2. A 과수원에서 판매하는 수박의 무게 X와 B 과수원에서 판매하는 수박의 무게 Y는 각각 정규분포 $N(\mu_1, 400^2)$, $N(\mu_2, 300^2)$을 따르며 서로 독립이다. $X+Y$의 표준편차를 구하시오.
A 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 3000이었고, B 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 2000이었을 때, $\mu_1+\mu_2$에 대한 95% 신뢰구간은 $(5000-1.96\times c,\ 5000+1.96\times c)$이다. c의 값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z\le 1.96)=0.975$이다.) [2점]

풀이 **독립인 두 확률변수의 일차결합의 평균과 분산을 구할 수 있다. 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다. [확률과 통계]**

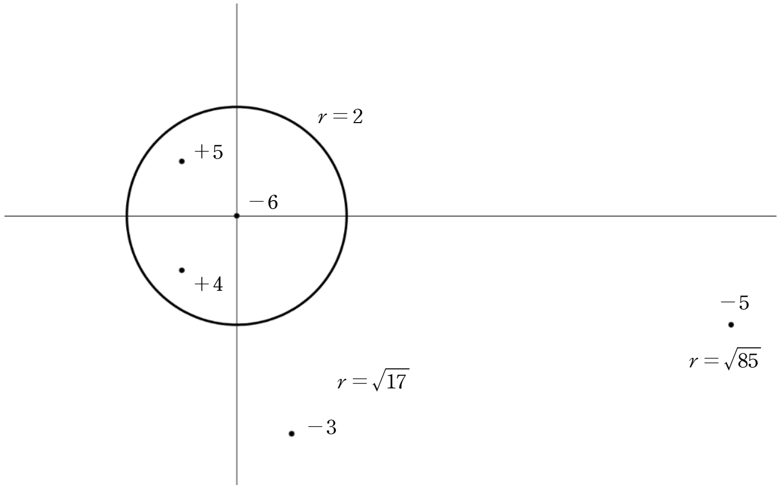
X, Y는 독립인 확률변수이므로 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\mu_1+\mu_2$,

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=400^2+300^2=500^2$ (피타고라스 수)이다.

그러므로 $\sigma(X+Y)=500$을 얻는다.

표본평균 $\overline{X}+\overline{Y}$의 실제 관측값이 $3000+2000=5000$이므로 모평균 $\mu_1+\mu_2$에 대한

95% 신뢰구간은 $\left(5000-1.96\times\dfrac{500}{\sqrt{100}},\ 5000+1.96\times\dfrac{500}{\sqrt{100}}\right)$이므로 $c=50$이다.



3. 복소함수

$$f(z)=\frac{(z-i+1)^5(z+1+i)^4}{z^6(z-1+4i)^3(z-9+2i)^5}e^z$$

과 복소평면에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원을 시계반대 방향으로 한 바퀴 도는 곡선 $C(r)$이 있다.
선적분 $\displaystyle\int_{C(2)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$의 값을 구하시오.
또한 $\displaystyle\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$을 만족시키는 양의 정수 r의 개수를 구하시오. [2점]

풀이 **편각원리를 이용하여 선적분의 값을 구할 수 있다. [복소해석학]**

함수 $f(z)$의 영점과 그 차수는 $(-1+i,\ 5)$, $(-1-i,\ 4)$이고

극점과 그 차수는 $(0,\ 6)$, $(1-4i,\ 3)$, $(9-2i,\ 5)$이다.

편각원리에 따라

$$\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$=2\pi i\times\left(\sum C(r)\text{의 내부에 속하는 영점의 차수}-\sum C(r)\text{의 내부에 속하는 극점의 차수}\right)$

이다. 왼쪽 그림과 같이 $r=2$인 경우,

$$\int_{C(2)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\times(5+4-6)=6\pi i$$

임을 얻고, $\sqrt{17}<r<\sqrt{85}$인 경우,

$$\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\times(5+4-6-3)=0$$

를 얻는다. 그러므로 조건을 만족하는 양의 정수 r의 개수는 $5, 6, 7, 8, 9$이고 그 개수는 5이다.

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:(0,2)\to\mathbb{R}^3$이 모든 $s\in(0,2)$에 대하여

$$\alpha(s)\cdot\alpha'(s)=0,\qquad \alpha(s)\cdot N(s)=-2s^2$$

을 만족시킨다. $\alpha(1)\cdot B(1)=12$일 때, 곡선 $\alpha(s)$의 $s=1$에서의 곡률(curvature) $\kappa(1)$과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)의 절댓값 $|\tau(1)|$을 순서대로 구하시오. (단, $N(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 법선벡터(normal vector)이고, $B(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 종법선벡터(binormal vector)이다.) [2점]

풀이 **프레네-세레 정리를 이용하여 곡선의 곡률과 비틀림률을 구할 수 있다. [미분기하학]**

주어진 곡선 α의 프레네 틀을 $\{T(s),N(s),B(s)\}$로 나타내면

$$\begin{bmatrix}T\\N\\B\end{bmatrix}'(s)=\begin{bmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\N\\B\end{bmatrix}(s)$$

가 성립한다. $\alpha(s)\cdot T(s)=0$, $\alpha(s)\cdot N(s)=-2s^2$이므로 s에 대하여 미분하면

$$\alpha'(s)\cdot T(s)+\alpha(s)\cdot T'(s)=0$$

$$\alpha'(s)\cdot N(s)+\alpha(s)\cdot N'(s)=-4s$$

이다. 정리하면

$$1+\kappa(s)\,\alpha(s)\cdot N(s)=1-2\kappa(s)s^2=0$$

이므로 $\kappa(s)=\dfrac{1}{2s^2}$, $\kappa(1)=\dfrac{1}{2}$을 얻고,

$$\alpha(s)\cdot(-\kappa T(s)+\tau N(s))=\tau(s)\,\alpha(s)\cdot B(s)=-4s$$

이므로 $s=1$을 대입하면 $\tau(1)\times 12=-4$을 얻는다. 따라서 $|\tau(1)|=\dfrac{1}{3}$이다.

2. $\mathbb{R}$의 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,(-1,1),(-1,3),(-1,5),\mathbb{R}\}$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 부분집합 $\mathbb{Z}$의 상대위상(부분위상, relative topology) $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}$를 구하시오. 또한 위상공간 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}})$에서 집합 $A=\{0,1,2,3\}$의 내부(interior) A°를 구하시오. (단, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$이다.)

[2점]

풀이 **상대위상의 뜻과 내부의 뜻을 이해한다. [위상수학]**

위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 부분집합 $\mathbb{Z}$의 상대위상은 다음과 같다.

$$\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}=\{\mathbb{Z}\cap U\,|\,U\in\mathfrak{I}\}=\{\varnothing,\{0\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3,4\},\mathbb{Z}\}$$

A의 내부는 A에 포함되는 열린집합 중 가장 큰 것이므로 $A^\circ=\{0,1,2\}$이다.

7. 수열 $\{a_n\}$이 점화식

$$a_0=0,\quad a_1=2,\quad a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}\ (n\ge 2)$$

를 만족시킨다. 이 점화식의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 순서대로 구하시오.

또한 수열 $\{a_n\}$의 생성함수(generating function)를 $f(x)$라 할 때, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3$을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

풀이 **동차선형점화식의 특성다항식의 뜻을 알고, 특성다항식의 근을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있다. 정수 차수의 이항정리를 이해한다. [조합 및 그래프이론]**

점화식 $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}\ (n \ge 2)$의 특성다항식은 $x^2 - 4x + 4$이다. 이 특성다항식의 근은 2 (중근)이므로 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = (c_1 + c_2 n)2^n\ \ (n \ge 0)$이다.

$n=0$을 대입하면 $a_0 = c_1 = 0$,

$n=1$을 대입하면 $a_1 = c_2 \times 2^1 = 2c_2 = 2$로부터 $c_2 = 1$이므로

$$a_n = n2^n$$

이다. 그러면 $\{a_n\}$의 생성함수 $f(x)$는

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n$$

이고, $f\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$를 얻는다. 한편 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

그러므로

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

로부터

$$x\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3 = x\left\{\frac{x}{(1-x)^2}\right\}^3 = \frac{x^4}{(1-x)^6} = x^4\sum_{n=0}^{\infty} {}_6\mathrm{H}_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5}{5}x^{n+4}$$

이고, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=4}^{\infty}\binom{n+1}{5}x^n$을 얻는다. 따라서

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n<4) \\ \binom{n+1}{5} & (n \ge 4) \end{cases}$$

이다.

8. 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$을 $f(x,y)=x^4+y^4-xy^2$이라 하자. $t\neq 0$인 상수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 등위곡선(level curve) $f(x,y)=0$의 원점 이외의 교점을 구하시오.
또한 영역 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\le 0,\ y\ge 0\}$의 넓이를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}}$$

풀이 **이중적분을 이용하여 주어진 영역의 넓이를 구할 수 있다. 야코비안과 이중적분의 변수변환정리를 이해한다. [다변수해석학]**

직선 $y=tx$ 와 곡선 $x^4+y^4-xy^2=0$의 교점은

$$f(x,tx)=x^4+t^4x^4-x(tx)^2=x^4(1+t^4)-t^2x^3=x^3((1+t^4)x-t^2)=0$$

으로부터 $x=0$, $y=0$ 또는 $x=\frac{t^2}{1+t^4}$, $y=\frac{t^3}{1+t^4}$을 얻는다. 그러므로 원점이 아닌 교점은 $\left(\frac{t^2}{1+t^4},\ \frac{t^3}{1+t^4}\right)$이다.

이제 주어진 영역을 D라 하고, D의 정의를 이해해보자. 부등식

$$x^4+y^4-xy^2\le 0$$

를 만족하는 (x,y)는

$$0\le x^4+y^4\le xy^2$$

를 만족한다. 그러므로 $x\ge 0$이고, 동시에 $y\ge 0$이므로 영역 D는 제1사분면에 있다.

한편 $t\ge 0$가 임의로 주어지면 $f(x,y)=x^4+y^4-xy^2\le 0$일 필요충분조건은 $y=tx$라 할 때 $x\ge 0$, $f(x,tx)=x^3((1+t^4)x-t^2)\le 0$인 것이므로 $0\le x\le \frac{t^2}{1+t^4}$을 만족한다. 즉, $y=tx\ge 0$로부터

$$D=\left\{(x,tx)\ \middle|\ 0\le x\le \frac{t^2}{1+t^4},\ t\ge 0\right\}$$

이다. $\varphi(x,t)=(x,tx)$으로 정의되는 좌표변환 φ를 고려하자. 그러면 φ는 일대일대응이고, φ의 야코비안은

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial (tx)}{\partial x} & \frac{\partial (tx)}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ t & x\end{vmatrix}=x$$

이므로 **변수변환정리**에 따라

$$\int_D dA=\int_0^\infty\int_0^{\frac{t^2}{1+t^4}} x\,dx\,dt=\int_0^\infty \frac{t^4}{2(1+t^4)^2}dt=\frac12\times\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{t^4}{(1+t^4)^2}dt$$

를 얻는다. $g(x)=\int_0^x\frac{t^4}{(1+t^4)^2}dt$ 라 하고, $g(x)$를 간단히 나타내보자.

몫 미분의 재해석을 통해 $\left(\frac{t}{1+t^4}\right)'=\frac{t}{1+t^4}\left(\frac1t-\frac{4t^3}{1+t^4}\right)$이므로

$$4\times\frac{t^4}{(1+t^4)^2}=\frac{1}{1+t^4}-\left(\frac{t}{1+t^4}\right)'$$

이고, $4g(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt-\frac{x}{1+x^4}$를 얻는다. 따라서 $\lim_{x\to\infty}4g(x)=\frac{\sqrt2\,\pi}{4}$이고 $\int_D dA=\frac12\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{\sqrt2\,\pi}{32}$이다.

9. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-20\\10\end{pmatrix},\qquad \det(A)=800$$

을 만족시킬 때, A의 모든 고윳값(eigenvalue)을 구하시오.

또한 가역 대칭행렬(symmetric matrix) B가

$$AB=2\det(B)I,\qquad \operatorname{tr}(B)<0$$

을 만족시킬 때, B의 모든 고윳값과, B의 고유벡터(eigenvector)로 구성된 $\mathbb{R}^3$의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\det(M)$은 행렬 M의 행렬식(determinant), $\operatorname{tr}(M)$은 M의 대각합(trace)이고, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점]

풀이 **고윳값의 뜻과 성질을 이해한다. 대칭행렬의 성질을 이해한다. [선형대수학]**

$u=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$라 하면 $Au=4u$, $Av=10v$이므로 A의 두 고윳값은 $4, 10$이다. 이때 A의 다른 고윳값을 λ라 하면 $4\times10\times\lambda=\det(A)=800$이므로 $\lambda=20$이다. A의 고윳값 λ에 대응하는 고유벡터를 w로 나타내면 $Aw=20w$이다.

$\det(A)\neq0$이므로 A는 가역행렬이고 $B=2\det(B)A^{-1}$로부터

$$Bu=2\det(B)(A^{-1}u)=\frac{\det(B)}{2}u,$$

$$Bv=2\det(B)(A^{-1}v)=\frac{\det(B)}{5}v,$$

$$Bw=2\det(B)(A^{-1}w)=\frac{\det(B)}{10}w$$

를 얻는다. 즉, A와 B는 서로 같은 고유벡터를 갖는다.

이때 B의 행렬식은 $\det(B)=\dfrac{\det(B)}{2}\times\dfrac{\det(B)}{5}\times\dfrac{\det(B)}{10}$이고, $\det(B)\neq0$이므로 $\det(B)^2=100$으로부터 $\det(B)=\pm10$을 얻는다.

이어서 $\operatorname{tr}(B)=\det(B)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}\right)<0$이므로 $\det(B)<0$, 곧 $\det(B)=-10$이다.

그러므로 B의 모든 고윳값은 $-5, -2, -1$이다. 이제 w를 결정하자.

대칭행렬의 고유벡터는 서로 직교하므로 $u\times v=\begin{bmatrix}6\\3\\-6\end{bmatrix}$로부터 $w=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$로 둘 수 있다.

따라서 B의 고유벡터 u, v, w로 구성된 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저는

$$\left\{\frac{u}{\|u\|},\ \frac{v}{\|v\|},\ \frac{w}{\|w\|}\right\}=\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

이다.

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$f_n(x) = \frac{x^4 + \sqrt{n}\,x^3}{n(x^2 + 2\sqrt{n}\,x + 2n)}$$

으로 정의하자. 모든 양의 실수 L에 대하여 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 닫힌구간 $[-L, L]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 $\mathbb{R}$에서 연속인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

풀이 **평등수렴의 뜻과 성질을 이해한다. 바이어슈트라스-M 판정법을 이용하여 평등수렴을 판정할 수 있다. 연속함수의 뜻과 성질을 이해한다. [해석학]**

임의의 $L > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-L, L]$이 주어졌다고 하자. 그러면

$$|f_n(x)| = \frac{|x^4 + \sqrt{n}\,x^3|}{n\left((x+\sqrt{n})^2 + n\right)} \le \frac{|x^4| + |\sqrt{n}\,x^3|}{2n^2} \le \frac{L^4 + \sqrt{n}\,L^3}{2n^2} = \frac{L^4}{2n^2} + \frac{L^3}{2n^{3/2}}$$

이다. 이때 p-급수판정법에 따라 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^4}{2n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^3}{2n^{3/2}}$$

는 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^4}{2n^2} + \frac{L^3}{2n^{3/2}}$가 수렴한다. 따라서 바이어슈트라스-M 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 $[-L, L]$에서 평등수렴한다.

한편 $f_n(x)$는 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $n(x^2 + 2\sqrt{n}\,x + 2n) = n\left((x+\sqrt{n})^2 + n\right) > 0$ 이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이제 $a \in \mathbb{R}$가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $|a| \le K$를 만족하는 $K > 0$가 존재한다. 그러면 $f_n(x)$는 $[-K, K]$에서 연속이고 앞서 얻은 성질과 평등수렴의 성질에 따라 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 $[-K, K]$에서 연속이므로 $g(x)$는 $x = a \in [-K, K]$에서 연속이다.

11. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{Z}_{200}$에 대하여 군 준동형사상(group homomorphism) $\phi : \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{200}$의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\phi)$가 6개의 부분군을 가질 때, $\mathrm{Im}(\phi)$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 ϕ의 핵(kernel) $\mathrm{Ker}(\phi)$의 위수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}$은 $\mathbb{Z}_{20}$과 $\mathbb{Z}_{26}$의 직접곱(직적, direct product)이다.) [4점]

풀이 **준동형사상의 핵과 치역의 뜻과 성질을 이해한다. 유한군의 위수의 성질을 이해한다. 순환군의 성질을 이해한다. [현대대수학]**

$\mathrm{Im}(\phi) \le \mathbb{Z}_{200}$로부터 $|\mathrm{Im}(\phi)| \mid 200$ $|\mathrm{Im}(\phi)| = \frac{|\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}|}{|\ker(\phi)|} \mid 520$ 이므로

$|\mathrm{im}(\phi)| \mid \gcd(200, 520) = 40 = 2^3 \times 5$이고,

$\mathrm{Im}(\phi)$는 순환군이므로 부분군의 개수는 $|\mathrm{Im}(\phi)|$의 양의 약수의 개수이다. 40의 약수 중 양의 약수의 개수가 6인 것은 20으로 유일하므로 $|\mathrm{Im}(\phi)| = 20$이다.

따라서 $|\ker(\phi)| = \frac{20 \times 26}{|\mathrm{Im}(\phi)|} = 26$이다.

~~이걸 4점짜리 문제라고 냈나요?~~

12. 집합 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x<1\}$ 위에서 거리함수 d를

$$d((x,y),(x',y'))=\min\{\sqrt{(x-(x'+k))^2+(y-y')^2}\mid k=-2,0,2\}$$

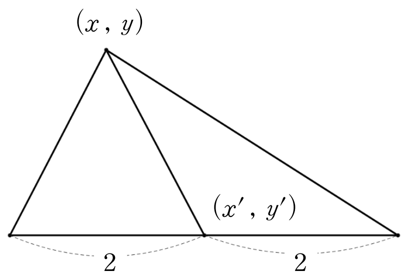
라 하자. 집합 $\left\{(x,0)\in A \,\middle|\, d((-1,0),(x,0))\le \frac{1}{2}\right\}$에 속하는 점의 x좌표 중 가장 작은 양의 실수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

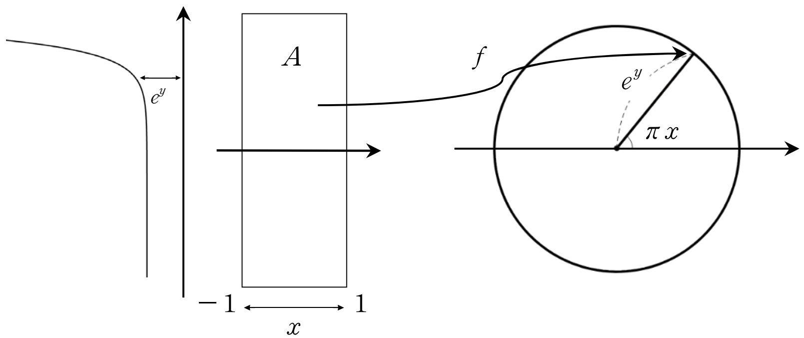
또한 $\mathbb{R}^2_* = \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$에 대하여 함수 $f: A\to\mathbb{R}^2_*$을 $f(x,y)=e^y(\cos\pi x,\sin\pi x)$라 하고, $\mathbb{R}^2_*$ 위에서 거리함수 d_*을 $d_*((u,v),(u',v'))=d(f^{-1}(u,v),f^{-1}(u',v'))$이라 하자. 거리공간 $(\mathbb{R}^2_*,d_*)$의 수열(sequence) $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이 아님을 보이시오. [4점]

풀이 거리함수와 거리공간의 뜻을 이해한다. 거리공간에서 코시수열의 뜻을 이해한다. [위상수학]

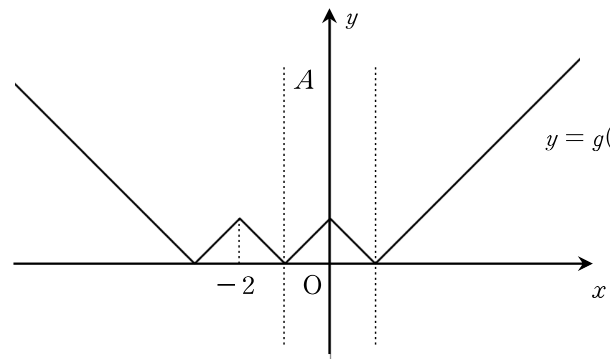
$d((x,y),(x',y'))$의 정의는 다음과 같다.

좌표평면에서 두 점 (x,y)와 $(x'-2,y')$의 유클리드 거리, 두 점 (x,y)와 (x',y')의 유클리드 거리, 두 점 $(x'+2,y')$와 (x',y')의 유클리드 거리 중 가장 작은 것을 $d((x,y),(x',y'))$라 하자.





$g(x)= d((-1,0),(x,0))=\min\{|x-1|,|x+1|,|x+3|\}$라 하면 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 주어진 집합에 속하는 점의 x좌표 중 가장 작은 양의 실수는 $g(x)\le\frac{1}{2}$, $-1\le x<1$을 만족하는 양의 실수 x의 값 중 가장 작은 것이다. 곧, $\frac{1}{2}\le x<1$로부터 $\frac{1}{2}$을 얻는다.

이때 $f(x,y)=e^y\times(\cos\pi x,\sin\pi x)$에 의해 유도된 거리함수 d_*에 대하여 $\mathbb{R}^2_*$ 위의 수열 $\{a_n\}=\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$의 수렴성은 $\mathbb{R}^2$ 위의 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2},-\ln n\right)\right\}$를 관찰하는 것으로부터 추론할 수 있다. $\epsilon_0=1$이라 하고 임의의 자연수 N이 주어졌다고 하자. 그러면 $m=5N$, $n=N$이라 두면 $m,n\ge N$이고 다음을 얻는다.

$$d_*(a_m,a_n)=d\left(\left(\frac{1}{2},-\ln N\right),\left(\frac{1}{2},-\ln 5N\right)\right)$$
$$=|\ln 5N-\ln N|=\ln 5>1=\epsilon_0$$

그러므로 $\{a_n\}$은 코시수열이 아니다.

6. 어떤 공장에서 생산하는 제품의 수명 X의 확률밀도함수(probability density function)가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{x^3}, & x>2 \\ \dfrac{c}{16}x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

이 공장에서 생산하는 제품은 수명이 4 이상인 경우 우수 제품으로 분류되고, 4 미만인 경우 일반 제품으로 분류된다. 상수 c의 값과 임의로 선택한 제품이 우수 제품일 확률 $\mathrm{P}(X\ge 4)$의 값을 순서대로 구하시오.
또한 임의로 4개의 제품을 선택했을 때, 우수 제품이 일반 제품보다 더 많이 포함되어 있을 확률을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

풀이 **확률밀도함수의 뜻을 이해한다. 확률밀도함수를 이용하여 연속확률변수의 확률을 구할 수 있다. 이항분포의 뜻을 이해한다. [확률과 통계]**

확률밀도함수의 정의에 따라

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{c}{16}x\,dx + \int_2^{\infty}\frac{c}{x^3}\,dx = \frac{c}{8} + c\times\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{1}{8}\right) = \frac{c}{4} = 1$$

이므로 $c=4$이고

$$\mathrm{P}(X\ge 4) = \int_4^{\infty} f(x)\,dx = \int_4^{\infty}\frac{4}{x^3}\,dx = 4\times\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{1}{32}\right) = \frac{1}{8}$$

를 얻는다. 임의로 4개의 제품을 선택할 때, 4개의 제품 중 우수 제품의 개수를 확률변수 Y라 하자. 그러면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{8}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{P}(Y=3)+\mathrm{P}(Y=4) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{29}{2^{12}}$를 얻는다.

7. 집합 A, B, C가

$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 21x\equiv 45\ (\mathrm{mod}\ 66),\ 0\le x\le 65\}$,

$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^3-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 151),\ 0\le x\le 150\}$,

$C=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^n-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 151),\ 0\le x\le 150\}$

이다. A와 B의 원소의 개수를 순서대로 구하시오.
또한 $|A|=|B\cup C|$를 만족시키는 정수 $n\,(0\le n\le 150)$의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 151은 소수이고 $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점]

풀이 **합동식의 성질을 이용하여 일차합동식을 풀 수 있다. 원시근의 뜻과 성질을 이해한다. 오일러-파이 함수를 이용하여 서로소인 자연수의 개수를 구할 수 있다. [정수론]**

합동식 $21x\equiv 45\ (\mathrm{mod}\ 66)$의 양변을 3으로 나누자.

$7x\equiv 15\ (\mathrm{mod}\ 22)$ 의 양변에 3을 곱하면

$-x\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 22)$ 이고, $x\equiv -1\equiv 21\ (\mathrm{mod}\ 22)$ 를 얻는다.

곧 $x=\{21,43,65\}$이고 $|A|=3$이다.

소수 151의 원시근을 r이라 하자. 그러면 $0\le x\le 150$이면 $x=r^k$인 자연수 k가 존재한다. 합동식 $x^n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 151)$의 해가 r^k라고 하면 $r^{kn}\equiv r^0\ (\mathrm{mod}\ 151)$로부터 $kn\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \varphi(151)=150)$을 얻는다. 이 k에 대한 일차합동식의 해의 개수는 $\gcd(n,150)$이므로 $|B|=\gcd(3,150)=3$이고 $|C|=\gcd(n,150)$이다. 한편 $|A|=|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|$로부터 $|C|=|B\cap C|$이다. $x\in B\cap C$일 필요충분조건은 $x^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 151)$이고 $x^n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 151)$, 즉 $x^{\gcd(3,n)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 151)$인 것이다. 그러므로 $|B\cap C|=\gcd(\gcd(3,n),150)$이고 $\gcd(n,150)\in\{1,3\}$를 얻는다.

$\gcd(n,150)=1$인 n의 개수는 $\varphi(150)=40$이고, $\gcd(n,150)=3$인 n의 개수는 $\varphi(50)=20$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 $40+20=60$이다.

8. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=\frac{x+ay}{x^2+y^2}+x^2+by^2+i\left(\frac{cy}{x^2+y^2}+dxy\right)$$

가 영역 $\mathbb{C}-\{0\}$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 실수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $e^{\frac{1}{z}}f(z)$의 $z=0$을 중심으로 하는 로랑 급수(Laurent series)를 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$이라 할 때, a_{-1}의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

풀이 **코시-리만 방정식의 비르팅거(Wirtinger) 표현을 이해한다. 디스크에서 해석적인 함수의 로랑급수 전개를 구할 수 있다. [복소해석학]**

$x^2+y^2=z\bar{z},\ x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i},\ \frac{1}{z}=\frac{x+iy}{x^2+y^2},\ \frac{1}{\bar{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$가 성립함을 이용하면 $f(z)$는 $z,\ \bar{z}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$x+(a+ic)y=\frac{z+\bar{z}+(a+ic)(z-\bar{z})}{2}$이므로

$$\frac{x+ay}{x^2+y^2}+i\frac{cy}{x^2+y^2}=\frac{x+(a+ic)y}{x^2+y^2}=\frac{z+\bar{z}+(a+ic)(z-\bar{z})i}{2z\bar{z}}=\frac{1+ai-c}{2}\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1+c-ai}{2}\frac{1}{\bar{z}}$$

를 얻는다. 이때

$$x^2+by^2+dxyi=\frac{(z+\bar{z})^2}{4}+\frac{-b(z-\bar{z})^2}{4}+\frac{d}{4}(z^2-\bar{z}^2)$$

이므로

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{1}{\bar{z}}\left(\frac{1+c-ai}{2}\right)+\frac{(z+\bar{z})^2-b(z-\bar{z})^2-d\bar{z}^2}{4}\right\}$$
$$=-\frac{1}{\bar{z}^2}\left(\frac{1+c-ai}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(2(z+\bar{z})+2b(z-\bar{z})-2d\bar{z}\right)=0$$

일 필요충분조건을 구하면 된다. 그러면 $1+c-ai=0$에서 $a=0,\ c=-1$이고 $z(2+2b)+\bar{z}(2-2b-2d)=0$에서 $b=-1,\ d=2$이다.

그러면 $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{(z+\bar{z})^2+(z-\bar{z})^2+2z^2-2\bar{z}^2}{4}=\frac{1}{z}+z^2$ 로부터

$e^{\frac{1}{z}}f(z)$의 $z=0$을 중심으로 하는 로랑급수는

$$e^{\frac{1}{z}}f(z)=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}+z^2\right)$$

이므로 $a_{-1}=1+\frac{1}{3!}=\frac{7}{6}$이다.

9. 다항식환 $\mathbb{Z}_7[x]$에서 다항식 $f(x)=x^4+3x^2-1$이 기약(irreducible)임을 보이시오. 또한 α를 $f(x)$의 해라 하고, 갈루아 군(Galois group) $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 원소 σ의 위수(order)가 4라 하자. $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 부분군 $\langle\sigma^2\rangle$의 고정체(fixed field) E의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}_7(\alpha)$는 유한체 $\mathbb{Z}_7$ 위의 단순 확대체(simple extension field)이다.) [4점]

풀이 **체 위의 다항식환에서 다항식의 기약성을 판정할 수 있다. 유한체의 성질과 유한체의 갈루아군이 갖는 성질을 이해한다. 갈루아이론의 기본정리를 이해한다. [현대대수학]**

$f(\pm1)=3$, $f(\pm2)=-1$, $f(\pm3)=2\neq0$이므로 $f(x)$는 $\mathbb{Z}_7$에서 근을 갖지 않는다. $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해 된다고 가정하자. 그러면

$$a+c\equiv0 \pmod 7,$$
$$ac+b+d\equiv3 \pmod 7,$$
$$ad+bc\equiv a(d-b)\equiv0 \pmod 7,$$
$$bd\equiv-1 \pmod 7$$

를 얻는다. $a\not\equiv0 \pmod 7$인 경우, $b\equiv d \pmod 7$로부터 $b^2\equiv-1 \pmod 7$이고 $\left(\dfrac{-1}{7}\right)=(-1)^3=-1$이므로 $b\in\mathbb{Z}_7$는 존재하지 않는다.

$a\equiv0 \pmod 7$인 경우, $c\equiv0 \pmod 7$, $b\equiv3-d \pmod 7$이므로 $(3-d)d\equiv-1 \pmod 7$로부터 $d^2-3d-1\equiv0 \pmod 7$를 얻고 $(-3)^2-4(-1)=13\equiv6\equiv-1 \pmod 7$이므로 같은 이유로 $d\in\mathbb{Z}_7$는 존재하지 않는다. 그러므로 $f(x)$는 더 낮은 차수의 다항식의 곱으로 인수분해되지 않는다.

다시 말해 $f(x)$는 $\mathbb{Z}_7$ 위의 기약다항식이다. $f(x)$의 근 α에 대하여 체 $K=\mathbb{Z}_7(\alpha)$는 $[K:\mathbb{Z}_7]=\deg(\alpha, \mathbb{Z}_7)=4$로부터 위수가 $|K|=7^{[K:\mathbb{Z}_7]}=7^4$인 유한체이다.

갈루아군 $G(K/\mathbb{Z}_7)$은 순환군이므로 이 군의 원소 σ의 위수가 4이면

$$G(K/\mathbb{Z}_7)=\langle\sigma\rangle$$

이다. 그러면 부분군 $\langle\sigma^2\rangle$의 위수는 2이고, 지표의 뜻과 갈루아이론의 기본정리에 따라

$$\frac{4}{2}=[\langle\sigma\rangle:\langle\sigma^2\rangle]=[E:\mathbb{Z}_7]$$

를 얻는다. 그러므로 E의 위수는 $|E|=7^{[E:\mathbb{Z}_7]}=7^2$이다.

10. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

이라 하고, $S=\left\{\dfrac{f(x)}{x}\,\middle|\, x\text{는 양의 실수}\right\}$라 하자. 집합 S의 상한(supremum)과 하한(infimum)을 순서대로 구하시오.

또한 $\displaystyle\lim_{s\to 0+}\int_0^1 \frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

풀이 **상한과 하한의 뜻을 이해한다. 부등식과 관련된 정적분, 극한의 성질을 이해한다.**

[해석학]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$라 하자. 그러면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

이다. 이때

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\left\{\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{2-x^2}{x^4}\times e^{-\frac{1}{x^2}}$$

이므로 $x=\sqrt{2}$에서 극댓값 $g(\sqrt{2})=\dfrac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$을 갖고, $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고 유일한 극댓값을 가지므로 이 극댓값은 $g(x)$의 최댓값이다. 즉,

$\sup S=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $\inf S=0$이다.

그러면 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$0\le g(x)\le\frac{1}{\sqrt{2e}}$$

이므로

$$0\le\frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}=\frac{g(x)\,x}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}\le\frac{1}{\sqrt{2e}}\,\frac{x}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}$$

이다. 정적분의 성질을 이용하면

$$0\le\int_0^1\frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx\le\frac{1}{\sqrt{2e}}\int_0^1\frac{x}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx$$

이고, 치환적분법을 이용하면

$$\int_0^1\frac{x}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx=-\frac{s}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{s^2}}d\left(-\frac{x^2}{s^2}\right)=-\frac{s}{2}\times\left(e^{-\frac{1}{s^2}}-1\right)$$

이다.

$$\lim_{s\to 0+}-\frac{s}{2}\times\left(e^{-\frac{1}{s^2}}-1\right)=0$$

이므로 조임정리에 의해

$$\lim_{s\to 0+}\int_0^1\frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx=0$$

를 얻는다.

11. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $-\frac{1}{2}<x<2$에서 $f(x)>0$이다. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 $y=f(x)$, $z=0$ $\left(-\frac{1}{2}<x<2\right)$ 를 x축 둘레로 360° 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)을 M이라 하고, 곡면 M이 평면 $x=0$과 만나서 생기는 원을 α, 평면 $x=\frac{2}{3}$와 만나서 생기는 원을 β, 평면 $x=1$과 만나서 생기는 원을 γ라 하자.
곡면 M에 놓인 곡선으로서 α, β, γ의 측지곡률(geodesic curvature)이 각각 0, 0, $\frac{2}{5}$이다. $f(0)$의 값과 곡선 α 위의 점에서 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

풀이 **매개변수를 이용하여 곡면을 나타낼 수 있다. 곡면 위의 곡선의 측지곡률을 구할 수 있다. 측지곡률과 곡면 위의 한 점에서의 가우스곡률을 구할 수 있다. [미분기하학]**

주어진 곡선은 $(u, f(u), 0)$ $\left(-\frac{1}{2}<u<2\right)$이므로 곡면 M의 매개변수 표현은

$$X(u, v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v) \ \left(-\frac{1}{2}<u<2,\ v\in[0, 2\pi)\right)$$

이다. $k\in\left\{0, \frac{2}{3}, 1\right\}$이라 하고 평면 $x=k$와 곡면 M의 교선 η를 구하자. 그러면

$$\eta(v) = X(k, v) = (k, f(k)\cos v, f(k)\sin v) \ \ (v\in[0, 2\pi))$$

이고, η의 프레네틀을 $\{T(v), N(v), B(v)\}$로 나타내면
$\eta'(v) = (0, -f(k)\sin v, f(k)\cos v)$이므로 η는 $f(k)$-속력곡선이고
$T(v) = (0, -\sin v, \cos v)$이고 $T'(v) = (0, -\cos v, -\sin v)$이다.

또, η는 반지름이 $f(k)$인 원이므로 곡률은 $\kappa(v) = \frac{1}{f(k)}$임이 쉽게 얻어진다.

한편 곡면 M 위의 한 점에서 단위법선벡터 U는

$$U(u, v)= \frac{X_u\times X_v}{\| X_u\times X_v\|} = \frac{(f'(u), -\cos v, -\sin v)}{\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}}$$

이다. 특히 곡선 η 위의 한 점에서는

$$U(k, v) = \frac{(f'(k), -\cos v, -\sin v)}{\sqrt{1+\{f'(k)\}^2}}$$

이다. η의 속력은 단위속력이 아닌 $f(k)$-속력이므로

$$\kappa_n(v) = \frac{1}{f(k)}(T'(v)\cdot U(k, v)) = \frac{1}{f(k)\sqrt{1+\{f'(k)\}^2}}$$

이므로 측지곡률과 법곡률의 관계에 따라

$$\kappa_g^2(v) = \kappa^2(v) - \kappa_n^2(v) = \frac{\{f'(k)\}^2}{\{f(k)\}^2(1+\{f'(k)\}^2)}$$

이고 $\kappa_g(v) = \frac{|f'(k)|}{f(k)\sqrt{1+\{f'(k)\}^2}}$를 얻는다.

조건으로부터 $k=0$, $k=\frac{2}{3}$일 때 $\kappa_g(v) = 0$이므로 $f'(0) = f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$이다.

즉, 삼차함수의 비율관계에 따라

$$f(x) = 2x^2(x-1)+f(0),\quad f'(x) = 6x\left(x-\frac{2}{3}\right) = 2x(3x-2)$$

로 나타낼 수 있다. 이어서 $k=1$일 때 $f(0)=f(1)$, $f'(1) = 2$임을 이용하면

$\kappa_g(v) = \frac{2}{5}$로부터 $f(0) = \sqrt{5}$를 얻는다.

마지막으로 곡선 α 위의 점에서 M의 가우스곡률 $K(0, v)$를 구하자. 회전면은 $F=M=0$이므로 E, G, L, N을 구하면 충분하다.

$$X_u(u, v) = (1, f'(u)\cos v, f'(u)\sin v),$$

$$X_v(u, v) = (0, -f(u)\sin v, f(u)\cos v)$$

$$X_{uu}(u, v) = (0, f''(u)\cos v, f''(u)\sin v),$$

$$X_{vv}(u, v) = (0, -f(u)\cos v, -f(u)\sin v),$$

$$U(u, v) = \frac{(f'(u), -\cos v, -\sin v)}{\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}}$$

에서 $E = 1+\{f'(u)\}^2$, $G = \{f(u)\}^2$, $L = -\dfrac{f''(u)}{\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}}$, $N = \dfrac{f(u)}{\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}}$

이므로 $K(u, v) = \dfrac{LN}{EG}(u)$이고 $f''(0) = -4$이므로 $K(0, v) = \dfrac{LN}{EG}(0) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$이다.

해석학 2문항

현대대수학 2문항

위상수학 2문항

정수론 1문항

선형대수학 1문항

조합및그래프이론 1문항

확률과통계 2문항

복소해석학 2문항

미분기하학 2문항

다변수 및 벡터미적분학 1문항

1. 다음은 ‘수학교육론’ 수업에서 쉐발라드(Y. Chevallard)와 브루소(G. Brousseau)의 이론을 다룬 수업 자료의 일부이다. 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점]

> ○ 쉐발라드(Y. Chevallard)는 교사가 교육적 의도를 가지고 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것을 지식의 (㉠)(이)라고 하였다. 그는 교육 현상을 올바르게 이해하려면 ‘교사-학생’의 이원적 관계가 아니라, ‘교사-지식-학생’의 삼원적 관계로 바라볼 필요가 있다고 보았다. 교사는 이미 알고 있는 지식을 학생들에게 전달하기 위한 목적으로 다시 다루는 것이지만, 학생은 알지 못하는 지식을 처음 접하게 된다. 따라서 지식을 변형하는 주체인 교사, 변형된 지식을 대하는 주체인 학생과 더불어 지식을 고려할 필요가 있다.
>
> ○ 브루소(G. Brousseau)는 교사가 학생들이 수학 지식을 의미있게 학습할 수 있게 하려면 지식을 개인화/배경화하고 탈개인화/탈배경화하는 과정을 균형 있게 다루어야 한다고 보았다. 이 과정이 적절하게 이루어지지 못하면 여러 가지 극단적인 교수 현상이 나타날 수 있다. 한 예로 학생의 개인화/배경화 과정이 지나치게 강조되면, 교사가 가르치고자 한 수학 지식 자체로부터 학생의 개인화/배경화 과정을 용이하게 하기 위해 도입한 교수학적 보조 수단으로 학생들의 사고가 옮겨가는 (㉡)이/가 일어날 수 있다.

풀이 쉐발라드의 교수학적 변환론

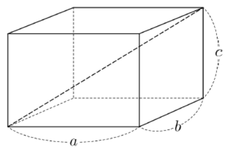
㉠에 알맞은 용어는 ‘**교수학적 변환**’이다. 지문의 내용은 교수학적 변환론의 중요 주제인 ‘삼원적 교수체계’와 ‘지식의 파손성’에 관한 내용이다.

㉡에 알맞은 용어는 ‘**메타인지 이동**’이다. 극단적 교수 현상은 개인화/배경화 또는 탈개인화/탈배경화를 지나치게 강조하거나 간과할 경우 발생할 수 있다.

메타인지 이동(개인화 강조), 형식적 고착(개인화 간과),

토파즈식 외면치레(탈개인화 강조), 조르단식 외면치레(탈개인화 간과)가 있다.

1. 다음은 ‘수학교육론’ 수업에서 폴리아(G. Polya)의 문제해결 교육론을 다룬 수업 자료의 일부이다.

> ○ 폴리아(G. Polya)는 문제해결 교육의 중요성을 강조하면서, 문제해결 교육의 핵심은 방법적 지식인 수학적 (㉠)을/를 터득하는 데 있다고 보았다. 이때 (㉠)(이)란 문제해결에서 전형적으로 유용한 발견과 발명의 방법과 규칙, 문제해결 전략과 전술을 말한다. 문제해결 과정의 네 단계에서 교사가 하는 발문과 권고는 효과적인 사고 활동을 유발해서 학생들의 문제해결을 도울 수 있다.
>
> ○ 다음은 교사와 학생들이 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 c인 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 문제를 해결하면서 나눈 대화이다.
>
> 
>
>
> 교 사: 미지의 것은 무엇입니까?
> 학생1: 직육면체의 대각선의 길이입니다. 미지의 것은 x로 나타내었습니다.
> 교 사: a, b, c와 x를 연결하는 조건은 무엇입니까?
> 학생2: x가 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이가 된다는 것입니다.
> 교 사: ㉡ 미지의 것이 유사한 다른 문제를 알고 있나요?
> 학생3: 예전에 직각삼각형의 한 변의 길이를 구하는 문제를 풀어본 적이 있습니다.
> 교 사: 여러분이 기억해 낸 문제는 직각삼각형에 관한 것이군요. 위 그림에서 직각삼각형을 찾아보세요.
> 학생1: 아! 미지의 것은 직각삼각형의 빗변의 길이였군요. 피타고라스 정리를 사용하면 구할 수 있겠어요.

괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓰고, 폴리아(G. Polya)의 문제해결 과정의 네 단계 중 밑줄 친 ㉡과 같은 발문을 제시하는 단계의 명칭을 쓰시오. [2점]

풀이 폴리아의 문제해결 4단계

㉠에 알맞은 용어는 수학적 ‘**발견술**’이다.

㉡에 알맞은 용어는 주어진 문제와 관련된 보조문제를 고려하도록 발문하고 있으므로 ‘**계획 수립**’ 단계이다.

문제 이해 > 계획 수립 > 계획 실행 > 반성

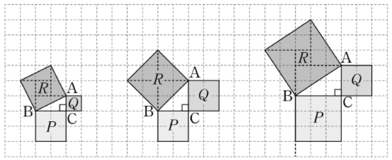
5. 다음은 두 예비 교사가 중학교 ‘피타고라스 정리’에 대한 수업을 계획하면서 나눈 대화의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

예비 교사 A: 내가 맡은 [1단계] 수업 활동을 다음과 같이 계획해 봤어.

1단계

다음 탐구활동에 학생들이 주도적으로 참여하게 한다.

① 그림과 같이 한 칸의 크기가 1인 모눈종이에 세 종류의 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 P, Q, R을 그린다.



② 정사각형 P, Q, R의 넓이를 구하여, 넓이 사이의 관계 (P의 넓이)+(Q의 넓이)=(R의 넓이)를 발견한다.

③ 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에는 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$이 성립할 것이라고 추측한다.

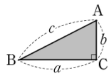
예비 교사 B: [1단계] 수업 활동에 이어서 [2단계]는 다음과 같이 준비해 봤어.

예비 교사 B: [1단계] 수업 활동에 이어서 [2단계]는 다음과 같이 준비해 봤어.

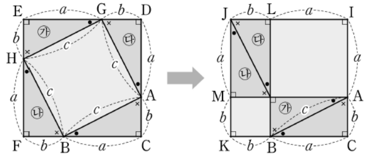
2단계

④ 학생들은 탐구활동을 통해 앞서 관찰한 세 종류의 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$이 성립함을 인식한다.

⑤ 교사는 “모든 직각삼각형에서 이 성질이 항상 성립할까?”라고 발문한다. 학생들은 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 할 때, $a^2+b^2=c^2$이 성립하는지에 대해 생각해 보면서 자유롭게 논의한다.



⑥ 학생들은 다음 과정을 통해 모든 직각삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이 항상 성립함을 정당화하여 추측을 피타고라스 정리로 재구성한다.



[그림 1] [그림 2]

• [그림 1]과 [그림 2]를 비교하여 $a^2+b^2=c^2$임을 이끌어 낸다.

<작성 방법>

○ 1단계에 해당하는 개연 추론 유형을 쓰고, 2단계의 과정 없이 1단계만을 수업할 때, 이 수업을 개연 추론 지도의 관점에서 평가할 것.

○ 1단계와 2단계를 순서대로 수업할 때, 2단계에서 학생들이 경험할 수 있는 피아제(J. Piaget)의 반영적 추상화의 과정을 활동 내용에 근거하여 ‘반사’와 ‘반성’으로 설명할 것.

풀이 개연추론의 유형과 피아제의 반영적 추상화

1단계에서 구체적 조작을 통한 몇 가지 사례에 대해 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 확인함으로써 참인 명제인 피타고라스 정리를 추측하였으므로 ‘**귀납 추론**’이다.

1단계만 수업할 경우, 학생들은 귀납 추론에 의해 발견된 수학적 추측을 형식적으로 정당화하는 과정을 거치지 않으므로, 귀납 추론을 통해 발견된 수학적 추측이 항상 참인 명제인 것으로 오인할 수 있다. 학생들에게 ‘발생 과정의 수학’ 뿐만 아니라 ‘완성된 수학’을 제공할 수 있도록 2단계 수업을 반드시 진행해야한다.

1단계와 2단계를 순서대로 수업할 경우, 1단계에서 수행한 조작활동을 통해 매번 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 세 정사각형을 그려보지 않아도 한 변의 길이의 제곱은 정사각형의 넓이에 대응된다는 것을 의식하게 된다. 즉, 등식 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$과 정사각형을 그리는 행동을 결합하는 ‘**내면화**’의 과정을 겪는다. 이어서 사고의 도구였던 등식 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$을 실제로 “왜 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$가 성립할까? 항상 그럴까?”와 같이 사고의 대상으로 삼는 ‘**주제화**’의 과정을 겪는다. 이 과정을 ‘**반사**’라고 하는데, ‘**반사**’ 과정을 거치면 일반적인 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 세 정사각형의 넓이를 어떻게 비교할 지에 대한 의문을 갖게 되어 인지적 불균형 상태가 된다. 이 상태에서 ‘넓이’라는 쉠을 고수하면서 일반적인 상황에서의 정당화를 해당 쉠으로 접근하는 등 ‘**동화**’가 일어나며, 넓이가 같다는 사실을 보이기 위해 넓이와 관련된 쉠을 활용하는 ‘**조절**’을 통해 정당화를 거쳐 인지적 균형을 찾고, 넓이의 비교라는 ‘**내용**’을 ‘피타고라스 정리’라는 ‘**형식**’으로 구성하게 된다. 이러한 과정을 ‘**반성**’이라고 한다.

6. 다음은 '수학교재연구 및 지도법' 강의에서 지도 교수와 예비 교사들이 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

지도 교수 : 오늘은 고등학교 <확률과 통계> 과목의 '수학적 확률'에 대한 지도 방안에 대해서 논의해 봅시다.

예비 교사1 : 제가 조사한 자료에서는 시행의 뜻과 표본공간, 사건, 근원사건의 정의를 먼저 제시하고, 수학적 확률을 다음과 같이 정의하고 있습니다.

> 어떤 시행에서 원소가 유한개인 표본공간 S에 대하여 (㉠), 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$로 정의하고, 이를 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.(단, 표본공간은 공집합이 아니다.)

예비 교사2 : 그런데 수학적 확률에 (㉠)와/과 같은 가정이 포함된 이유를 잘 모르겠습니다.

지도 교수 : 고등학교 교육과정에서 다루는 수학적 확률이 라플라스(P. S. Laplace)의 고전적인 확률 정의를 따르기 때문입니다. 수학적 확률은 시행 전에 확률값의 계산을 허용하고 있다는 점에서 확률에 대한 일종의 선험적 접근이라고 볼 수 있습니다.

예비 교사3 : 동일한 시행을 충분히 많은 횟수로 반복 시행하여 그 사건이 발생하는 상대도수로 구할 수 있는 확률인 (㉡)을/를 접목한다면, 근원사건의 확률을 구하여 표본공간의 적절성을 검토할 수 있지 않을까요?

예비 교사1 : 하지만 (㉡)도 상대도수의 극한이 존재한다는 것은 직관적으로 이해할 수는 있지만 현실적으로 무한 번의 시행을 할 수는 없기 때문에 학생들이 의문을 가질 것 같아요.

예비 교사2 : 저는 확률의 역사 중 학생들이 호기심을 갖게 할 만한 소재인 심프슨(Simpson)의 패러독스를 간단한 문제 상황으로 구현하여 **[읽기 자료]**를 만들어 보았습니다. ㉢A학과와 B학과 각각에서의 남학생과 여학생의 합격률, 대학 전체에서의 남학생과 여학생의 합격률을 비교해 보면, ㉣확률 문제 상황에서 추론할 때 주의해야 할 점에 대해 알게 됩니다. 이때, 각 성별 합격률은 각 성별 지원자 수에 대한 합격자 수의 비율입니다.

[읽기 자료]

다음은 어느 대학에서 A, B 두 학과의 입학시험 결과를 조사한 표이다. (단, 이 대학에는 두 학과만 있다고 하자.)

	남학생		여학생	
	합격자 수	지원자 수	합격자 수	지원자 수
A학과	30	80	7	20
B학과	10	20	38	80
대학 전체	40	100	45	100

<작성 방법>

- 괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용을 작성하고, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 용어를 쓸 것.
- **[읽기 자료]**에서 밑줄 친 ㉢을 비교한 결과를 쓰고, 그 결과를 근거로 심프슨(Simpson)의 패러독스를 통해 알 수 있는 밑줄 친 ㉣을 작성할 것.

풀이 **확률 개념의 발전과 확률에 관련된 패러독스**

㉠에 들어갈 내용은 '**모든 원소가 일어날 가능성이 서로 같을 때**(모든 근원사건의 확률이 일정할 때)'이고, ㉡에 들어갈 내용은 '**통계적 확률**'이다.

㉢을 비교한 결과는 A학과, B학과의 남학생의 합격률이 여학생보다 크며, 대학 전체로 보면 여학생의 합격률이 남학생보다 크다는 것이다.

㉣이 말하는 것은 부분으로 분해하여 논의한 후 종합하는 전략을 확률 문제에 적용할 때에는 '**조건부확률**'의 개념을 항상 의식하고 주의해야한다는 것이다.

4. (가)는 고등학교 <공통수학1>의 '행렬의 곱셈'에 대한 수업 자료이고, (나)는 강 교사가 이 자료로 수업을 한 후 작성한 수업 성찰 일지이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

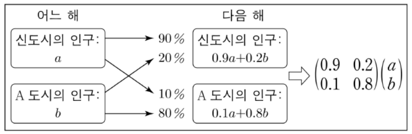
(가)

> 신도시 인구는 현재 2만 명이고, 근교 A 도시의 인구는 10만 명이다. 신도시 인구는 언제 6만 명을 넘어설까?

1단계 : 복잡한 현실 맥락을 단순화된 상황으로 구성하기 위해 다음과 같이 가정을 설정한다.

① 신도시 주민의 90%는 다음 해에도 신도시에 거주하며, 나머지 10%는 A 도시로 이사한다. ② A 도시 주민의 80%는 다음 해에도 A 도시에 거주하며, 나머지 20%는 신도시로 이사한다. ③ 다른 요인에 의한 인구 변화(출생, 사망, 다른 도시 사이의 전출, 전입 등)는 없다.

2단계 : 주어진 상황을 구조화하여 행렬의 곱셈으로 표현한다.



3단계 : 행렬의 곱셈을 수행하고 두 도시의 인구를 구한다.

$$\begin{pmatrix} \text{1년 후 신도시의 인구} \\ \text{1년 후 A 도시의 인구} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20000 \\ 100000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38000 \\ 82000 \end{pmatrix}$$

3단계 : 행렬의 곱셈을 수행하고 두 도시의 인구를 구한다.

$$\begin{pmatrix} \text{1년 후 신도시의 인구} \\ \text{1년 후 A 도시의 인구} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20000 \\ 100000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38000 \\ 82000 \end{pmatrix}$$

공학 도구를 활용하여 행렬 연산을 n년째까지 수행하고, 그 결과를 백의 자리에서 반올림하여 표로 나타낸다.

(단위: 천 명)

n(년)	0	1	2	3	4	5	6		10	11	12	13	⋯
신도시	20	38	51	59	66	70	73		78	79	79	79	⋯
A 도시	100	82	69	61	54	50	47		42	41	41	41	⋯

4단계 : 표를 해석하여 두 도시의 인구 변화를 예측한다.

신도시의 인구는 4년 후에 6만 명을 넘어선다. 그리고 11년 후부터는 두 도시의 인구에 큰 변화가 없음을 알 수 있다.

(나)

> 학생들이 삶과 연계된 현상이나 문제를 다양한 수학적 표현 방식을 이용하여 수학화하고, 수학적으로 해결한 결과를 현실 세계에 적용하여 해석하는 (㉠) 과정을 경험할 수 있도록 수업 자료를 준비했다. 실제 수업을 진행해 보니, 학생들이 현실 세계의 문제 상황을 단순화하는 1단계를 많이 다루어 보지 않아 어려워하였다. ㉡ 이번 수업에서는 내가 가정을 설정하여 단순화된 상황을 구성해 주었는데, 다음 수업에서는 학생 스스로 이 과정을 구성할 수 있도록 안내하고자 한다. 2단계에서는 학생들이 주어진 상황을 행렬의 곱셈으로 표현하기 어려워해서, 주어진 상황을 먼저 구조화한 뒤 행렬로 나타내어 보게 하였다.

<작성 방법>

- 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓸 것.
- 밑줄 친 ㉡은 비고츠키(L. Vygotsky)의 이론에서 '학생의 근접 발달영역 내에서 교사가 적절히 조절하여 주는 도움'을 뜻한다. ㉡에 해당하는 용어를 쓸 것.
- 장비에(C. Janvier)의 다양한 표현 양식 간의 번역 활동에 따라 (가)의 3단계에서 나타난 번역 활동의 명칭을 쓰고, 3단계에서 공학 도구를 활용한 의의를 ㉠과 관련하여 작성할 것.

풀이 수학적 모델링과 여러 가지 번역(representation) 활동

㉠에 들어갈 용어는 '**수학적 모델링**' 과정이다.

㉡에 들어갈 용어는 '**비계**(scaffolding)'이다.

(가)의 3단계에서 나타난 번역 활동의 명칭은 '**계산하기**(computing)'이다. 공학 도구를 활용하여 학생들이 계산 자체에 매몰되지 않고, 행렬의 곱셈을 이용하여 단순화된 사례로부터 인구 변화 양상을 예측해보는 활동에 집중함으로써 자료 이해 및 처리 과정을 경험할 수 있다. 이는 <공통수학 1>의 '행렬' 단원의 성취기준 적용 시 고려 사항 중 하나이다.

- 행렬의 표현과 관련하여 기후변화, 환경 재난의 사례를 단순화하여 다룰 수 있으며, 자료 이해 및 처리 과정을 경험하게 할 수 있다.

TRANSLATION PROCESSES

From \ To	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations, Verbal Description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading off		Curve fitting
Formulae	Parameter Recognition	Computing	Sketching	

3. 다음은 예비 교사가 중학교의 '이차방정식과 근의 공식'에 대한 교수 · 학습 지도안을 작성한 후, 지도 교수와 나눈 대화 중 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

교수·학습 지도안

학습 목표	이차방정식의 근의 공식을 이해할 수 있다.
단계	교수 · 학습 활동
도입	• 선수 학습을 확인하고, 학습 목표를 제시한다.
전개	• 학급을 5개의 모둠으로 나누고, 모둠별로 수를 계수로 갖는 이차방정식(예: $3x^2-4x-1=0$)을 하나씩 정하여 '완전제곱식을 이용한 풀이 절차'에 따라 풀이하게 한다. 이때 모둠마다 서로 다른 이차방정식을 풀도록 한다. • 모둠별로 한 명씩 칠판에 나와서 모둠활동의 결과인 5개의 이차방정식을 '완전제곱식을 이용한 풀이 절차'에 따라 나란히 풀이하게 한다. • 칠판의 풀이를 보면서 이차방정식의 근을 구하는 보편적인 방법에 대해 토론하게 한다. 필요한 경우, 수 계수를 문자 a, b, c로 대신하여 나타낼 수 있도록 발문한다. • 모둠별로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$을 수를 계수로 갖는 이차방정식과 동일한 방법으로 풀이하여 근의 공식을 유도하고, 그 결과를 발표하게 한다. • 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$의 근의 공식 $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac \geq 0$)을 정리한다. • 이차방정식의 근의 공식을 이용하는 간단한 예제를 풀이한다. • 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 설명한다.
정리	• 본시 학습 내용을 정리하고, 형성평가를 실시한다.

예비 교사 : 저는 학생들이 모둠활동에 능동적으로 참여하면서 수를 계수로 갖는 여러 개의 이차방정식을 풀이하는 경험으로부터 문자 계수를 갖는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$의 근의 공식을 스스로 유도할 수 있도록 수업을 계획했습니다. 이때 이차방정식에서 수로 된 계수를 문자 a, b, c로 대신하여 나타내고 이를 이용하여 근의 공식을 나타낼 수 있도록 적절한 발문을 하고자 합니다.

지도 교수 : 특수한 경우의 사례로부터 문자를 사용하여 (㉠)을/를 해 보는 수업 활동에 중점을 두었군요. 이러한 활동은 학생들이 아직 정해져 있지 않은 상수 a, b, c의 의미를 이해하는 데 도움이 됩니다. 수업에서 계획한 바와 같이, 학생들이 능동적으로 구체적인 상황을 변수로 구성하고 (㉠)된 식을 구성해 보는 경험은 다가이름이라는 변수 개념의 정적 측면을 생각해 보는 계기가 될 것입니다. 그런데 ㉡ 교수 · 학습 지도안에 중학교에서 다루지 않아야 될 내용이 포함되어 있으니 확인하기 바랍니다.

<작성 방법>

○ 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓸 것.
○ 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 교수학적 현상학에 대해 설명하고, 예비 교사가 계획한 수업에서의 변수 개념 지도를 교수학적 현상학의 관점에서 분석하여 작성할 것.
○ 2022 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호)의 중학교 '변화와 관계' 영역의 '성취기준 적용 시 고려 사항'을 근거로, 밑줄 친 ㉡을 1가지 제시할 것.

풀이 변수 개념의 구분과 프로이덴탈의 교수학적 현상학

㉠에 들어갈 용어는 '**일반화**'이고,

㉡으로 제시될 수 있는 내용은 '**이차방정식의 근과 계수와의 관계**'이다.

프로이덴탈의 교수학적 현상학이란 현상과 본질의 관계가 교수학습과정에서 어떻게 획득되는가에 대한 이론으로, 현상은 현실적 경험과 수학적 경험을 일컫는 말이고, 본질은 현상을 조직하기 위한 도구인 수학적 개념, 구조, 아이디어 등을 일컫는다.

예비 교사가 계획한 수업은 수 계수의 이차방정식의 근을 구하는 경험이라는 현상으로부터 이차방정식의 근을 구하는 패턴을 일반화하게 함으로써 이차방정식의 근의 공식이라는 본질을 추출하고 수학적 개념을 형식화하고 추상화한다.

- 이차방정식의 근과 계수와의 관계는 다루지 않는다.

5. (가)는 두 명의 수학 교사가 2022 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호)을 바탕으로 중학교 '자료와 가능성' 영역의 '통계적 문제해결'에 대한 수업 연구를 하면서 나눈 대화이고, (나)는 이를 반영한 최 교사의 수업의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

(가)

김 교사 : 2022 개정 수학과 교육과정에 제시된 '교육과정 설계의 개요'에서는 '학년(군) 또는 학교급을 관통하는 수학 내용의 본질 또는 가치'를 의미하는 (㉠)을/를 파악하여 수업을 계획할 것을 권장하고 있습니다.

최 교사 : 중학교 '자료와 가능성' 영역의 내용 체계에서 (㉠)을/를 찾아보니, 제가 이번에 수업할 통계적 문제해결 단원과 직접 관련된 내용은 "자료를 이용하여 통계적 문제해결 과정을 실천하고 생활 속의 가능성을 탐구하는 것은 ㉡ <u>미래를 예측하고 합리적인 의사 결정을 하는 데 기반이 된다</u>."이네요.

김 교사 : 이 단원의 수업은 (㉠)을/를 향한 깊이 있는 학습을 할 수 있도록 '내용 체계', '㉢ <u>성취기준</u>', '성취기준 해설', '성취기준 적용 시 고려 사항' 등을 확인한 후, 학생들이 평소의 경험과 연결하여 통계적 탐구를 할 수 있도록 계획하면 좋겠습니다.

(나)

최 교사 : 통계를 활용하여 평소에 궁금했던 내용이나 조사하고 싶은 주제를 모둠별로 정하여 탐구해 볼까요? 필요할 때 선생님이 도움을 줄게요.

A 모둠

학 생 1 : 올해 여름은 특히 더운 날이 많았던 것 같아. 최근 기후 문제도 많이 논의되고 있어서, 올해 8월 한 달간 일평균 기온 분포의 특징을 10년 전과 비교하여 탐구하면 어떨까?

학 생 2 : 좋아, 기상자료개방포털에 우리 지역의 2015년과 2025년 8월의 일평균 기온 자료가 있는지 검색해 보자.

학 생 3 : 2015년과 2025년의 일평균 기온 자료를 찾았어. 이 두 자료를 정리해 볼까?

학 생 4 : 통계 소프트웨어를 이용해서 줄기와 잎 그림과 도수분포표로 나타내 보자.

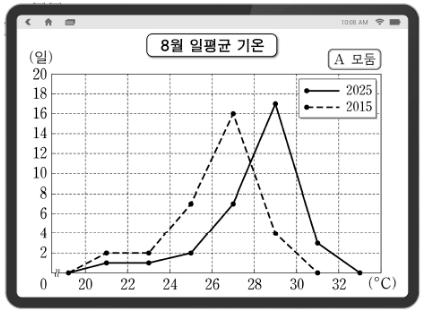
학 생 2 : 줄기와 잎 그림은 2015년과 2025년의 자료를 각각 나타내어야 해서, 한눈에 비교가 잘 안 되는 것 같아.

최 교사 : ㉣ <u>우리가 배웠던 그래프 중에, 분포 상태와 변화를 한눈에 볼 수 있는 그래프로 나타내어 볼까요?</u>

학 생 3 : 두 자료를 도수분포다각형으로 나타내어 보니, 한눈에 비교할 수 있어요.

최 교사 : 자, 이제 모둠별로 탐구한 결과를 온라인 플랫폼에 공유하고 발표해 봅시다. A 모둠이 먼저 발표해 볼까요?

A 모둠 : 저희 모둠에서 탐구한 결과는 다음과 같습니다.



우리 지역의 2025년 8월 한 달간 일평균 기온의 그래프는 2015년의 그래프보다 전체적으로 오른쪽으로 치우쳐 있으므로, 10년 전보다 기온이 높아졌음을 알 수 있습니다. 통계를 이용해 실제 데이터를 분석해 보니 앞으로 10년 후인 2035년의 8월은 더 더워질 수 있다고 생각됩니다. 지구 온난화와 관련된 다른 자료들도 조사해 본 결과, 유사한 경향을 확인할 수 있었습니다. 저희 모둠에서는 일상생활 속에서 우리부터 에너지 절약을 실천하고, 학생회에 지속가능한 발전을 위한 캠페인을 제안하고자 합니다.

<작성 방법>

- 2022 개정 수학과 교육과정에서 괄호 안의 ㉠을 나타내는 용어를 쓰고, 최 교사의 수업에서 밑줄 친 ㉡이 반영되었음을 확인할 수 있는 근거를 (나)에서 찾아 제시할 것.
- 밑줄 친 ㉢에 근거하여, 통계적 문제해결 과정의 단계를 작성할 것.
- 최 교사가 A 모둠 의 논의 활동 중에 밑줄 친 ㉣과 같이 안내한 이유를 통계적 문제해결과 관련한 '성취기준 해설'에 근거하여 작성할 것.

풀이 2022개정 수학과 교육과정 '자료와 가능성' 영역

㉠에 들어갈 용어는 '**핵심 아이디어**'이다. A모둠은 2015년과 2025년 8월의 한 달간 일평균 기온을 그래프로 나타내고 비교해봄으로써 2035년 8월의 기온을 예측하고 지구온난화 문제와 연관지어봄으로써 에너지 절약을 실천하는 합리적인 의사 결정을 하고 있다.

- 통계적 탐구 문제를 설정하고 적절한 계획을 세워 자료를 수집한다.

> 자료를 수집하고 분석할 때는 인터넷 검색, 웹 기반 소프트웨어, 통계 프로그램 등을 활용한다.
> 수집한 자료를 자료의 특성과 목적에 맞게 표, 그래프, 수치 등으로 나타내어 분석하고 그 결과를 탐구 문제와 연결하여 해석한다.
> 수집한 자료나 분석 결과가 적절한지 판단하여 계획을 수정하거나 통계적 근거를 바탕으로 토론하는 등 주도적으로 통계적 문제를 탐구·해결한다.

최교사는 위 통계적 문제해결 과정에 따라 수집한 자료를 자료의 특성과 목적에 맞게 나타내도록 지도하고 있다.