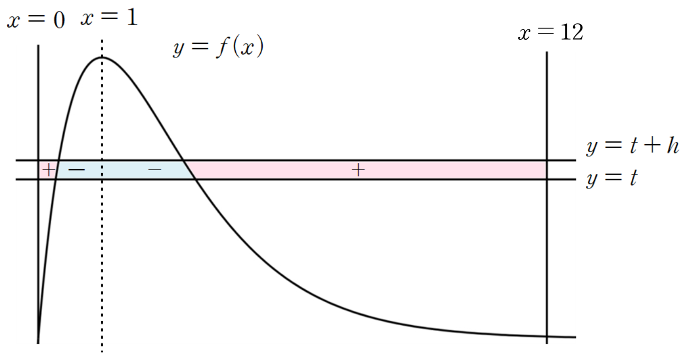
a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오. [4점]

풀이 **미분계수의 정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있다. 정적분의 기본성질을 이해한다.**

step 1 $g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$ 및 두 직선 $x=0$, $x=12$가 이루는 영역의 넓이이다.

이때, $f(x)=xe^{-x}$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 가지므로 $t<\frac{1}{e}$이고 h가 충분히 작은 양수일 때 다음과 같이 네 영역의 넓이 S_1, S_2, S_3, S_4로 나누면 $g(t+h)-g(t)=S_1-S_2-S_3+S_4$이다. 그림에서 $g(t)$가 나타내는 영역의 넓이와 $g(t+h)-g(t)$가 나타내는 영역의 넓이를 확인할 수 있다.





step 2 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$, $x=0$, $x=1$, $x=12$에 의해 나뉘는 네 구간의 길이를 $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$, $l_4(t)$라 하자. $g(t+h)-g(t)$의 부호를 판단하는 것은 어렵지만

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{S_1-S_2-S_3+S_4}{h}\quad\left(\frac{12}{e^{12}}\le t<\frac{1}{e}\right)$$

에서 미적분의 기본정리에 따라 $\lim_{h\to 0}\frac{S_1}{h}=l_1(t)$, $\lim_{h\to 0}\frac{S_2}{h}=l_2(t)$, $\lim_{h\to 0}\frac{S_3}{h}=l_3(t)$, $\lim_{h\to 0}\frac{S_4}{h}=l_4(t)$이고

$g'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{S_1-S_2-S_3+S_4}{h}=l_1(t)-l_2(t)-l_3(t)+l_4(t)$를 얻는다.

이제 $g'(t)=l_1(t)+l_4(t)-(l_2(t)+l_3(t))=0$인 t의 값을 찾아보자. $l_1(t)+l_2(t)+l_3(t)+l_4(t)=12$이므로 $l_1(\alpha)+l_4(\alpha)=l_2(\alpha)+l_3(\alpha)=6$인 실수 α에 대하여 $g'(\alpha)=0$이다.

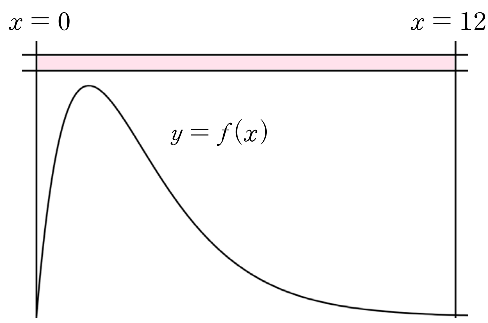
또한 α의 좌우에서 $l_2(t)+l_3(t)$의 값이 (6보다 큰 값) $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ (6보다 작은 값)으로 변하므로 $g'(t)$의 부호는 α의 좌우에서 $(-)\rightarrow 0\rightarrow(+)$으로 변한다. 따라서 $g(t)$는 $t=\alpha$에서 극솟값을 가진다.

앞서 얻은 결과에 따라 $f(x)=\alpha$의 실근 중 가장 작은 것을 a라고 하면 가장 큰 것은 $a+6$이고 $f(a)=f(a+6)=\alpha$이다. 즉, $ae^{-a}=(a+6)e^{-(a+6)}$에서 $e^6=\frac{a+6}{a}=1+\frac{6}{a}$이므로 $\ln\left(1+\frac{6}{a}\right)=6$이다.

step 3 이어서 $t\ge\frac{1}{e}$일 때 $g(t+h)-g(t)$가 나타내는 영역의 넓이는 오른쪽 그림과 같다. 이 영역은 가로의 길이가 12, 세로의 길이가 h인 직사각형이므로

$$g'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=12\quad\left(t\ge\frac{1}{e}\right)$$

이다. 따라서 $g'(1)=12$이고 $g'(1)+\ln\left(1+\frac{6}{a}\right)=18$이다.



24 2018학년도 수능 (가) 30번

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

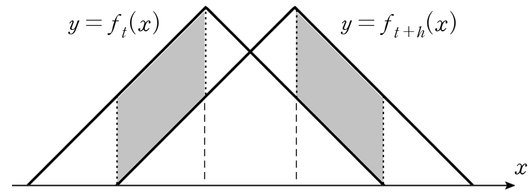
풀이 1 **미분계수의 정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있다. 정적분의 기본성질을 이해한다.**

극대·극소의 정의를 이용하여 $g(t)$의 극솟값을 구해보자. $t+1 \le k$이거나 $k+8 \le t$이면 $g(t)=0$이므로 이러한 모든 t에 대하여 $g(t)$는 극솟값 0을 갖는다. 음수인 극솟값을 구하기 위해, $k<t+1$이고 $k+8>t$인 t에 대한 함수 $g(t)$를 고려하는 것으로 충분하다. $f(x)$는 t의 값에 따라 다른 함수이므로 $f_t(x)$로 나타내면 충분히 작은 양수 h에 대하여

$$g(t+h)-g(t)=\int_k^{k+8}\{f_{t+h}(x)-f_t(x)\}\cos\pi x\,dx$$

이고, 이것의 부호를 관찰하는 것으로 극대·극소를 판정할 수 있다.

step 1 $y=f_{t+h}(x)$, $y=f_t(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$[t+h-1, t]$에서 $f_{t+h}(x)-f_t(x)=-h$, $[t+h, t+1]$에서 $f_{t+h}(x)-f_t(x)=h$로 일정하고,

남은 세 구간 $[t-1, t+h-1]$, $[t, t+h]$, $[t+1, t+h+1]$에서 $|f_{t+h}(x)-f_h(x)| \le h$이다.

이어서 $|\cos(\pi x)| \le 1$이므로 $|\{f_{t+h}(x)-f_h(x)\}\cos(\pi x)| \le h$, 다시 말해 $-h \le \{f_{t+h}(x)-f_h(x)\}\cos(\pi x) \le h$이고

남은 세 구간의 길이는 각각 h이므로

$$(-h)\times(3h) \le \int_{\text{o.w.}}\{f_{t+h}(x)-f_t(x)\}\cos\pi x\,dx \le h\times(3h)$$

를 얻는다. (o.w.는 남은 세 구간에서 정적분의 합을 간단히 나타낸 것이다.) 그러면

$$g(t+h)-g(t)=\int_{t+h-1}^{t}-h\cos\pi x\,dx+\int_{t+h}^{t+1}h\cos\pi x\,dx+\int_{\text{o.w.}}\{f_{t+h}(x)-f_t(x)\}\cos\pi x\,dx$$

이다. (단, $g(t)$의 정의에 의해 위 정적분의 총 적분구간은 $[k, k+8]$과의 공통구간이다.) 이것의 부호를 판단하는 것은 어렵지만 샌드위치 정리에 따라

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\text{o.w.}}\{f_{t+h}(x)-f_t(x)\}\cos\pi x\,dx=0$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}&=\lim_{h\to0}\int_{t+h-1}^{t}-\cos\pi x\,dx+\int_{t+h}^{t+1}\cos\pi x\,dx+\frac{1}{h}\int_{\text{o.w.}}\{f_{t+h}(x)-f_t(x)\}\cos\pi x\,dx\\&=-\int_{t-1}^{t}\cos\pi x\,dx+\int_{t}^{t+1}\cos\pi x\,dx\end{aligned}$$

임을 얻을 수 있다. 다시 말해 총적분구간 $[t-1, t+1]$ 중 $[k, k+8]$와의 공통구간에 속하는 만큼만 위의 정적분의 값을 구한 것이 $g'(t)$이다.

step 2. t의 값이 정해지면 구간 $[t-1, t+1]\cap[k, k+8]$이 정해진다. 이 구간에서

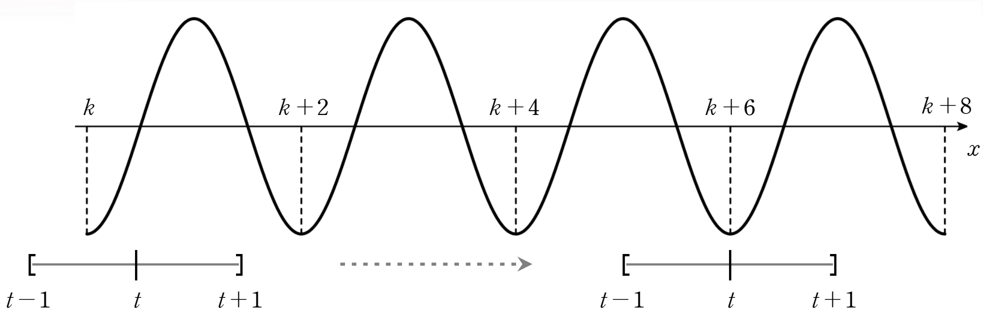
$$-\int_{t-1}^{t}\cos\pi x\,dx+\int_{t}^{t+1}\cos\pi x\,dx$$

의 값을 관찰해보자.

$t=k$, $k+2$, $k+4$, $k+6$, $k+8$의 좌우로 $\cos\pi x$ 의

$$([t,t+1]\cap[k,k+8]\text{에서 정적분})-([t-1,t]\cap[k,k+8]\text{에서 정적분})$$

의 부호는 $(-)\to 0\to(+)$로 변하므로 $m=5$이고 $\sum_{i=1}^{5}\alpha_i=5k+20=45$이므로 $k=5$를 얻는다.



step 3. 평행이동을 이용하면

$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=\int_0^2(1-|x-1|)\cos\pi x\,dx,\ g(\alpha_5)=\int_0^1(1-|x-1|)\cos\pi x\,dx,\ \ g(\alpha_1)=\int_1^2(1-|x-1|)\cos\pi x\,dx$$

이고 $1-|x-1|$, $\cos\pi x$는 모두 직선 $x=1$에 대칭이므로

$$\int_0^2(1-|x-1|)\cos\pi x\,dx=2\int_0^1(1-|x-1|)\cos\pi x\,dx=2\int_1^2(1-|x-1|)\cos\pi x\,dx$$

이 성립한다. 따라서 $\sum_{i=1}^{5}g(\alpha_i)=2\times g(\alpha_5)+3\times(2g(\alpha_5))=8g(\alpha_5)$이고,

$g(\alpha_5)=\int_0^1 x\cos\pi x\,dx=-\frac{2}{\pi^2}$ (계산생략)이므로 $k-\pi^2\sum_{i=1}^{5}g(\alpha_i)=5-\pi^2\times 8\times\left(-\frac{2}{\pi^2}\right)=21$이다.

풀이 2 **정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다.**

$[t-1,t+1]\subseteq[k,k+8]$이면

$$\begin{aligned}g(t)&=\int_{t-1}^{t}(1-(t-x))\cos\pi x\,dx+\int_t^{t+1}(1-(x-t))\cos\pi x\\&=-\int_c^t((t-1)-x)\cos\pi x\,dx+\int_c^{t-1}((t-1)-x)\cos\pi x\,dx+\int_c^{t+1}(t+1-x)\cos\pi x-\int_c^t(t+1-x)\cos\pi x\,dx\\&=-2\int_c^t(t-x)\cos\pi x\,dx+\int_c^{t-1}((t-1)-x)\cos\pi x\,dx+\int_c^{t+1}(t+1-x)\cos\pi x\end{aligned}$$

와 같이 적분구간을 변형하여 정리하면 다음과 같고 이후는 같은 논리를 적용할 수 있다.

$$g'(t)=-2\int_c^t\cos\pi x\,dx+\int_c^{t-1}\cos\pi x\,dx+\int_c^{t+1}\cos\pi x\,dx=\int_t^{t-1}\cos\pi x\,dx+\int_t^{t+1}\cos\pi x\,dx$$

그러나 $[t-1,t+1]\cap[k,k+8]\neq\varnothing$인 모든 경우를 고려하지 않았으므로 경우를 나누어 $g'(t)$를 구해야한다. 이 방법으로 문제를 해결하는 것은 매우 번거롭긴하다!

풀이 3 **부분적분법, 합성곱, 재배열부등식 등을 이용한 방법은 교육과정 외이다. 검색하면 찾을 수 있을 것이다.**

부록(Appendix)

정의 0.1.1 | 수 집합

(1) 자연수 전체의 집합 : $\mathbb{N}$

(2) 정수 전체의 집합 : $\mathbb{Z}$

(3) 유리수 전체의 집합 : $\mathbb{Q}$

(4) 실수 전체의 집합 : $\mathbb{R}$

(5) 복소수 전체의 집합 : $\mathbb{C}$

정리 0.1.1 | 사잇값 정리 (Intermediate Value Theorem)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 연속함수이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 $c\in(a,b)$가 존재한다.

보조정리 0.1.1 | 연속 일대일함수의 기본성질

함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 연속함수이고 일대일함수일 때,

$f(a)<f(b)$이고 $a<c<b$이면 $f(a)<f(c)<f(b)$이다.

증명 $f(a)<f(c)<f(b)$가 아니라고 가정하자. f가 일대일함수이므로 $f(a)\neq f(c)$, $f(b)\neq f(c)$임에 따라 $f(c)<f(a)$ 이거나 $f(c)>f(b)$이다.

$f(c)<f(a)$인 경우, $f(c)<\alpha<f(a)<f(b)$인 실수 $\alpha\in\mathbb{R}$를 선택할 수 있다. 사잇값 정리에 따라

$$f(x_1)=\alpha$$

인 $x_1\in(a,c)$가 존재하고

$$f(x_2)=\alpha$$

인 $x_2\in(c,b)$가 존재한다. 그러면 명백히 $x_1\neq x_2\in[a,b]$이고 $f(x_1)=f(x_2)$이다. 이는 f가 일대일함수임에 모순이다.

같은 방법으로 $f(c)>f(b)$인 경우, $f(a)<f(b)<\beta<f(c)$인 실수 $\beta\in\mathbb{R}$를 선택할 수 있고 사잇값 정리에 따라

$$f(x_1)=\beta$$

인 $x_1\in(a,c)$가 존재하고

$$f(x_2)=\beta$$

인 $x_2\in(c,b)$가 존재한다. 그러면 명백히 $x_1\neq x_2\in[a,b]$이고 $f(x_1)=f(x_2)$이다. 이는 f가 일대일함수임에 모순이다. 종합하면 $f(a)<f(c)<f(b)$가 아닌 것은 f가 일대일함수임에 모순이다. 따라서 $f(a)<f(c)<f(b)$이다.

정리 0.1.2 | 연속 일대일함수의 성질

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속함수이고 일대일함수일 때,

$f(a) < f(b)$이면 f는 구간 $[a, b]$에서 증가한다.

$f(a) > f(b)$이면 f는 구간 $[a, b]$에서 감소한다.

증명 f는 구간 $[a, b]$에서 증가하지 않는다고 가정하자. 그러면 적당한 x_1, $x_2 \in [a, b]$ $(x_1 < x_2)$가 존재하여 $f(x_1) \geq f(x_2)$이다. $f(x_1) > f(x_2)$라고 하면

(i) $x_1 = a$인 경우, $f(a) = f(x_1) > f(x_2)$이므로 $x_2 \neq b$이고 $a = x_1 < x_2 < b$이다. 그러면 **보조정리 0.1.1**에 의해 $f(a) = f(x_1) < f(x_2) < f(b)$이고 이는 $f(x_1) > f(x_2)$임에 모순이다.

(ii) $x_2 = b$인 경우, $f(x_1) > f(x_2) = f(b)$이므로 $x_1 \neq a$이고 $a < x_1 < x_2 = b$이다. 그러면 **보조정리 0.1.1**에 의해 $f(a) < f(x_1) < f(x_2) = f(b)$이고 이는 $f(x_1) > f(x_2)$임에 모순이다.

(iii) $a < x_1 < x_2 < b$인 경우, **보조정리 0.1.1**에 의해 $a < x_1 < b$ 에서 $f(a) < f(x_1) < f(b)$, $a < x_2 < b$에서 $f(a) < f(x_2) < f(b)$를 얻는다. 그런데 f는 구간 $[a, x_2]$에서 연속, 일대일함수이고 $f(a) < f(x_2)$이므로 **보조정리 0.1.1**에 의해 $f(a) < f(x_1) < f(x_2)$이다. 이는 $f(x_1) > f(x_2)$임에 모순이다.

곧, 모든 경우에 $f(x_1) > f(x_2)$일 수 없으므로 $f(x_1) = f(x_2)$이다. 그러나 이는 f가 일대일함수에 모순이다. 종합하면 f는 구간 $[a, b]$에서 증가하지 않는 것은 f가 일대일함수에 모순이다. 따라서 f는 구간 $[a, b]$에서 증가한다.

같은 방법으로 $f(a) > f(b)$이면 f는 구간 $[a, b]$에서 감소함을 증명할 수 있다.

정리 1.4.2 | 연속함수의 역함수의 성질

f가 연속함수일 때, f가 일대일함수일 필요충분조건은 f가 증가함수이거나 감소함수인 것이다.

증명 $(\Leftarrow)$ 증가함수, 감소함수의 정의에 따라 자명하다.

$(\Rightarrow)$ f가 연속함수이고 일대일함수이지만 증가함수도 감소함수도 아니라고 가정하자.

그러면 $f(a) \geq f(b)$인 a, b $(a < b)$와 $f(c) \leq f(d)$인 c, d $(c < d)$가 존재한다. f는 일대일함수이므로 $f(a) > f(b)$, $f(c) < f(d)$이고 $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$ 중 가장 큰 값에 1을 더한 것을 M이라 하면

$$a,\ b,\ c,\ d \in [-M, M]$$

이다.

(i) $f(-M) < f(M)$인 경우, 함수 f는 구간 $[-M, M]$에서 연속, 일대일함수이므로 **정리 0.1.2**에 의해 f는 구간 $[-M, M]$에서 증가한다. 이는 $f(a) > f(b)$ $(a < b)$인 것에 모순이다.

(ii) $f(-M) > f(M)$인 경우, 함수 f는 구간 $[-M, M]$에서 연속, 일대일함수이므로 **정리 0.1.2**에 의해 f는 구간 $[-M, M]$에서 감소한다. 이는 $f(c) < f(d)$ $(c < d)$인 것에 모순이다.

곧, $f(-M) \neq f(M)$일 수 없으므로 $f(-M) = f(M)$이다. 이는 f가 일대일함수임에 모순이다.

종합하면 f가 증가함수도 감소함수도 아닌 것은 f가 일대일함수임에 모순이다. 따라서 f는 증가함수이거나 감소함수이다.