07 여러 가지 적분법

미적분II 교과서 Review

문제 1

$0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1)=0$이고, 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = \frac{8}{x^2 - 2x - 3}$$

일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하여라.

문제 2

모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$을 만족하는 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}\{2x - \ln g(x)\}$$

가 성립하고 $f(0)=1$일 때, $f(\ln 3)$의 값을 구하여라.

문제 3

함수 $f(x) = \int (2x-1)(x^2-x-1)^3 dx$에 대하여 $f(0) = \frac{5}{4}$일 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

문제 4

함수 $f(x) = x\sin x$에 대하여 $F(x) = \int f(x)dx$이고, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{F(x) + f'(x)}{x}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

07 여러 가지 적분법

미적분II 교과서 Review

문제 5

$x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int \ln x\,dx & (x\neq e)\\ e & (x=e)\end{cases}$$

가 $x=e$에서 연속일 때, $f(e^2)$의 값은?

① e^2-2e　② e^2-e　③ e^2　④ e^2+e　⑤ e^2+2e

문제 6

$0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\int e^x\cos x\,dx$이고, $f(0)=\frac{1}{2}$일 때, 방정식 $f(x)=\frac{\sqrt{6}}{4}e^x$을 만족하는 모든 실근의 합을 구하여라.

문제 7

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int\cos^3 x\,dx,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{3}$$

를 만족할 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

문제 8

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{\sin(\ln x)}{x}$이고 이 곡선이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때, $f(e^\pi)$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

07 여러 가지 적분법

미적분II 교과서 Review

문제 9

구간 $(0,\ 1)$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx,\ f(1)=0$$

일 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근을 큰 수부터 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하여라.

문제 10

정적분 $\int_0^3 \frac{4}{x^2+9}dx$의 값을 α라고 할 때, $\tan\alpha$의 값은?

① -1 ② 0 ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

문제 11

정적분 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$와 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 같을 때, r의 값을 구하여라.

문제 12

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족한다고 한다.

| 조 건 |

Ⅰ. $f(1)=2$
Ⅱ. 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.
Ⅲ. $f'(x)$는 연속함수이다.

이때 정적분 $\int_{-1}^{1} f'(x)(1+\tan x+\tan^3 x)dx$를 구하여라.

07 여러 가지 적분법

미적분II 교과서 Review

문제 13

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^x t\sin(x-t)\,dt$$

일 때, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

문제 14

14. 임의의 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x f(t)\,dt=x+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, $f(x)>0$)

문제 15

등식 $f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$를 만족하는 함수 $f(x)$를 구하고 그 과정을 서술하여라.

07 여러 가지 적분법

미적분II 교과서 Review

문제 16

$f(t)=\int_0^1 (e^x - tx)^2\,dx$일 때, 함수 $f(t)$는 $t=a$에서 최솟값을 갖는다. 이때 실수 a의 값을 구하여라.

문제 17

$0 \le a \le 1$인 실수 a에 대하여 정적분 $\int_0^1 |e^x - e^a|\,dx$의 값을 $f(a)$라고 하자. $f(a)$가 최소가 되도록 하는 a의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

문제 18

18. $f(x)=e^x\cos\pi x$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3} f(t)\,dt$$

07 여러 가지 적분법

미적분II 교과서 Review

문제 19

정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2+k^2}$

(2) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3}\left\{\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right\}$

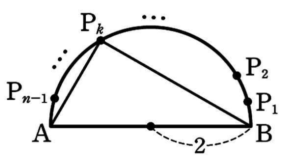
문제 20

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+\cdots+(n-1)e^{\frac{n-1}{n}}+ne}{n^2}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 21

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원의 호 AB를 n등분한 점들을 P_k $(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$라고 한다. 삼각형 ABP_k의 넓이를 S_k라고 할 때, 극한값 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$를 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)



〈정답 및 해설〉
미적분Ⅱ - 7단원. 여러 가지 적분법

1.
$2\ln 3$

2.
주어진 식의 좌변에서

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \cdots\cdots ①$$

주어진 식의 우변에서

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{d}{dx}\{2x-\ln g(x)\}$$
$$=\frac{f(x)}{g(x)}\left\{2-\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\frac{2f(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $g(x)\neq 0$이므로

$f'(x)g(x)=2f(x)g(x)$

$f'(x)=2f(x)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$

양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln f(x)=2x+C$

$f(x)=e^{2x+C}$

$f(0)=1$에서

$e^C=1$

$C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$ 이므로

$f(\ln 3)=e^{2\ln 3}=e^{\ln 3^2}=9$

3. ⑤
$x^2-x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(2x-1)(x^2-x-1)^3dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(x^2-x-1)^4+C$$

이때 $f(0)=\dfrac{5}{4}$이므로 $\quad \dfrac{1}{4}+C=\dfrac{5}{4} \quad \therefore C=1$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x^2-x-1)^4+1$$
$$\therefore f(1)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

4. ②
$f(x)=x\sin x$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x\sin x\,dx$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

이때 $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$이므로 $\quad F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+C=1$

$\therefore C=0 \quad \therefore F(x)=-x\cos x+\sin x$

한편 $f(x)=x\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{F(x)+f'(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-x\cos x+\sin x)+(\sin x+x\cos x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$$

5. ④
$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C$$
$$\therefore f(x)=\begin{cases}x\ln x-x+C & (x\neq e)\\ e & (x=e)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=e$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to e}\int\ln x\,dx=\lim_{x\to e}(x\ln x-x+C)$$
$$=C=e$$
$$\therefore f(x)=\begin{cases}x\ln x-x+e & (x\neq e)\\ e & (x=e)\end{cases}$$
$$\therefore f(e^2)=e^2\cdot\ln e^2-e^2+e$$
$$=2e^2-e^2+e$$
$$=e^2+e$$

6.
$\dfrac{\pi}{2}$

7.
$$f(x)=\int\cos^3 x\,dx$$
$$=\int\cos^2 x\cdot\cos x\,dx$$
$$=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int(1-t^2)\,dt$$
$$=t-\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{3}$에서 $C=1$이므로

$$f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+1$$

8. ②
$f'(x)=\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$이고 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int\sin t\,dt=-\cos t+C$$
$$=-\cos(\ln x)+C$$
$$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f(1)=-\cos(\ln 1)+C=1 \quad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)+2$

$$\therefore f(e^\pi)=-\cos(\ln e^\pi)+2=-\cos\pi+2=3$$

9. $\dfrac{1}{e^{\pi}-1}$

$\ln x = t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\therefore f(x)=\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx=\int \cos t dt$$
$$=\sin t + C = \sin(\ln x)+C$$

$f(1)=0$이므로

$$0+C=0$$
$$\therefore\ C=0$$
$$\therefore f(x)=\sin(\ln x)$$

$f(x)=0$에서 $\sin(\ln x)=0$

$\therefore \ln x = n\pi$ (단, n는 정수)

이때 $0<x<1$이므로

$$\ln x<0$$

따라서

$$\ln x=-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \cdots$$

이므로

$$a_1=e^{-\pi},\ a_2=e^{-2\pi},\ a_3=e^{-3\pi},\ \cdots$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $e^{-\pi}$, 공비가 $e^{-\pi}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{e^{\pi}-1}$$

10.

$x=3\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^3 \frac{4}{x^2+9}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{9\tan^2\theta+9}\cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{9\sec^2\theta}\cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{3}$$

즉, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

따라서 ⑤이다.

11. $\dfrac{1}{2}$

12. 4

13. ③

14.

$\int_0^x f(t)\,dt=x+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$에서

$$\int_0^x f(t)\,dt=x+x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=1+\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$$
$$f(x)=1+\int_0^x f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

또 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=f(x)$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1$$

양변을 x에 대하여 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int dx$$
$$\ln f(x)=x+C$$
$$f(x)=e^{x+C}$$

①에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$이므로

$$C=0$$

따라서 $f(x)=e^x$이므로

$$f(1)=e$$

15.

$f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$에서

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=a$로 놓으면

$f(x)=\sin x+3a$이다.

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+3a)\cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos x\,dx$$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\,dx=dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$,

$x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos x\,dx$$
$$=\int_0^1 t\,dt+[3a\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+3a=\frac{1}{2}+3a$$

$a=\dfrac{1}{2}+3a$이므로 $a=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\sin x-\dfrac{3}{4}$

16.

$$f(t)=\int_0^1(e^x-tx)^2dx=\int_0^1(e^{2x}-2txe^x+t^2x^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-2t\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\right)+\left[\frac{1}{3}t^2x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}t^2-2t+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(t-3)^2+\frac{e^2}{2}-\frac{7}{2}$$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=3$일 때, 최솟값

$\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{7}{2}$을 갖는다. 즉, $a=3$

17.

$|e^x - e^a| = \begin{cases} -e^x + e^a & (x \le a) \\ e^x - e^a & (x \ge a) \end{cases}$이므로

$f(a) = \int_0^1 |e^x - e^a|\,dx$

$= \int_0^a (-e^x + e^a)\,dx + \int_a^1 (e^x - e^a)\,dx$

$= \Big[-e^x + e^a x\Big]_0^a + \Big[e^x - e^a x\Big]_a^1$

$= (2a-3)e^a + e + 1$

양변을 a에 대하여 미분하면

$f'(a) = 2e^a + (2a-3)e^a = (2a-1)e^a$

$f'(a) = 0$에서 $a = \frac{1}{2}$

따라서 $a = \frac{1}{2}$에서 $f(a)$는 극소이면서 최소이므로 구하는 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

18. $-3e$

19.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}$

$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} = 2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx$

$t = 1 + x^2$으로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$

$x = 0$일 때 $t = 1$, $x = 1$일 때 $t = 2$이므로

$2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx = 2\int_1^2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^2 = \ln 2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\sqrt{n^2-1^2} + 2\sqrt{n^2-2^2}\right.$

$\left. + \cdots + (n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k\sqrt{n^2-k^2}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$t = 1 - x^2$으로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -2x$

$x = 0$일 때 $t = 1$, $x = 1$일 때 $t = 0$이므로

$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^0\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

20. ①

(주어진 식)$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot k\cdot e^{\frac{k}{n}}$

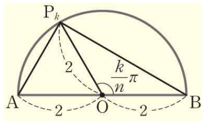
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}}$

$= \int_0^1 xe^x\,dx$

$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$= e - \left[e^x\right]_0^1 = 1$

21.



반원의 호 AB를 n등분한 점들이 P_k이므로

$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OB} = \frac{k}{n}\pi$

따라서 삼각형 ABP_k의 넓이 S_k는

$S_k = (\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{OB}$의 넓이$) + (\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{OA}$의 넓이$)$

$= \frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{k}{n}\pi + \frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\left(\pi - \frac{k}{n}\pi\right)$

$= 4\sin\frac{k}{n}\pi$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k}{n}\pi$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k}{n}\pi\times\frac{1}{n}$

이때 $f(x) = \sin\pi x$, $a = 0$, $b = 1$이라고 하면

$\Delta x = \frac{1-0}{n}$, $x_k = 0 + k\times\frac{1}{n}$이므로

(주어진 식)$= 4\int_0^1\sin\pi x\,dx = \frac{4}{\pi}\Big[-\cos\pi x\Big]_0^1$

$= \frac{4}{\pi}(1+1) = \frac{8}{\pi}$