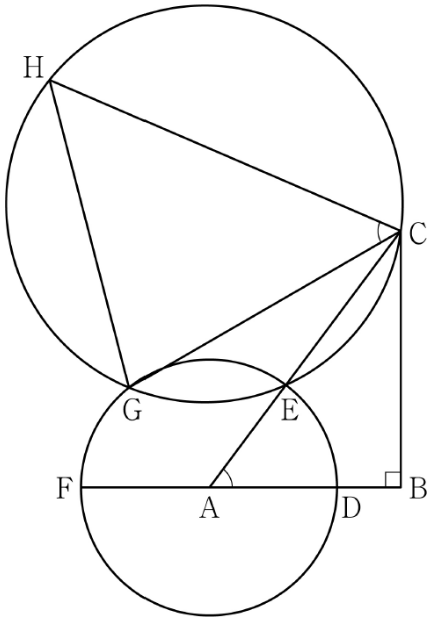
14. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{CG}=2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle HCG=\angle BAC$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는? [4점]



① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{38\sqrt{10}}{25}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$

④ $\frac{32\sqrt{15}}{25}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

풀이 **사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 도형에 관한 문제를 해결할 수 있다.**

1 구하는 것 확인하기

: $\overline{GH}$를 구하기 위해, $\overline{CG}=2\sqrt{6}$, $\angle HCG=\angle BAC$임을 이용하자.

주어진 직각삼각형 ABC에서 $\cos\angle CAB=\frac{3}{5}$, $\sin\angle CAB=\frac{4}{5}$임이 확인된다.

그러므로 $\overline{CH}$를 구한 뒤 코사인법칙을 이용하여 $\overline{GH}$를 구하거나,

삼각형 CGH의 외접원의 반지름 R을 구한 뒤 사인법칙을 이용하여 $\overline{GH}$를 구하자.

2 주어진 것으로부터 구하는 것까지의 모든 정보 작성하기

: $\overline{CH}$ 또는 R을 구하기 위해, 주어진 조건으로부터 삼각형 CGH 주변의 정보를 얻자.

$\overline{AD}=\overline{AE}=\overline{AG}=2$이므로 삼각형 CAG에서 **코사인법칙**을 이용하면

$$\cos\angle ACG=\frac{\overline{AC}^2+\overline{CG}^2-\overline{AG}^2}{2\,\overline{AC}\times\overline{CG}}=\frac{5^2+(2\sqrt{6})^2-2^2}{2\times5\times2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

이고 이를 이용하여 삼각형 CGE에서 **코사인법칙**을 이용하면

$$\overline{EG}^2=\overline{CE}^2+\overline{CG}^2-2\overline{CE}\times\overline{CG}\cos\angle ACG=9+24-2\times3\times2\sqrt{6}\times\frac{3\sqrt{6}}{8}=6$$

이고 $\overline{EG}=\sqrt{6}$을 얻는다.

3 공유하는 정보를 이용하기

삼각형 CEG와 삼각형 CGH의 외접원은 같다. 삼각형 CEG에서 **사인법칙**을 이용하면

$$2R=\frac{\overline{EG}}{\sin\angle ACG}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2}}=\frac{8\sqrt{15}}{5}$$

을 얻는다.

4 선분 GH의 길이 구하기 : R을 구했으므로, 삼각형 CGH에서 **사인법칙**을 이용하자.

$$\frac{8\sqrt{15}}{5}=2R=\frac{\overline{GH}}{\sin\angle GCH}=\frac{5}{4}\overline{GH}$$

로부터 $\overline{GH}=\frac{32}{25}\sqrt{15}$이다. 즉, 정답은 ④이다.

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x\ge 0)\end{cases}$$

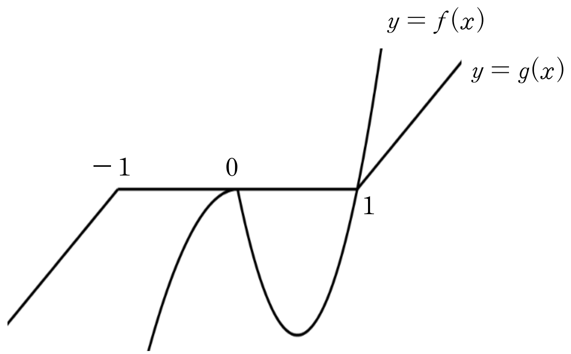
이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1\le x<1) \\ ax-a & (x\ge 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x \left(g(t)-f(t)\right)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자. $a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

풀이 **정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해한다. 극대·극소를 판정할 수 있다. 다항함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있다.**



1 **동치 명제 작성** : 함수 $h(x)$는 $h(0)=0$, $h'(x)=g(x)-f(x)$로 정의되는 함수이다. $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가진다는 것은 $h'(x)=0$의 근 중 좌·우에서 $h'(x)$의 부호 변화가 일어나는 것이 유일함을 의미한다.

2 **a의 값에 따른 $h'(x)=0$의 서로 다른 모든 근의 변화 관찰하기**

$h'(x)=g(x)-f(x)=0$의 근은 0, 1이 있다. 그러나 a의 값에 따라 $h'(x)=0$의 서로 다른 모든 근의 집합이 달라진다.

(i) **곡선 x^2-x $(x\ge 0)$ 위의 점 $(1,0)$에서 그은 접선의 기울기**는 1이므로 $a>1$일 때 $h'(x)=0$의 근이 추가된다. (*도함수 $2x-1$에 $x=1$을 대입하면 접선의 기울기는 1)

(ii) **$(-1,0)$에서 곡선 $y=-x^2$ $(x<0)$에 그은 접선의 기울기**를 m이라 하면 $a\ge m$일 때 $h'(x)=0$의 근이 추가된다. m의 값을 구해보자. 접점의 x좌표를 p라 하면 두 점 $(p,-p^2)$, $(-1,0)$을 연결한 직선의 기울기와 $x=p\,(p<0)$에서 접선의 기울기가 같으므로

$$\frac{p^2}{-1-p}=-2p$$

이고, 정리하면 $p=-2$를 얻는다. 곧, $m=-2p=(-2)\times(-2)=4$이다.

(i), (ii)에 따라 다음과 같은 결론을 얻는다.

$a\le 1$이면 $h'(x)=0$의 서로 다른 모든 근의 집합은 $\{0,1\}$이고 $x=1$의 좌·우에서만 $h'(x)$의 부호의 변화가 일어나므로 $h(x)$는 $x=1$에서 유일한 극값을 갖는다.

$1<a<4$이면 $h'(x)=0$의 서로 다른 모든 근의 집합은 $\{0,1,q(>1)\}$이고 $x=q$의 좌·우에서만 $h'(x)$의 부호의 변화가 일어나므로 $h(x)$는 $x=q$에서 유일한 극값을 갖는다.

$a=4$이면 $h'(x)=0$의 서로 다른 모든 근의 집합은 $\{-2,0,1,q(>1)\}$이고 $x=q$의 좌·우에서만 $h'(x)$의 부호의 변화가 일어나므로 $h(x)$는 $x=q$에서 유일한 극값을 갖는다.

$a>4$이면 $h(x)$는 유일한 극값을 갖지 않는다.

그러므로 $k=4$이다. $a=4$이면 다음을 얻고, $k+h(3)=15/2$이다. 즉, 정답은 ④이다.

$$h(3)=\int_0^3 g(t)-f(t)\,dt=\int_0^1 x^2-x\,dx+\int_1^3(-x^2+5x-4)dx=\frac{7}{2}$$

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x\geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim\limits_{x\to m+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq-\dfrac{7}{2}g(1)$) [4점]

풀이 **수렴하는 극한의 뜻과 성질을 이해한다. 다항식의 인수정리를 이해한다.**

1 **문제 이해하기** : 함수 $g(x)$는 t의 값에 따라 다르게 주어지는 함수이다. 이 중 $g(x)$가 연속함수인 t의 값만을 고려하자. $x=t$에서 좌·우극한이 같으므로

$$\lim_{x\to t-}-f(x)=\lim_{x\to t+}f(x)$$

로부터 $f(x)$가 연속함수임에 따라 $-f(t)=f(t)$이고 $f(t)=0$이다. 즉, 실수 t가 방정식 $f(x)=0$의 근 중 하나일 때 $g(x)$가 연속함수이다.

2 **조건 이해하기** : 조건 (가)로부터 $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=0$이므로 $g(x)$의 선택에 관계없이 $f(x)$, $-f(x)$는 연속함수이므로 $f(0)=f(2)=0$을 얻는다. 즉, $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 **인수정리**에 따라 $f(x)=a(x-p)x(x-2)$인 실수 p가 존재한다. 이어서 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$h(x)=\begin{cases} -a(x-p) & (x<t) \\ a(x-p) & (x\geq t) \end{cases}$$

그러면 문제의 조건을 만족하는 $g(x)$에 대하여 $g(x)=x(x-2)h(x)$가 성립한다.

3 **동치 명제 작성**

조건 (나)는 $h(x)$를 이용하면 $g(-1)=3h(-1)$, $g(1)=-h(1)$이므로

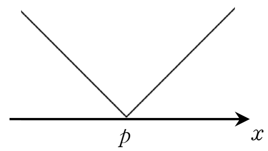
$$\mathbb{N}\cap\left\{m\ \middle|\ \lim_{x\to m+}h(x)\text{의 값이 음수이다.}\right\}=\left\{3h(-1),\ \frac{7}{2}h(1)\right\}$$

로 나타낼 수 있다. 또한 $g(-5)=35\times h(-5)$이므로 $h(-5)$를 구하자.

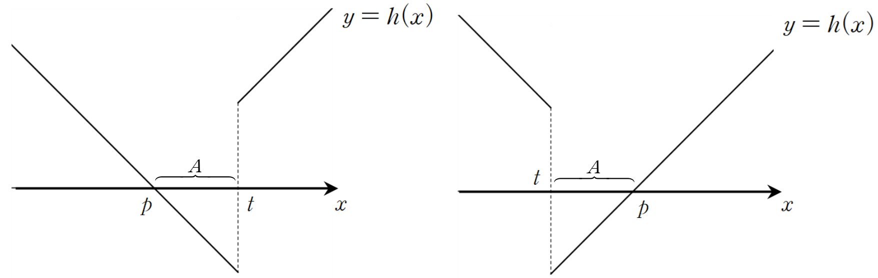
4 **t의 값에 따른 집합 $A=\left\{m\ \middle|\ \lim\limits_{x\to m+}h(x)\text{의 값이 음수이다.}\right\}$ 관찰하기**

앞서 $t\in\{0,\ 2,\ p\}$임을 확인하였다.

· $t=p$인 경우, $h(x)=|a(x-p)|$이므로 $\lim\limits_{x\to m+}h(x)$의 값이 음수가 되는 m은 존재하지 않는다. 즉, $A=\varnothing$이고 $n(\mathbb{N}\cap A)=0$을 얻는다.



· $t\neq p$인 경우, $t>p$일 때와 $t<p$일 때 함수 $y=h(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.



$t>p$인 경우, 임의의 $t\in\{0,\ 2\}$에 대하여 $n(\mathbb{N}\cap A)<2$이다. 그러므로 $t<p$이다.

$t<p$인 경우, $t=0$이면 $n(\mathbb{N}\cap A)=2$일 필요충분조건은 $2<p\leq 3$인 것이다.

$t=2$이면 $n(\mathbb{N}\cap A)=2$일 필요충분조건은 $3<p\leq 4$인 것이다.

그러므로 다음의 두 경우 중 조건 (나)를 만족할 때의 $h(-5)$를 구하면 충분하다.

(i) $2<p\le 3$, $t=0$인 경우, $\mathbb{N}\cap A=\{1,\ 2\}$이다. 이때

$$3h(-1)=3\times(-a(-1-p))=3a(1+p),$$

$$\frac{7}{2}h(1)=\frac{7}{2}a(1-p)$$

이고

$$3a(1+p)-\frac{7}{2}a(1-p)=\frac{a}{2}\left(13p-\frac{1}{2}\right)>0$$

이므로 $3a(1+p)=2$, $\frac{7}{2}a(1-p)=1$이다. 그러면 $p=\frac{2}{5}$이고 이는 $2<p\le 3$임에 모순이다. 그러므로 $t\ne 0$이다.

(ii) $3<p\le 4$, $t=2$인 경우, $\mathbb{N}\cap A=\{2,\ 3\}$이다. 이때

$$3h(-1)=3a(1+p)$$

인 것은 동일하고,

$$\frac{7}{2}h(1)=\frac{7}{2}\times(-a(1-p))=\frac{7}{2}a(p-1)$$

이고

$$3a(1+p)-\frac{7}{2}a(p-1)=\frac{a}{2}(13-p)>0$$

이므로 $3a(1+p)=3$, $\frac{7}{2}a(p-1)=2$이다. 그러면 $p=\frac{11}{3}$, $a=\frac{3}{14}$을 얻는다. 그러면 주어진 조건을 만족하는 $g(x)$에 대하여

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{3}{14}\left(x-\frac{11}{3}\right) & (x<2)\\ \frac{3}{14}\left(x-\frac{11}{3}\right) & (x\ge 2)\end{cases}$$

이다. 그러면 $h(-5)=-\frac{3}{14}\times\left(-5-\frac{11}{3}\right)=\frac{13}{7}$이고 $g(-5)=35\times\frac{13}{7}=65$이다.

[참고] $g(x)$는 대체 무엇인가..? : t의 값에 따라 다르게 정의되는 함수

이 문제의 $g(x)$는 t의 값에 따라 다르게 정의되는 함수이므로 $g_t(x)$로 나타낼 수 있고, 함수 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$을 $\varphi(t)=g_t$ (단, 함수 $g_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는

$$g_t(x)=\begin{cases}-\frac{1}{14}x(x-2)(3x-11) & (x<t)\\ \frac{1}{14}x(x-2)(3x-11) & (x\ge t)\end{cases}$$

로 정의된다.) 로 정의할 때, $\varphi(t)\in C^0(\mathbb{R})$일 t의 조건을 구하고 그 중 조건 (가), (나)를 만족하는 t의 조건을 구하는 문제이다.

이러한 함수는 2018학년도 수능 가형 30번 문항, 2023학년도 9월 평가원 공통 22번 문항에서 활용된 적이 있다.

t의 값에 따라 다르게 정의되는 함수 $f(x)$를 $f_t(x)$로 나타내면

$$f_t(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이다. [181130] t의 값에 따라 다르게 정의되는 함수 $g(x)$를 $g_t(x)$로 나타내면

$$g_t(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge t)\\ -f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$

이다. [230922] 특히, 함수 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^X$를 $\varphi(n)=f_n$으로 나타낼 때 수열 $\{f_n\}$을 정의역이 X인 실함수열 (sequence of real functions)이라고 한다.

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\,b)$와

곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다.

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에

있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8},\,\frac{133}{8}\right)$일 때,

$a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 **지수함수와 로그함수의 관계를 이해한다. 일대일함수의 뜻을 이해한다.**

1 **동치 명제 작성**

점 $\mathrm{A}(a,\,b)$는 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점이므로 $b=\log_{16}(8a+2)$로부터 $a=\frac{1}{8}(16^b-2)$를 얻는다. 즉, A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A}'(b,\,a)=\mathrm{A}'\left(b,\,\frac{1}{8}(16^b-2)\right)$는 곡선 $y=\frac{1}{8}(16^x-2)$ 위의 점이다. 이 곡선과 주어진 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$과의 관계를 파악해보자. $f(x)=4^{x-1}-\frac{1}{2}$이라 하면

$$f(2x)=4^{2x-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}16^x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(16^x-2)$$

이므로 $\frac{1}{8}(16^x-2)=\frac{1}{2}f(2x)$로 나타낼 수 있다. 그러면 $a=\frac{1}{2}f(2b)$로 나타낼 수 있고 점 B의 좌표를 $(c,\,d)$라 하면 $d=f(c)$로 나타낼 수 있다. 그런데 A′가 직선 OB 위의 점이므로, 두 점 O, $\mathrm{A}'\left(b,\,\frac{1}{2}f(2b)\right)$를 연결한 직선의 기울기와 두 점 O, $\mathrm{B}(c,\,f(c))$를 연결한 직선의 기울기는 같다.

따라서

$$\frac{f(2b)}{2b}=\frac{f(c)}{c}$$

를 얻는다. (단, A, B는 제1사분면의 점이므로 $a,\,b,\,c,\,d>0$이다.)

한편 양의 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\frac{f(t)-0}{t-0}$$

라 하면 $g(t)$는 두 점 O, $(t,\,f(t))$를 연결한 직선의 기울기로 정의된 함수이다. 그런데 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 성질에 따라 $g(t)$는 일대일함수이므로 $g(2b)=g(c)$에서 $2b=c$를 얻는다. 곧, $d=f(2b)=2a$이다.

2 **조건 이해하기** : 점 $\mathrm{A}(a,\,b)$, $\mathrm{B}(2b,\,2a)$의 $1:1$ 내분점이 $\left(\frac{77}{8},\,\frac{133}{8}\right)$이므로

$$a+2b=\frac{77}{4}$$

$$b+2a=\frac{133}{4}$$

을 얻는다. 이때 $3(a+b)=\frac{210}{4}$으로부터 $a+b=\frac{35}{2}$, $a-b=\frac{56}{4}=14$이므로

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2=\left(\frac{35}{2}\right)^2-14^2=\left(\frac{35}{2}+14\right)\left(\frac{35}{2}-14\right)$$

이고

$$16ab=(35+28)(35-28)=63\times 7=441$$

에서 $ab=\frac{441}{16}$이다. 그러므로 $p+q=457$이다.

[참고] 지수함수 사이의 관계

두 지수함수 $y=a^x$, $y=b^x$에 대하여 $b=a^{\log_a b}$이므로 $b^x=\left(a^{\log_a b}\right)^x=a^{(\log_a b)\cdot x}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 즉, $f(x)=a^x$이면 $f(\log_a b\cdot x)=b^x$이다.

28. 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))\ (s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $\frac{161}{12}+\ln 3$ ② $\frac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\frac{53}{4}+\ln 2$

④ $\frac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\frac{157}{12}+\ln 2$

풀이 **부분적분법을 이용하여 역함수의 정적분을 구할 수 있다.**

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$를 고려하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ f(s))$이고

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$이므로

이 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ -sf'(s)+f(s))$이다. 이 두 점 사이의

거리는 $|-sf'(s)|=s\times\left(s-1+\frac{1}{s+1}\right)=\frac{s^3}{s+1}$ $(s>0)$이므로 $h(s)=\frac{s^3}{s+1}$이라

하면 다음을 얻는다.

$$h(g(t))=t$$

그런데 h의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이므로 h는 증가함수이다. 곧,

h는 일대일대응인 함수임에 따라 g는 h의 역함수이므로 주어진 정적분은 다음과 같다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt=\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}^{h^{-1}\left(\frac{27}{4}\right)} s\,h'(s)\,ds$$

방정식 $h(s)=\frac{1}{2}$, $h(s)=\frac{27}{4}$을 풀자. $\frac{s^3}{s+1}=\frac{1}{2}$로부터 $s=1$, $\frac{s^3}{s+1}=\frac{27}{4}$로부터

$s=3$이므로 $h(1)=\frac{1}{2}$, $h(3)=\frac{27}{4}$이고 부분적분법에 따라

$$\begin{aligned}\int_1^3 s\,h'(s)\,ds &= s\,h(s)\Big|_1^3-\int_1^3 h(s)\,ds = 3h(3)-h(1)-\int_1^3\frac{s^3}{s+1}\,ds\\ &=\frac{81}{4}-\frac{1}{2}-\int_1^3 s^2-s+1-\frac{1}{s+1}\,ds\\ &=\frac{79}{4}-\left(\frac{20}{3}-\ln 2\right)=\frac{157}{12}+\ln 2\end{aligned}$$

를 얻는다. 그러므로 정답은 ⑤이다.

해당 문항에서는 이번 수능대비 강의에서 다룬 내용 중 다음이 활용되었다.

역함수가 정의될 조건과 특징

① **정의될 조건** : f^{-1}가 정의될 필요충분조건은 f가 일대일대응인 것이다.

② **역함수의 정의** : g가 f의 역함수이면 f의 정의역과 치역에 모두 속하는 x에 대하여 $g(f(x))=f(g(x))=x$이다.

③ **사잇값 정리 활용** : f가 연속함수일 때, f가 일대일함수일 필요충분조건은 f가 증가함수이거나 감소함수인 것이다.

역함수의 정적분

미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고, $f'(x)$가 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=[x\,f(x)]_a^b-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b x\,f'(x)\,dx$$

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 자연수 k에 대하여
>
> $$b_{k+i}=\frac{1}{a_i}-1 \ (i=1,\ 2,\ 3)$$
>
> 이다.

부등식

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)<30$$

이 성립할 때, $a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $a_1\neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 **등차수열과 등비수열의 성질을 이해한다. 등비급수의 합을 구할 수 있다.**

수열 $\{a_n\}$이 첫째항 a_1과 공차가 같은 등차수열이므로 $a_n=a_1 n$ 이다.

이어서 수열 $\{b_n\}$이 등비수열이므로 $b_{k+1}b_{k+3}=b_{k+2}^2$임을 이용하면

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3a_1}-1\right)=\left(\frac{1}{2a_1}-1\right)^2$$

로부터 $1^2-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{3a_1}\right)\times 1+\frac{1}{3{a_1}^2}=1-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{4{a_1}^2}$을 얻는다. 그러면

$$-\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{3{a_1}^2}=\frac{1}{4a_1^2}$$

의 양변에 $12{a_1}^2$을 곱하면 $-4a_1+4=3$, $a_1=\frac{1}{4}$을 얻는다. 또한

$b_{k+1}=4-1=3$, $b_{k+2}=2-1=1$이므로 $\{b_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이다.

k의 값을 구해보자.

$$a_n a_{n+1}=\frac{n}{4}\times\frac{n+1}{4}=\frac{n(n+1)}{16}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n(n+1)}=16$$

이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}b_1$$

으로부터 $0<\frac{3}{2}b_1-16<30$, 곧 $\frac{32}{3}<b_1<\frac{92}{3}$를 얻는다. 부등식의 양변에 $\left(\frac{1}{3}\right)^k$을 곱하면 $\frac{32}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k<b_{k+1}=3<\frac{92}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ 이고 이어서 3^{k+1}을 곱하면

$$32<3^{k+2}<92$$

를 얻는다. 이때 k는 자연수이므로 $k=2$이다. 즉, $b_3=3$임에 따라 $b_2=9$이므로 수열 $\{b_{2n}\}$은 첫째항이 9이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$$

이다. 한편 $a_2=2a_1=\frac{1}{2}$이므로

$$a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{81}{8}=\frac{81}{16}$$

에서 $p+q=97$이다.

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert x\rvert \le 1$일 때, $4\times\left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이다.
(나) $\lvert x\rvert > 1$일 때, $\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert = e^{\lvert x\rvert-1}+1$이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1,0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자.
함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b\,(a<b)$에서 불연속일 때,

$g(a)\times\left(\lim\limits_{m\to a+} g(m)\right)+g(b)\times\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) [4점]

풀이 **역함수의 뜻을 알고, 연속함수의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.**

1 **재작성** : 역함수의 정의에 따라 주어진 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(가) $4t^2 = f(t)^2\left(f(t)^2-5\right)^2$, $\lvert f(t)\rvert \le 1$

(나) $\lvert t\rvert = e^{\lvert f(t)\rvert-1}+1$, $\lvert f(t)\rvert > 1$

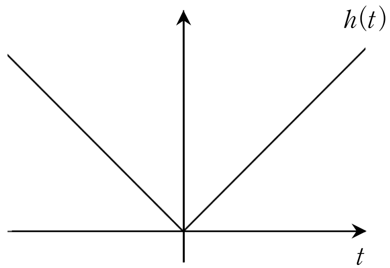
제곱근의 뜻과 절댓값의 성질에 따라

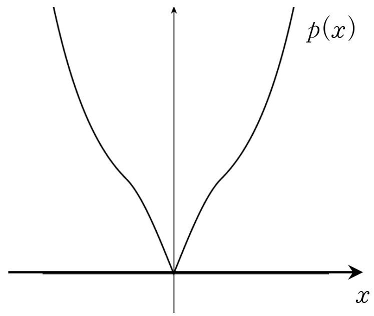
$$\lvert t\rvert = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\lvert f(t)\left(f(t)^2-5\right)\right\rvert & ,\ \lvert f(t)\rvert \le 1 \\ e^{\lvert f(t)\rvert-1}+1 & ,\ \lvert f(t)\rvert > 1 \end{cases}$$

이므로 함수 $p(x)$를

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\lvert x\left(x^2-5\right)\right\rvert & ,\ \lvert x\rvert \le 1 \\ e^{\lvert x\rvert-1}+1 & ,\ \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$$

라 하면 $\lvert t\rvert = p(f(t))$를 얻는다. $h(t) = \lvert t\rvert$라 하면 $h(t) = p(f(t))$이고 각각의 그래프는 다음과 같다.





$f(t)$에 대해 아는 정보는 역함수가 존재하는 증가함수인 것뿐이다.

2 **확인** : 겉함수 $p(x)$의 정의역은 $(-\infty,\infty)$이므로 합성함수는 잘 정의되며, 겉함수 $p(x)$의 치역은 $[0,\infty)$이고 합성함수 $h(t)$의 치역은 $[0,\infty)$이므로 $[0,\infty)\subseteq[0,\infty)$가 성립한다.

이어서 특징점의 변화를 살펴보자. $p(x)$는 간단히 $x=1$, $x=-1$에서 미분가능한 것이 확인되므로 문제되지 않는다. $p(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않고 $h(t)$도 역시 $t=0$에서 미분가능하지 않으므로, $f(t)$는 $t=0$일 때 $f(0)=0$이다.

3 **관찰** : $h(t) = p(f(t))$를 다음과 같이 해석하자.

직선 $y=h(t)$와 곡선 $y=p(x)$의 교점의 x좌표 중 하나를 $f(t)$라 하자.

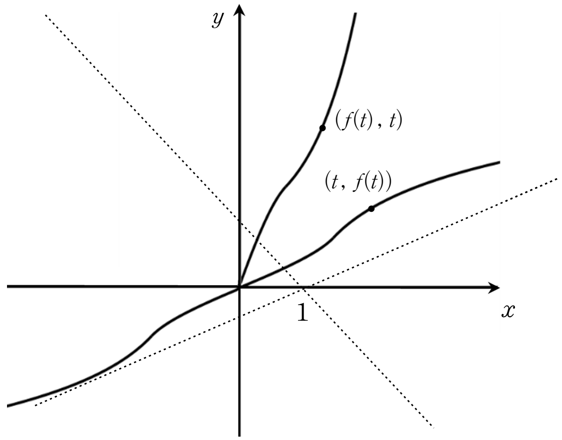
$f(t)$는 연속함수이고 증가함수이므로 (연속선택!) 실제로 $f(t)$는

직선 $y=h(t)$와 곡선 $y=p(x)$의 교점의 x좌표의 최솟값 $(t\le 0)$, **최댓값** $(t\ge 0)$

이다. 또한 실수 t에 대하여 $f(t) = -f(-t)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 이제 양의 실수 전체 집합에서 함수의 그래프를 결정하면 충분하다.

$t>0$일 때 점 $(t, f(t))$를 나타내보자. 점 $(f(t), t)$은 곡선 $y=p(x)\ (x>0)$ 위의 점이므로 $y=x$에 대하여 대칭하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 완성할 수 있다.

그래프의 정의,
변곡점의 정의



이어서 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 기울기가 m일 때 이 직선과 곡선 $y = f(x)$의 교점의 개수 $g(m)$은

$m \le 0$일 때 $g(m) = 1$ ($g(0) = 1$의 근거는 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$를 이용할 수 있다.)

$0 < m < b$일 때 $g(m) = 3$,

$m = b$일 때 $g(m) = 2$,

$m > b$일 때 $g(m) = 1$ (특히, $m = 1$일 때 변곡접선임을 확인하여라.)

이다. 이때 $a = 0$이고 b는 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 접선의 기울기이다.

다시 말해 b는 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y = -\ln(-x-1)-1$에 그은 접선의 기울기이다.

(*$e^{x-1}+1$의 역함수 $\ln(x-1)+1$을 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.)

접점의 x좌표를 k라 할 때 $(1, 0)$과 접점을 연결한 직선의 기울기와 $x = k$에서 접선의 기울기가 같으므로

$$\frac{\ln(-k-1)+1}{1-k} = \frac{1}{-k-1} = b$$

이고 $\ln b \times \dfrac{1}{b} = -\ln(-k-1) \times (-k-1) = \ln(-k-1) \times (k+1)$을 얻는다. 또한

$\ln(-k-1) = \dfrac{k-1}{k+1} - 1 = \dfrac{-2}{k+1}$로부터 $\dfrac{\ln b}{b} = -2$이다.

그러므로

$$g(a) = g(0) = 1,\ \lim_{m \to a+} g(m) = \lim_{m \to 0+} g(m) = 3,\ g(b) = 2,\ \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = 4$$

로부터 $1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$이다.

해당 문항에서는 이번 수능대비 강의에서 다룬 내용 중 다음이 활용되었다.

역함수가 정의될 조건과 특징

① **정의될 조건** : f^{-1}가 정의될 필요충분조건은 f가 일대일대응인 것이다.

② **역함수의 정의** : g가 f의 역함수이면 f의 정의역과 치역에 모두 속하는 x에 대하여 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$이다.

③ **사잇값 정리 활용** : f가 연속함수일 때, f가 일대일함수일 필요충분조건은 f가 증가함수이거나 감소함수인 것이다.

합성함수 항등식 문항 해결법

항등식 $h(x) = p(x)$가 주어졌다고 하자.

1 **재작성** : $p(x) = f(g(x))$로 작성하고, t에 대한 항등식 $h(t) = f(g(t))$으로 나타낸다. 이어서 $h(t)$, $f(x)$, $g(t)$에 대한 함수의 그래프의 **개형**을 각각 그린다. 개형이 완성되지 않더라도 알 수 있는 정보를 모두 반영하는 것으로 충분하다.

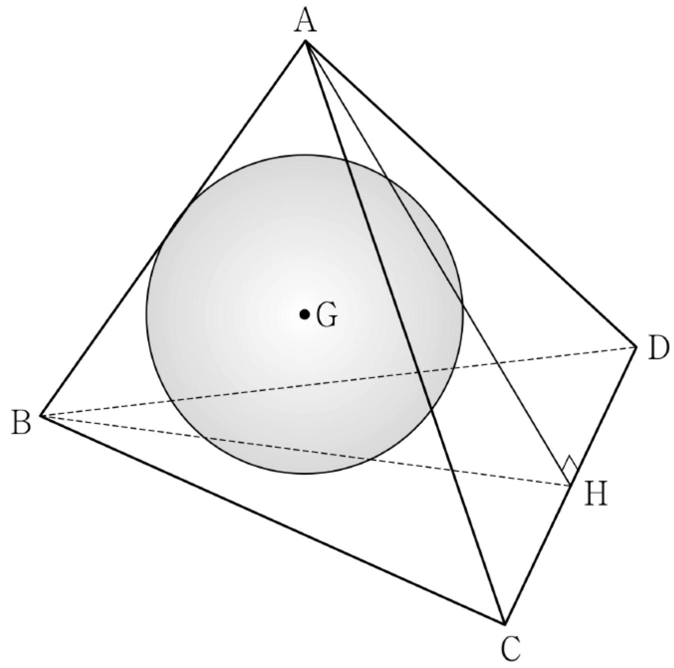
2 **확인** : 합성함수가 **정의**될 조건 / 겉함수와 합성함수의 **치역** / 겉함수와 속함수의 특징점과 합성함수의 **특징점**들 (미분가능하지 않은 점, 극점, 변곡점 등)을 모두 확인한다.

3 **관찰** : **연속선택함수**의 문제로 바꾸어 해석하면 관찰이 용이할 수 있다.

$h(t) = f(g(t))$

$\Leftrightarrow$ **직선 $y = h(t)$와 곡선 $y = f(x)$의 교점의 x좌표 중 하나를 $g(t)$라 하자.**

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{BC}=\overline{BD}=2\sqrt{5}$ 인 사면체 ABCD가 있고, 점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발 H에 대하여 두 평면 ABH와 BCD는 서로 수직이고 $\overline{AH}=4$이다.
삼각형 ABH의 무게중심을 G라 하고,
점 G를 중심으로 하고 평면 ACD에 접하는 구를 S라 하자.
$\angle APG=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 T라 할 때,
도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{\pi}{7}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{5}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

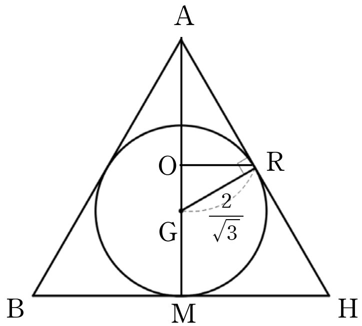
풀이 **직선과 평면의 평행과 수직의 뜻을 이해한다. 평면의 평행과 수직의 뜻을 이해한다. 정사영의 뜻을 이해한다. 삼수선의 정리를 이용하여 이면각의 크기를 구할 수 있다.**

1 **점 H의 위치 결정하기** : H는 점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발이다.
평면 ABH를 관찰하자. 점 A에서 평면 ABH와 평면 BCD의 교선인 직선 BH에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직선 AM와 직선 BH는 수직이다. 그런데 평면 ABH와 평면 BCD는 수직이므로 직선 AM은 평면 BCD에 수직이다.
그러면 $\overline{AM}\perp$(평면 BCD), $\overline{AH}\perp\overline{CD}$이므로 **삼수선의 정리**에 따라 직선 MH는 직선 CD에 수직이다. 그런데 세 점 B, M, H는 한 직선 위에 있으므로 직선 MH는 직선 BH와 같다. 그런데 삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로 수선 BH는 중선과 일치한다. 그러므로 H는 선분 CD의 중점이다.

⇨ **정보 정리** : 직선 AM은 평면 BCD에 수직이고, H는 선분 CD의 중점이다.
또한 삼각형 ABH는 이등변삼각형이므로 수선 AM은 중선과 일치하고, 그러므로 G를 지난다.

2 **구 S의 반지름 구하기** : 구 S가 평면 ACD에 접하므로, 접점이 존재한다.
이 접점을 구하기 위해, 점 G를 지나고 평면 ACD에 수직인 직선을 구해보자.
앞서 얻은 사실에 따라 선분 BH의 길이는 4이므로, 삼각형 ABH는 정삼각형이다.
그러므로 직선 BG는 선분 AH에 수직이다. 직선 BG가 선분 AH와 만나는 점을 R라 하면 $\overline{BH}\perp\overline{CD}$, $\overline{AH}\perp\overline{CD}$, $\overline{BR}\perp\overline{AH}$이므로 **삼수선의 정리**에 따라 직선 BR은 평면 ACD에 수직이다. 그러므로 구 S와 평면 ACD의 접점은 R이다.
이제 GR의 길이를 구하자. 선분 BR의 길이는 정삼각형 ABH의 높이이므로 $2\sqrt{3}$이고, G는 정삼각형 ABH의 무게중심이므로 GR의 길이는 $2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 즉, 구 S의 반지름은 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

이어서 점 R에서 직선 AG에 내린 수선의 발을 O라 하자. 그러면 O는 선분 AG를 3 : 1로 내분하는 점이다.



③ **도형 T의 정의 이해하기** :

도형 T 위의 점 P가 주어졌다고 하자. 그러면 점 P는 $\angle \mathrm{APG} = \frac{\pi}{2}$를 만족하므로 점 P는 선분 AG를 빗변으로 하는 직각삼각형의 A, G가 아닌 꼭짓점이다. 그런데 P는 구 S 위의 점이므로 구의 정의에 따라 $\overline{\mathrm{GP}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이고, 앞서 $\overline{\mathrm{AG}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$임을 확인하였으므로 $\overline{\mathrm{AP}} = 2$이고 점 P에서 직선 AG에 내린 수선의 발은 O임을 얻는다. 이때 선분 OP의 길이는 1이므로 $\overline{\mathrm{OP}} = 1$, $\overline{\mathrm{OP}} \perp$(직선 AG)이다.

반대로 구 S 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{OP}} = 1$, $\overline{\mathrm{OP}} \perp$(직선 AG)을 만족한다고 하자. 그러면 점 O는 $\overline{\mathrm{AG}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$인 선분 AG 위의 점이고 점 P는 구 S 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{GP}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$로부터 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{GP}}$이다. 즉, $\angle \mathrm{APG} = \frac{\pi}{2}$이다. 종합하면 다음을 얻는다.

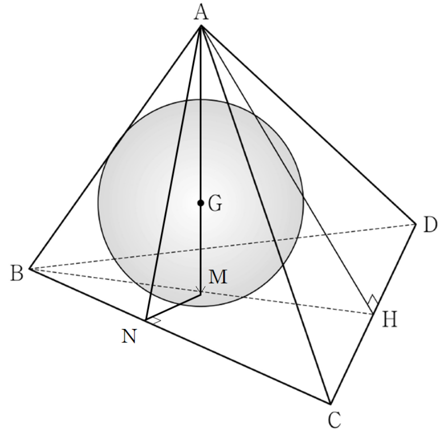
$$T = \{\mathrm{P} \in S \mid \overline{\mathrm{OP}} = 1,\ \overline{\mathrm{OP}} \perp (\text{직선 AG})\}$$

원의 정의와 **평면에 수직인 직선의 유일성**에 따라 T는 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이며 T를 포함하는 평면 α가 유일하게 존재한다. 또한 α는 직선 AG에 수직으로 만난다. 그런데 직선 AG는 직선 AM이고 앞서 직선 AM은 평면 BCD에 수직임을 얻었으므로 α는 평면 BCD에 평행하다.

⇨ **정보 정리** : 도형 T는 반지름의 길이가 1인 원이고, T를 포함하는 평면 α는 평면 BCD에 평행하다.

④ **도형 T를 포함하는 평면과 평면 ABC 가 이루는 각의 크기 나타내기** :

원 T의 넓이는 π이므로 α와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 원 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\pi\cos\theta$이다. 앞서 α는 평면 BCD에 평행하므로 θ는 평면 ABC와 평면 BCD이 이루는 각의 크기와 같다.



앞서 직선 AM은 평면 BCD에 수직이고 점 M에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}} \perp$(평면 BCD), $\overline{\mathrm{MN}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이므로 **삼수선의 정리**에 의해 선분 AN과 선분 AN와 선분 BC는 수직이다.

이면각의 정의에 따라 θ는 선분 AN과 선분 MN이 이루는 각의 크기와 같다.

⇨ **정보 정리** : 원 T를 포함하는 평면을 α라 할 때, α와 평면 ABC가 이루는 각의 크기는 직각삼각형 AMN에서 선분 AN과 선분 MN이 이루는 각의 크기와 같다.

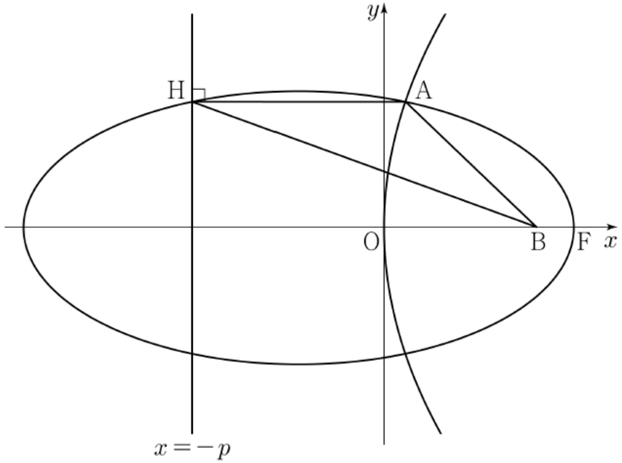
⑤ **도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이 구하기** :

삼각형 AMN은 $\overline{\mathrm{AM}} = 2\sqrt{3}$, $\angle \mathrm{AMN} = 90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{MN}}$의 길이를 이용하여 θ를 구할 수 있다. 삼각형 MBC의 넓이로부터 선분 MN의 길이를 구하자.

$$\triangle \mathrm{MBC} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BM}} \times \overline{\mathrm{CH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{MN}} \times \overline{\mathrm{BC}}$$

에서 $\overline{\mathrm{MN}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$를 얻는다. 그러면 $\tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MN}}} = \sqrt{15}$이고 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{15+1}} = \frac{1}{4}$이다. 따라서 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{4}$이다. 즉, 정답은 ④이다.

29. 그림과 같이 초점이 $\mathrm{F}(p,\,0)\,(p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 초점이 x축 위에 있고 세 점 F, A, H를 지나는 타원의 x좌표가 양수인 초점을 B라 하자. 삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$, 넓이가 $2p+12$일 때, 선분 HF의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



풀이 **포물선과 타원의 뜻을 이해하고 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.**

점 A의 좌표를 (a,b)라 하자. 그러면 A가 제1사분면의 점이므로 $a,b>0$이고 $\mathrm{H}(-p,\,b)$이다. 그러면 $\overline{\mathrm{AH}}=a+p$이고 주어진 타원의 중심은 $\left(a-\dfrac{a+p}{2},\,0\right)=\left(\dfrac{a-p}{2},\,0\right)$이다. 그러므로 주어진 타원의 장축의 길이는 $2\left(p-\dfrac{a-p}{2}\right)=3p-a$이다. 또한 삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{HB}}+\overline{\mathrm{AB}}=p+27$$

로부터 $\overline{\mathrm{HB}}+\overline{\mathrm{AB}}=27-a$이다. 한편 주어진 타원의 B가 아닌 초점을 B′라 하면 타원의 정의에 따라

$$27-a=\overline{\mathrm{HB}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{HB}}+\overline{\mathrm{HB'}}=3p-a$$

이고, $p=9$를 얻는다. $k^2=\overline{\mathrm{HF}}^2=(2p)^2+b^2=324+b^2$이고 포물선의 정의에 따라 $\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2$을 이용하면 $b^2=36a$로부터 $k^2=324+36a$이다.

이제 a의 값을 구하면 충분하다. 삼각형 AHB의 넓이가 $2p+12=30$임을 이용하자.

$$30=\triangle\mathrm{AHB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times b=\frac{1}{2}(a+p)b=\frac{(a+9)b}{2}$$

이고 $b=6\sqrt{a}\;\;(a,b>0)$이므로 $60=(a+9)\times6\sqrt{a}$이고 $\sqrt{a}=t$로 치환하면

$$10=(t^2+9)t$$

$$t^3+9t-10=0$$

을 얻는다. 그러므로 $t=1$이고 $a=1$이다. 따라서 $k^2=324+36=360$이다.

30. 좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PB}|=14$일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오.

(단, $|\overrightarrow{QB}|>0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 **벡터의 내분과 내적을 이용하여 원과 직선의 관계를 설명할 수 있다. 코사인법칙을 이용하여 도형에 관련된 문제를 해결할 수 있다.**

원의 중심을 O라 하고, 주어진 등식의 양변을 2로 나누면

$$\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\overrightarrow{PO}$$

이므로 $\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=|\overrightarrow{PQ}|^2$ 이고,

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PQ}|^2-\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PO})=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

를 얻는다. 이때 두 삼각형 OBP, OPQ가 이등변삼각형임에 따라

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\frac{1}{2}\overline{PB}\right)\times\overline{PB},\quad \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{2}\overline{PQ}\right)\times\overline{PQ}$$

이다. 그러므로 $\overline{PQ}=\overline{PB}=|\overrightarrow{PB}|=14$를 얻는다.

이어서 내적 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}$의 값을 간단히 나타내보자. 직선 PO와 직선 QB의 교점을 H라 하면 점 A의 직선 QB 위로의 정사영은 Q이고, 점 P의 직선 QB 위로의 정사영은 H이다. 즉, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\overline{QB}\times\overline{QH}=-\overline{QB}\times\left(\frac{1}{2}\overline{QB}\right)$이므로

$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=\frac{1}{2}\overline{QB}^2$이다. 선분 QB의 길이를 구해보자.

원주각의 성질에 따라 $\angle QBA=\angle QPA=\theta$로 나타낼 수 있다. 이때 $|\overrightarrow{QB}|>0$이므로 $Q\neq B$이고 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$를 얻는다. 그러면

$$\overline{QB}=\overline{AB}\cos\theta=10\sqrt{2}\cos\theta$$
$$\overline{AQ}=\overline{AB}\sin\theta=10\sqrt{2}\sin\theta$$

이다. 삼각형 PAQ에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{AQ}^2=\overline{PA}^2+\overline{PQ}^2-2\overline{PA}\,\overline{PQ}\cos\theta$$

이므로

$$200\sin^2\theta=4+196-2\times2\times14\cos\theta$$

이고 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로 정리하면 $25\cos^2\theta=7\cos\theta$를 얻는다. 한편 $\cos\theta\neq0$이므로, $\cos\theta=\frac{7}{25}$이고 $\overline{QB}=10\sqrt{2}\cos\theta=\frac{14}{5}\sqrt{2}$이다.

그러므로 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=\frac{1}{2}\overline{QB}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{14}{5}\sqrt{2}\right)^2=\frac{196}{25}$이고 $p+q=221$이다.