[1] 랑데뷰 분석서 261128(미) STEP-1

곡선 $y=\frac{x^2}{x+1}$에 대하여 $\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} xdy$의 값은?

① $\frac{31}{12}-\ln\frac{4}{3}$ ② $\frac{8}{3}-\ln\frac{4}{3}$ ③ $\frac{11}{4}-\ln\frac{4}{3}$

④ $\frac{31}{12}-\ln 2$ ⑤ $\frac{8}{3}-\ln 2$

1) 정답 ①

[그림 : 최성훈T]

주어진 적분은 y에 대한 적분이므로, 적분 구간의 위끝과 아래끝에 대응하는 x의 값을 먼저 구하자.

(i) $y=\frac{4}{3}$일 때

$\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}$

$3x^2=4(x+1)$

$3x^2-4x-4=0$

$(3x+2)(x-2)=0$

$x>0$이므로 $x=2$이다.

(ii) $y=\frac{9}{4}$일 때

$\frac{x^2}{x+1}=\frac{9}{4}$

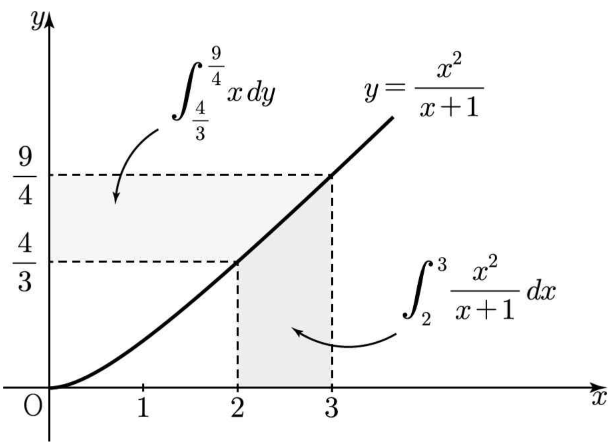
$4x^2=9(x+1)$

$4x^2-9x-9=0$

$(4x+3)(x-3)=0$

$x>0$이므로 $x=3$이다.

(i), (ii)에서 $\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} xdy$의 값은 다음 그림과 같다.



$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} xdy$

$=3\times\frac{9}{4}-2\times\frac{4}{3}-\int_2^3 \frac{x^2}{x+1}dx$

$$=\frac{37}{4}-\frac{8}{3}-\int_2^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{49}{12}-\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_2^3$$

$$=\frac{49}{12}-\left(\frac{5}{2}-1+\ln\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{31}{12}-\ln\frac{4}{3}$$

이다.

[다른 풀이]-1

$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} xdy$의 값을 구하기 위해 $\int xdy = xy-\int ydx \cdots\cdots$ ㉠ 관계식을 이용한다.

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} xdy = \Big[xy\Big]_{x=2,\,y=\frac{4}{3}}^{x=3,\,y=\frac{9}{4}}-\int_2^3 ydx$$

에서

$$\Big[xy\Big]_2^3=\left(3\times\frac{9}{4}\right)-\left(2\times\frac{4}{3}\right)=\frac{27}{4}-\frac{8}{3}=\frac{81-32}{12}=\frac{49}{12}$$

$$\int_2^3 ydx=\int_2^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}$$

따라서 $\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} xdy=\frac{31}{12}-\ln\frac{4}{3}$

[랑데뷰팁] ㉠증명 (young's법칙)

두 변수 x, y에 대하여, 두 변수의 곱 xy의 미분 $d(xy)$는 다음과 같다.

$$d(xy)=xdy+ydx$$

이 식을 우변의 xdy에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$xdy=d(xy)-ydx$$

이제 양변에 적분 기호를 취하면 다음과 같다.

$$\int xdy=\int(d(xy)-ydx)$$

$$\int xdy=\int d(xy)-\int ydx$$

이때, 미분과 적분의 역연산 관계에 의해 $\int d(xy)=xy$이다. (적분상수는 생략)

따라서 위 식을 정리하면 최종적으로 문제의 등식이 유도된다.

$$\therefore \int xdy = xy-\int ydx$$

이 공식은 기하학적으로 직사각형의 전체 넓이(xy)에서 x축에 대한 적분 넓이($\int ydx$)를 빼면 y축에 대한 적분 넓이($\int xdy$)가 남는다는 것을 의미한다.

[공식 암기]

$$xy=\int x\,dy+\int y\,dx$$

[다른 풀이]-2 [부분적분법]

$y=\dfrac{x^2}{x+1}$을 만족시키는 $x=g(y)$라 하면

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} x\,dy=\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} g(y)\,dy=\Big[yg(y)\Big]_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}}-\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} yg'(y)\,dy$$

$$=\frac{9}{4}g\left(\frac{9}{4}\right)-\frac{4}{3}g\left(\frac{4}{3}\right)-\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} y\,dx\ \left(\because g'(y)=\frac{dx}{dy}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{4}\times 3\right)-\left(\frac{4}{3}\times 2\right)-\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{9}{4}} \frac{x^2}{x+1}\,dx\ \left(\because g\left(\frac{9}{4}\right)=3,\ g\left(\frac{4}{3}\right)=2\right)$$

(이하 생략)