〈 공통 〉

01

[풀이]

$9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = 3^0 = 3$

답 ①

02

[풀이]

$f'(x) = 9x^2 + 4$

이므로

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= f'(1) = 13$

답 ④

03

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$\sum_{k=1}^{4}(2a_k - k) = 2\sum_{k=1}^{4}a_k - \sum_{k=1}^{4}k$

$= 2\sum_{k=1}^{4}a_k - \frac{4\times5}{2} = 0$

$\therefore \sum_{k=1}^{4}a_k = 5$

답 ⑤

04

[풀이]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x) = f(1)$, 즉 $1 = -2 + a$

$\therefore a = 3$

답 ③

05

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 2x^2 - x - 2 + (x+2)(4x-1)$

$\therefore f'(1) = -1 + 3\times3 = 8$

답 ③

06

[풀이1]

$\log_a b = 3 \Leftrightarrow b = a^3$

$\log_3\frac{b}{a} = \log_3\frac{a^3}{a} = \log_3 a^2 = \frac{1}{2}$,

$a^2 = 3^{\frac{1}{2}}$, $a = 3^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \log_9 ab = \log_9 a^4 = \log_9 3 = \frac{1}{2}$

답 ②

[풀이2]

$\log_3 a = A$, $\log_3 b = B$로 두자.

$\log_a b = \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = \frac{B}{A} = 3$, 즉 $B = 3A$

$\log_3\frac{b}{a} = \log_3 b - \log_3 a = B - A = \frac{1}{2}$

위의 두 등식을 연립하면

$3A - A = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$

$\therefore \log_9 ab = \log_{3^2} ab = \frac{1}{2}\log_3 ab$

$= \frac{1}{2}\times(\log_3 a + \log_3 b)$

$= \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}$

답 ②

07

[풀이]

구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_0^2\left\{x^2+3-\left(-\frac{1}{5}x^2+3\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^2\frac{6}{5}x^2dx=\frac{6}{5}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{5}$$

답 ⑤

08

[풀이]

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0$, 즉 $\cos\theta<0$

θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

문제에서 주어진 등식

$\sin\theta+3\cos\theta=0$

의 양변을 $\cos\theta(\neq 0)$으로 나누어 정리하면

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+3=0$, 즉 $\tan\theta=-3$

θ는 제2사분면의 각이다.

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 ①

09

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+6ax-9a^2=3(x+3a)(x-a)$

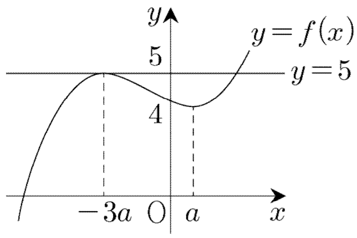
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3a$ 또는 $x=a$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는

$x=-3a(<0)$에서 극댓값을 갖고,

$x=a(>0)$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서

$f(-3a)=27a^3+4=5$, $a=\dfrac{1}{3}$,

$f(x)=x^3+x^2-x+4$

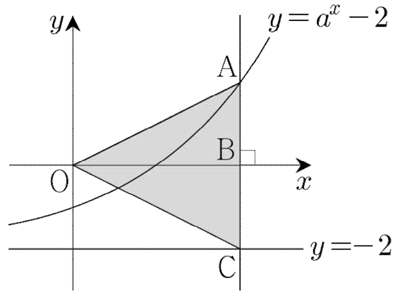
$\therefore\ f(2)=14$

답 ④

10

[풀이]

곡선 $y=a^x-2$의 점근선은 $y=-2$이다.



점 A의 x좌표를 t라고 하면

$\mathrm{A}(t,\ a^t-2)$, $\mathrm{B}(t,\ 0)$, $\mathrm{C}(t,\ -2)$

문제에서 주어진 조건에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, 즉 $a^t-2=2$, $a^t=4$

($\triangle$AOC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times t\times 4=8$, $t=4$

$a^4=4$에서 $a=2^{2\times\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ a\times\overline{\mathrm{OB}}=2^{\frac{1}{2}}\times 4=2^{\frac{5}{2}}$

답 ③

11

[풀이]

점 P의 시각 $t(\geq 0)$에서의 위치를 $x(t)$라고 하면

$x(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{k}{2}t^2+4t$ $(\because x(0)=0)$

ㄱ. (참)

$k=0$일 때, $x(t)=\frac{1}{3}t^3+4t$

$\therefore\ x(1)=\frac{13}{3}$

ㄴ. (거짓)

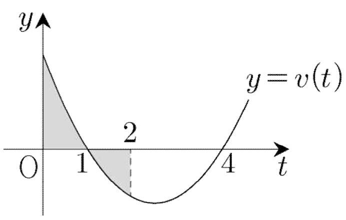
$k=3$일 때,

$v(t)=t^2-3t+4=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

이므로 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.

ㄷ. (참)

$k=5$일 때, $v(t)=t^2-5t+4$



움직인 거리를 d라고 하면

$d=\int_0^2 |v(t)|dt$

$=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2 (-v(t))dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^2$

$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

12

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(\neq 0)$이라고 하자.

$(\because r=0$이면 문제에서 주어진 등식을 만족시키지 않는다.)

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$2(a_1+a_1r^3+a_1r^6)=a_1r^3+a_1r^6+a_1r^9=6$, 즉

$2a_1(1+r^3+r^6)=6(\cdots㉠)$, $a_1r^3(1+r^3+r^6)=6$

위의 두 등식을 변변히 나누면

$\frac{r^3}{2}=1$, 즉 $r^3=2$

㉠에 대입하면

$2a_1(1+2+4)=6$, $a_1=\frac{3}{7}$

$\therefore\ a_{10}=a_1(r^3)^3=\frac{3}{7}\times 8=\frac{24}{7}$

답 ②

13

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x-4$이고, $f'(1)=-2$이므로

l: $y=-2(x-1)-6=-2x-4$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$

이고,

$g'(1)=1\times(-6)+(-1)(-2)=-4$

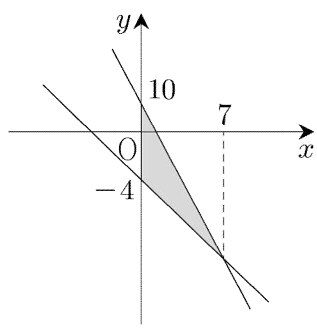
이므로

m: $y=-4(x-1)+6=-4x+10$

두 직선 l, m의 방정식을 연립하면

$-2x-4=-4x+10$, $x=7$

두 직선 l, m을 한 평면에 그리자.



구하는 도형(삼각형)의 넓이를 S라고 하면

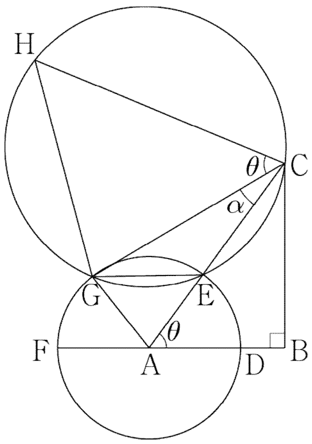
$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times 14\times 7=49$

답 ⑤

14

[풀이]

$\angle \mathrm{CAB}=\angle \mathrm{GCH}=\theta$, $\angle \mathrm{ECG}=\alpha$로 두자.



직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

네 점 D, E, G, F는 중심이 A이고,

반지름의 길이가 $2(=\overline{\mathrm{AD}})$인 원 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}=2$이고, $\overline{\mathrm{EC}}=5-2=3$

삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{5^2+(2\sqrt{6})^2-2^2}{2\times 5\times 2\sqrt{6}}=\frac{9}{4\sqrt{6}}$$

이제 $\overline{\mathrm{GE}}=t$로 두자.

삼각형 ECG에서 코사인법칙에 의하여

$t^2=3^2+(2\sqrt{6})^2-2\times 3\times 2\sqrt{6}\times\cos\alpha$,

$t=\sqrt{6}$

큰 원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

두 삼각형 ECG, GCH 각각에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{6}}{\sin\alpha}=2R$, $\frac{\overline{\mathrm{GH}}}{\sin\theta}=2R$, 즉

$$R=\frac{\sqrt{6}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{GH}}=2\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{4}{5}=\frac{32\sqrt{15}}{25}$

답 ④

15

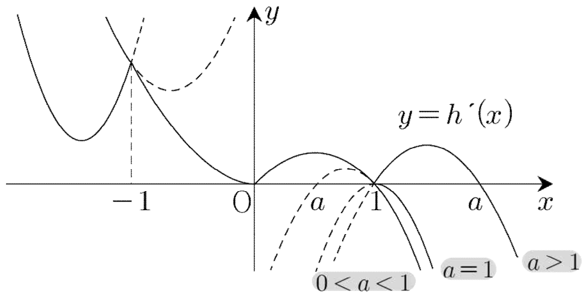
[풀이]

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=g(x)-f(x)$

$$=\begin{cases} x^2+ax+a & (x<-1) \\ -x^2+x & (-1\le x<1) \\ -(x-1)(x-a) & (x\ge 1) \end{cases}$$

함수 $h'(x)$의 그래프는



$0<a\le 1$일 때, $x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

$a>1$일 때, $x=a$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (그리고 $x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호는 바뀌지 않으므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.)

정리하면 함수 $h(x)$는

$x=1(0<a\le 1)$ 또는 $x=a(a>1)$

에서 극값을 갖는다.

함수 $h(x)$는 오직 하나의 극값을 가지므로

$x<0$일 때, $h'(x)\ge 0$

이어야 한다.

$x<0$일 때,

$h'(x)=x^2+ax+a=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a$

에서 대칭축은 $x=-\frac{a}{2}$이다.

$-\frac{a}{2}>-1$ $(0<a<2)$이면

$x<0$일 때, $h'(x)\geq 0$

$-\frac{a}{2}\leq -1$ $(a\geq 2)$이면

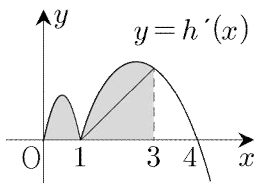
$x<0$일 때, $h'(x)\geq 0$일 필요충분조건은

$D\leq 0$, 즉 $a^2-4a\leq 0$, $2\leq a\leq 4$ $(\because a\geq 2)$

(이때, D는 $h'(x)=0$의 판별식이다.)

이상에서

$0<a\leq 4$, $k=4$



$h(3)=\int_0^3\{g(t)-f(t)\}dt$

$=\int_0^1(t-t^2)dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)dt$

$=\frac{1}{6}\times 1^3+\frac{1}{6}\times 2^3+\frac{1}{2}\times 2\times 2$

$=\frac{7}{2}$

$\therefore$ $k+h(3)=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$

답 ④

16

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_2=1^2\times a_1+1=2$,

$a_3=2^2\times a_2+1=9$

$\therefore$ $a_3=9$

답 9

17

[풀이]

$F(x)=\int f(x)dx=x^4-x^2+C$

(단, C는 적분상수)

$F(0)=C=4$

이므로

$F(x)=x^4-x^2+4$

$\therefore$ $F(2)=16$

답 16

18

[풀이]

$\sin(\angle \mathrm{BAC})=\frac{4}{5}$

이므로

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 5\times 6\times\frac{4}{5}=12$

답 12

19

[풀이]

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

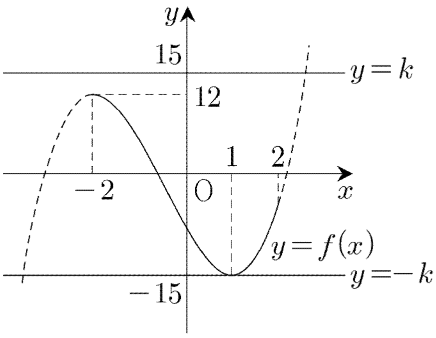
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ 또는 $x=1$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값 12를 갖고,

$x=1$에서 극솟값 -15를 갖는다.

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서

$-k\le -15$, 즉 $k\ge 15$

이므로 k의 최솟값은 15이다.

답 15

20

[풀이]

[과정]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$$

이므로

a_{n+1}

$$=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)+10$$

$$-\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{6}n^2+\frac{1}{6}n-10$$

$$=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{\frac{n}{3}} \qquad \cdots(*)$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{\frac{n}{3}} \qquad \cdots ㉠$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\ (n\ge 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_1+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{4}{6}-\frac{2}{6}+10$$

$$a_2=\boxed{10} \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_{12}+(a_3+a_5+\cdots+a_{11})$$

$$=a_1+a_2+2(a_3+a_5+\cdots+a_{11})$$

$$+(a_4+a_6+\cdots+a_{12})$$

$$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$

$$=7+10+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)$$

($\because$ (*): $2a_n+a_{n+1}=n$,

이 등식의 n 자리에 $2k+1$을 대입하면

$2a_{2k+1}+a_{2k+2}=2k+1$)

$$=17+\frac{3+11}{2}\times 5$$

$$=\boxed{52}$$

이다.

(가): $f(n)=\dfrac{n}{3}$

(나): $p=10$

(다): $q=52$

$$\therefore\ \frac{p\times q}{f(12)}=\frac{10\times 52}{\frac{12}{3}}=130$$

답 130

21

[풀이1]

함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to t-}g(x)=g(t)$, 즉 $-f(t)=f(t)$

$\therefore\ f(t)=0$

(가):

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

($\because g(0)=0$이면 $-f(0)=0$ 또는 $f(0)=0$

이므로 $f(0)=0$)

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(2)=2 \Leftrightarrow f(2)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=px(x-2)(x-\alpha)$ (단, $p>0$, α는 상수)

그런데 $f(t)=0$이므로

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=\alpha$

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}-px(x-2)(x-\alpha) & (x<t)\\ px(x-2)(x-\alpha) & (x\ge t)\end{cases}$$

(나):

$g(-1)$, $-\dfrac{7}{2}g(1)$은 모두 자연수이므로

$g(-1)>0$, $g(1)<0$

$m=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=-g(1)>0$$

이므로 $m\ne 1$

$m=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$=\dfrac{1}{2}\times$(함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 우미분계수)$\cdots$(*)

의 부호는 아직 결정할 수 없다.

$m\ge 3$일 때,

$$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{g(m)}{m(m-2)}$$

$m(m-2)>0$이므로 $g(m)<0$인

자연수 $m(\ge 3)$이 1개 또는 2개 있어야 한다.

전자는 (*)<0인 경우, 후자는 (*)>0인 경우이다.

다시 말하면

전자: $2\in\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$ $\cdots$(경우1)

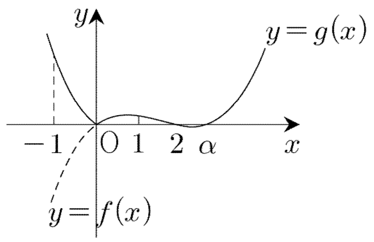
후자: $2\notin\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$ $\cdots$(경우2)

그런데 $\alpha\le 2$이면

$x\ge 2$일 때, $g(x)\ge 0$

이므로 $\alpha>2$이어야 한다.

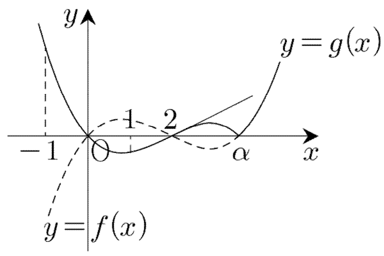
- $t=0$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



$g(1)>0$이므로

$g(1)<0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

- $t=\alpha$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



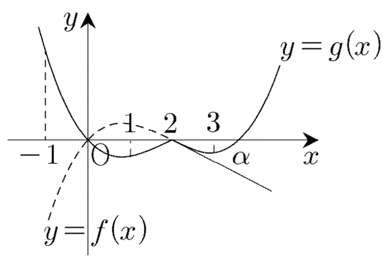
(*)>0이므로 $m\ne 2$, 즉

$2\notin\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

그런데 $m\ge 3$일 때, $g(m)\ge 0$이므로

(경우2)를 만족시키지 않는다.

- $t=2$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



$g(-1)>0$, $g(1)<0$,

(함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 우미분계수)<0

의 조건을 만족시킨다. 즉, (경우1)이다.

이때, $3<\alpha\le 4$

$\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}=\{2,\ 3\}$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

$g(-1)=2,\ -\dfrac{7}{2}g(1)=3$ $\cdots$㉠

$g(-1)=3,\ -\dfrac{7}{2}g(1)=2$ $\cdots$㉡

㉠:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=2,$

$-\dfrac{7}{2}g(1)=-\dfrac{7}{2}p(1-\alpha)=3$

연립방정식을 풀면

$\alpha=-8(<0)$ $(\times)$

㉡:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=3,$

$-\dfrac{7}{2}g(1)=-\dfrac{7}{2}p(1-\alpha)=2$

연립방정식을 풀면

$\alpha=\dfrac{11}{3},\ p=\dfrac{3}{14},$

$f(x)=\dfrac{3}{14}x(x-2)\left(x-\dfrac{11}{3}\right)$

$\therefore\ g(-5)=-\dfrac{3}{14}(-5)(-7)\left(-\dfrac{26}{3}\right)$

$=65$

답 65

[풀이2]

함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to t-}g(x)=g(t)$, 즉 $-f(t)=f(t)$

$\therefore\ f(t)=0$

(가):

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

($\because g(0)=0$이면 $-f(0)=0$ 또는 $f(0)=0$ 이므로 $f(0)=0$)

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 극한값이 존재하므로

$g(2)=2 \Leftrightarrow f(2)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=px(x-2)(x-\alpha)$ (단, α는 상수)

그런데 $f(t)=0$이므로

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=\alpha$

(나):

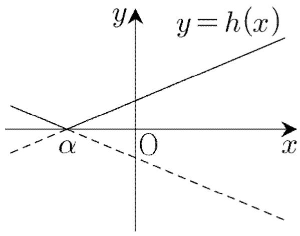
$h(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-2)}=\begin{cases}-p(x-\alpha) & (x<t)\\ p(x-\alpha) & (x\ge t)\end{cases}$

로 두자.

$\lim\limits_{x\to m+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to m+}h(x)$ $\cdots(*)$

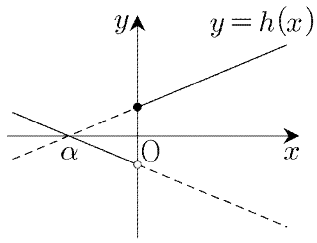
(1) $\alpha<0$인 경우

$t=\alpha$일 때,

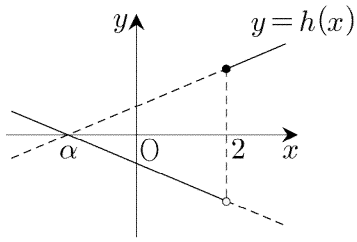


(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

$t=0$일 때,



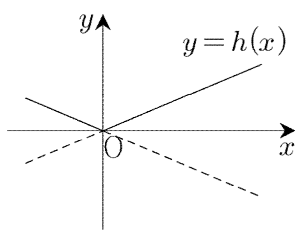
(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 1뿐이다.

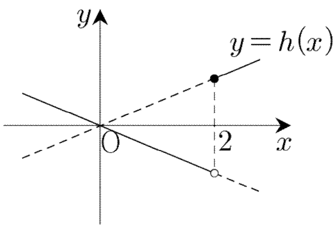
(2) $\alpha=0$인 경우

$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

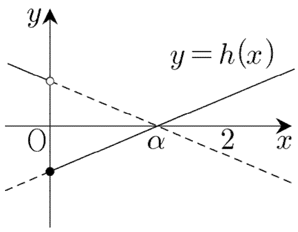
$t=2$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 1뿐이다.

(3) $0<\alpha<2$인 경우

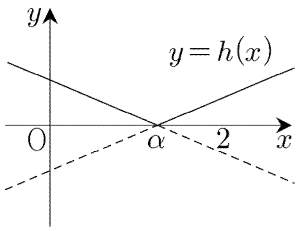
$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 없거나, 1뿐이다.

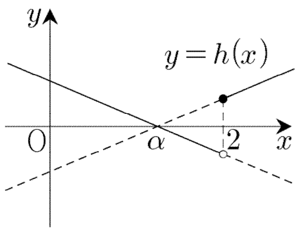
(전자: $0<\alpha\le 1$, 후자: $1<\alpha<2$)

$t=\alpha$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

$t=2$일 때,

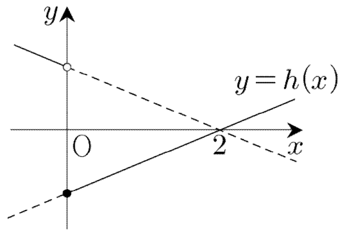


(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 없거나, 1뿐이다.

(전자: $1<\alpha<2$, 후자: $0<\alpha\le 1$)

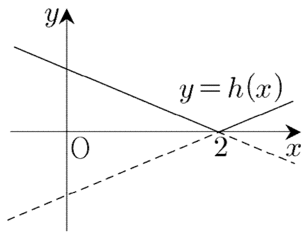
(4) $\alpha=2$인 경우

$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 1뿐이다.

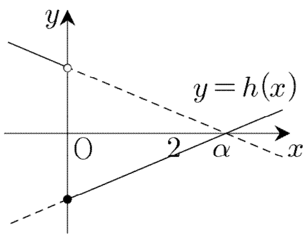
$t=\alpha$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(5) $\alpha>2$인 경우

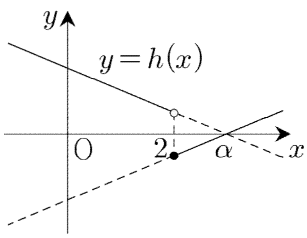
$t=0$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m의 개수는 2이다.

$\Leftrightarrow m=1,\ 2\ \&\ 2<\alpha\le 3$ $\cdots$(경우1)

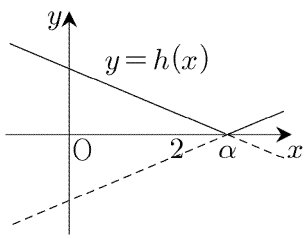
$t=2$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m의 개수는 2이다.

$\Leftrightarrow m=2,\ 3\ \&\ 3<\alpha\le 4$ $\cdots$(경우2)

$t=\alpha$일 때,



(*)의 값이 음수가 되는 자연수 m은 존재하지 않는다.
이상에서 (경우1), (경우2)만을 따지면 된다.

한편 두 자연수 $g(-1)$, $-\dfrac{7}{2}g(1)$은 양수이므로

$g(-1)>0$, $g(1)<0$

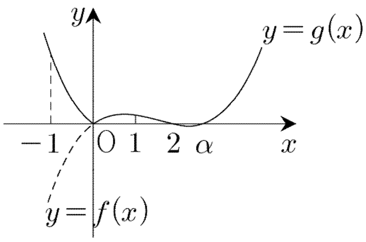
(경우1)

함수

$$g(x)=\begin{cases}-px(x-2)(x-\alpha) & (x<0)\\ px(x-2)(x-\alpha) & (x\ge 0)\end{cases}$$

(단, $2<\alpha\le 3$)

의 그래프는



위의 그래프에서 $g(1)>0$이므로

$g(1)<0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

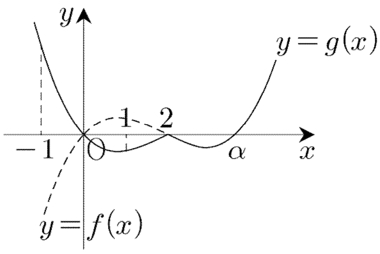
(경우2)

함수

$$g(x)=\begin{cases}-px(x-2)(x-\alpha) & (x<2)\\ px(x-2)(x-\alpha) & (x\ge 2)\end{cases}$$

(단, $3<\alpha\le 4$)

의 그래프는



이 경우가 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.

$\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}=\{2,\ 3\}$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

$g(-1)=2$, $-\dfrac{7}{2}g(1)=3$ …㉠

$g(-1)=3$, $-\dfrac{7}{2}g(1)=2$ …㉡

㉠:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=2$,

$-\dfrac{7}{2}g(1)=-\dfrac{7}{2}p(1-\alpha)=3$

연립방정식을 풀면

$\alpha=-8(<0)$ (×)

㉡:

$g(-1)=3p(1+\alpha)=3$,

$-\dfrac{7}{2}g(1)=-\dfrac{7}{2}p(1-\alpha)=2$

연립방정식을 풀면

$\alpha=\dfrac{11}{3}$, $p=\dfrac{3}{14}$,

$f(x)=\dfrac{3}{14}x(x-2)\left(x-\dfrac{11}{3}\right)$

$\therefore\ g(-5)=-\dfrac{3}{14}(-5)(-7)\left(-\dfrac{26}{3}\right)$

$=65$

답 65

22

[풀이]

우선 함수 $y=\log_{16}(8x+2)$의 역함수를 유도하자.

$x=\log_{16}(8y+2)$, $8y+2=2^{4x}$ …㉠

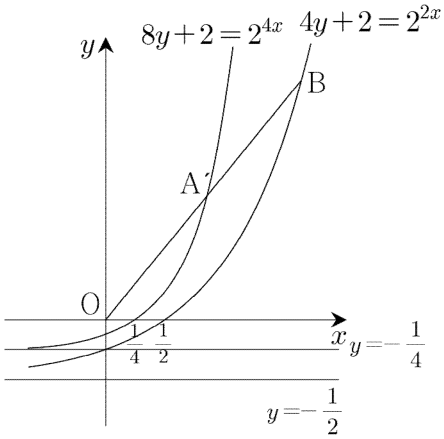
함수 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$의 방정식을 정리하면

$4y+2=2^{2x}$ …㉡

㉡의 x자리, y자리에 각각 $2x$, $2y$를 대입하면 ㉠과 일치한다.

따라서 ㉠은 ㉡을 원점에 대하여 $\dfrac{1}{2}$배 축소한 것과 일치한다. (아래 그림)

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 $\mathrm{A}'(b,\ a)$라고 하자.



위의 그림에서

$\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA'}}$

이므로 $\mathrm{B}(2b,\ 2a)$이다.

선분 AB의 중점은 $\left(\dfrac{a+2b}{2},\ \dfrac{2a+b}{2}\right)$이므로

$\dfrac{a+2b}{2}=\dfrac{77}{8},\ \dfrac{2a+b}{2}=\dfrac{133}{8}$

연립하면

$a=\dfrac{63}{4},\ b=\dfrac{7}{4}$

$\dfrac{q}{p}=a\times b=\dfrac{63}{4}\times\dfrac{7}{4}=\dfrac{441}{16}$

$\therefore\ p+q=457$

답 457

〈 확률과 통계 〉

23

[풀이]

중복순열의 수에 의하여

${}_4\Pi_3=4^3=64$

답 ③

24

[풀이]

확률의 곱셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{2}{5}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{10}=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{10}$

답 ①

25

[풀이]

꺼낸 두 개의 공의 색이 서로 같을 사건을 A,

꺼낸 두 개의 공에 적힌 수가 같을 사건을 B

라고 하자. 이때, $A\cap B=\varnothing$

구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}+\dfrac{4}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{20}{45}+\dfrac{4}{45}=\dfrac{8}{15}$

답 ②

26

[풀이]

$a-1.2=2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}$,

$\therefore\ a=5.5$

답 ⑤

27

[풀이]

확률질량함수의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1+1+3+5}{12}+a=1,\ a=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}$

$+3\times\frac{5}{12}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{12}+1^2\times\frac{1}{12}+2^2\times\frac{1}{4}$

$+3^2\times\frac{5}{12}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{15}{2}$,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\therefore\ \mathrm{V}\left(\frac{1}{a}X\right)=\frac{1}{a^2}V(X)=36\times\frac{5}{4}=45$

답 ④

28

[풀이]

2의 약수는 1, 2,

4의 약수는 1, 2, 4,

6의 약수는 1, 2, 3, 6

이므로 k의 값에 따라서 공이 들어가는 상자를 표시하면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	6	합
1	○		○		○		3(홀)
2	○	○					2(짝)
3	○		○		○		3(홀)
4	○	○		○			3(홀)
5	○		○		○		3(홀)
6	○	○	○			○	4(짝)

전체를 다음의 두 경우로 구분할 수 있다.

홀+짝+짝+짝=홀 $\cdots$(경우1)

홀+홀+홀+짝=홀, $\cdots$(경우2)

예를 들어 k의 값이 4, 2, 6, 2의 순서대로 나오면 (경우1)에 해당하고,

k의 값이 1, 3, 3, 2의 순서대로 나오면 (경우2)에 해당한다.

이제 주사위를 한 번 던져서

1, 3, 4, 5가 나올 확률을 p,

2, 6이 나올 확률을 $q(=1-p)$라고 하면

$p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}$

• (경우1)

확률은

${}_4\mathrm{C}_1pq^3=\frac{8}{81}$

3이 적힌 상자에 들어있는 공의 개수가

2가 적힌 상자에 들어있는 공의 개수보다

1개 더 많을 경우를 모두 찾자.

2가 적힌 상자에는 공이 최소한 3개 이상 들어간다.

3개(상자2), 4개(상자3): k의 값으로

$\underbrace{(1,\ 3,\ 5)}_{\text{한 개 선택}},\ 6,\ 6,\ 6$

이 나오면 된다.

(예를 들어 6, 6, 3, 6,
5, 6, 6, 6, ⋯)
이때, 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}=\frac{1}{108}$$

- (경우2)

확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{3}p^{3}q=\frac{32}{81}$$

3이 적힌 상자에 들어있는 공의 개수가
2가 적힌 상자에 들어있는 공의 개수보다
1개 더 많을 경우를 모두 찾자.
2가 적힌 상자에는 공이 최소한 1개 이상 들어간다.
1개(상자2), 2개(상자3): ×
(∵ 예를 들어 k의 값이 1, 3, 4, 2가 나오면
3이 적힌 상자에는 공이 2개 들어가고,
2가 적힌 상자에는 공이 2개 들어간다.)
2개(상자2), 3개(상자3): k의 값으로

$$\underbrace{(1,\ 3,\ 5)}_{\text{한 개 선택}},\underbrace{(1,\ 3,\ 5)}_{\text{한 개 선택}},\ 4,\ 6$$

이 나오면 된다. (예를 들어 3, 5, 4, 6
5, 6, 4, 1, ⋯)
3개(상자2), 4개(상자3): ×
(∵ 예를 들어 k의 값이 1, 3, 5, 6이 나오면
3이 적힌 상자에는 공이 4개 들어가고,
2가 적힌 상자에는 공이 1개 들어간다.)
이때, 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}\times 2!\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{108}+\frac{1}{12}}{\frac{8}{81}+\frac{32}{81}}=\frac{3}{16}$$

답 ②

29

[풀이]
기록한 수가 3일 사건의 확률을 p라고 하자.

$$p=\frac{a}{6}\times{}_{5}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{6-a}{6}\times{}_{3}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$=\frac{a+4}{32}$$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(19200,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=19200\times p=4800$, $p=\frac{1}{4}$, 즉

$\frac{a+4}{32}=\frac{1}{4}$에서 $a=4$

$$\mathrm{V}(X)=npq=19200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=3600=60^{2}$$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(4800,\ 60^{2})$을 따른다.

$Z=\frac{X-4800}{60}$로 두면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^{2})$을 따른다.

$$k=\mathrm{P}(X\le 4800+30a)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)$$

$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$

$$=0.5+0.477=0.977$$

$$\therefore\ 1000\times k=977$$

답 977

30

[풀이]
(가):
다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

$8=1+1+1+1+2+2$ ⋯(경우1)

$8=1+1+1+1+1+1+2$ ⋯(경우2)

- (경우1)

공이 들어 가지 않는 상자의 개수는 4이다.
이때, 이 네 상자를 □라고 하자.
↓□↓□↓□↓□↓
↓에 2개의 공이 담긴 상자 2개가 올 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2 = 10$

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

⇣□2□⇣□⇣□2

⇣에 1개의 공이 담긴 상자가 올 경우의 수는

방정식

$a+b+c=4$

(단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

의 해의 개수와 같다.

(즉, (a개)□2□(b개)□(c개)□2)

위의 방정식의 해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$

따라서 경우의 수는

$10 \times 15 = 150$

- (경우2)

공이 들어 가지 않는 상자의 개수는 3이다.

⇣□⇣□⇣□⇣

⇣에 2개의 공이 담긴 상자 1개가 올 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1 = 4$

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

⇣□⇣□2□⇣

⇣에 1개의 공이 담긴 상자가 올 경우의 수는

방정식

$a+b+c=6$

(단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$)

의 해의 개수와 같다.

(즉, (a개)□(b개)□2□(c개))

위의 방정식의 해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = 28$

따라서 경우의 수는

$4 \times 28 = 112$

(경우1), (경우2)에서 구하는 전체 경우의 수는

$150 + 112 = 262$

답 262

〈 미적분 〉

23

[풀이]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{3}{\cos 6x}$$

$$= 1 \times \frac{3}{1} = 3$$

답 ③

24

[풀이]

$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$일 때,

$\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$이므로

$$\sqrt{\sin x - \sin^3 x}$$

$$= \sqrt{\sin x (1 - \sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{\sin x \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\sin x}\,\sqrt{\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\sin x}\,\cos x$$

이제 $\sin x = t$로 두면 $\cos x dx = dt$이고,

$x = 0$일 때 $t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$일 때 $t = 1$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, \cos x dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

답 ④

25

[풀이]

모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2<\frac{a_n}{n}<5+\frac{1}{n}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2\right)=3+2=5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$$

이므로 수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{(5+0)^2}{5+5-0}=\frac{5}{2}$$

답 ③

26

[풀이]

구하는 부피를 V라고 하면

$$V=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}(x+x\ln x)dx,\text{ 즉}$$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{3}}V=\int_1^2 x(1+\ln x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2(1+\ln x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx$$

$$=2+2\ln 2-\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}+2\ln 2-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3+8\ln 2}{4}$$

$$\therefore\ V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3+8\ln 2}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$$

답 ①

27

[풀이]

우선 곡선 C와 직선 $y=3x-5e$의 방정식을 연립하자.

$$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)=3e^{4t}(1+\sin^2\pi t)-5e,$$

$$e^{4t}(3+3\sin^2\pi t-1+3\cos^2\pi t)=5e,$$

$$5e^{4t}=5e\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$4t=1,\ t=\frac{1}{4}$$

이를 곡선 C의 방정식에 대입하면

$$x=e\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}e,\ y=e\left(1-\frac{3}{2}\right)=-\frac{e}{2},$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}e,\ -\frac{e}{2}\right)$$

매개변수로 주어진 함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dx}{dt}=e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t),$$

$$\frac{dy}{dt}=e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t)$$

$\therefore$ (점 P에서의 접선의 기울기)

$$=\frac{e\left(4-12\times\frac{1}{2}+6\pi\times\frac{1}{2}\right)}{e\left(4+4\times\frac{1}{2}+2\pi\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{3\pi-2}{\pi+6}$$

답 ②

28

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{s^2}{s+1}(x-s)+f(s)$$

이 직선의 y절편은 $-\frac{s^3}{s+1}+f(s)$이고,

점 $(s,\ f(s))$에서 y축에 내린 수선의 발은 $f(s)$이므로

$$\left|-\frac{s^3}{s+1}+f(s)-f(s)\right|=t,\text{ 즉}$$

$$\frac{s^3}{s+1}=t\ (\because s>0)$$

이때, $s=g(t)$이므로

$$\frac{(g(t))^3}{g(t)+1}=t \qquad \cdots(*)$$

한편 함수 $y=\frac{x^3}{x+1}$에 대하여

$x>0$일 때, $y'=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}>0$

이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서

함수 $y=\frac{x^3}{x+1}$는 증가하고, 역함수를 갖는다.

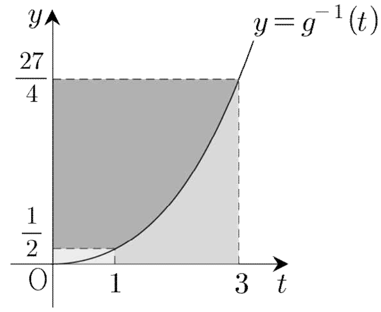
이때, $y\ge 0$이다.

따라서 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$는 역함수를 갖는다.

(*)의 t의 자리에 $g^{-1}(t)$를 대입하면

$$\frac{(g(g^{-1}(t)))^3}{g(g^{-1}(t))+1}=g^{-1}(t),\text{ 즉 } g^{-1}(t)=\frac{t^3}{t+1}$$

함수 $g^{-1}(t)$의 그래프는



$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)dt$$

=(좀 더 어둡게 색칠된 영역의 넓이)

$$=3\times\frac{27}{4}-1\times\frac{1}{2}-\int_1^3\frac{t^3}{t+1}dt$$

(이때,

$$\frac{t^3}{t+1}=\frac{t^3+1-1}{t+1}=\frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}$$

$$=t^2-t+1-\frac{1}{t+1})$$

$$=\frac{79}{4}-\int_1^3\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{79}{4}-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln(t+1)\right]_1^3$$

$$=\frac{79}{4}-\frac{20}{3}+\ln 2$$

$$=\frac{157}{12}+\ln 2$$

답 ⑤

29

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

일반항 a_n은 $a_n=dn\ (\because a_1=d)$

$$b_{k+1}=\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{d}-1,$$

$$b_{k+2}=\frac{1}{a_2}-1=\frac{1}{2d}-1,$$

$b_{k+3}=\frac{1}{a_3}-1=\frac{1}{3d}-1$

이고, 등비중항의 정의에 의하여

$(b_{k+2})^2=b_{k+1}\times b_{k+3}$, 즉

$\left(\frac{1}{2d}-1\right)^2=\left(\frac{1}{d}-1\right)\left(\frac{1}{3d}-1\right)$,

$\frac{1}{4d^2}-\frac{1}{d}+1=\frac{1}{3d^2}-\frac{4}{3d}+1$

양변에 d^2을 곱하면

$\frac{1}{4}-d+d^2=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}d+d^2$, $d=\frac{1}{4}$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라고 하면

$b_{k+1}=3$, $b_{k+2}=1$, $b_{k+3}=\frac{1}{3}$

에서 $r=\frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}b_1$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{dn}-\frac{1}{d(n+1)}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d(n+1)}\right)$

$=\frac{1}{d^2}=16$

주어진 부등식에 대입하면

$0<\frac{3}{2}b_1-16<30$, $\frac{32}{3}<b_1<\frac{92}{3}$

그런데 b_1은 3의 거듭제곱이어야 하므로

$b_1=27(b_2=9)$

$\frac{q}{p}=a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{16}$

$\therefore\ p+q=81+16=97$

답 97

30

[풀이]

(가): $|x|\le 1$일 때, 주어진 등식을 정리하면

$\sqrt{4\times(f^{-1}(x))^2}=\sqrt{x^2(x^2-5)^2}$,

$|2f^{-1}(x)|=|x(x^2-5)|$,

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x(x^2-5)$

또는 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x(x^2-5)$

(나): $|x|>1$일 때, 주어진 등식을 정리하면

$f^{-1}(x)=e^{|x|-1}+1$

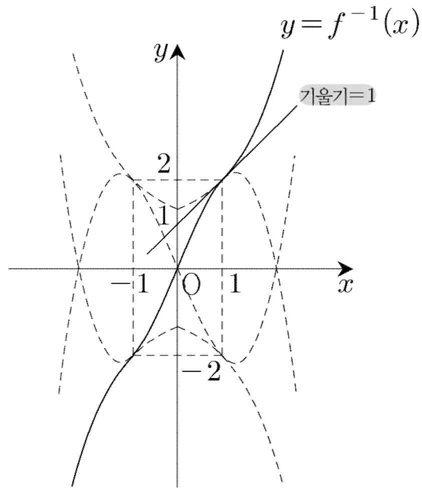
또는 $f^{-1}(x)=-e^{|x|-1}-1$

네 개의 곡선

$y=\frac{1}{2}x(x^2-5)$, $y=-\frac{1}{2}x(x^2-5)$,

$y=e^{|x|-1}+1$, $y=-e^{|x|-1}-1$

을 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 연속이고, 증가하므로

역함수 $f^{-1}(x)$도 연속이고, 증가한다.

따라서 위의 그림처럼 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프가 결정된다.

이때, 함수 $f^{-1}(x)$는 $x=\pm1$에서 미분가능하다.

($\because$ $x>1$일 때, $f^{-1}(x)=e^{x-1}+1$,

$(f^{-1})'(x)=e^{x-1}$

$-1\le x\le 1$일 때, $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x(x^2-5)$,

$(f^{-1})'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}$

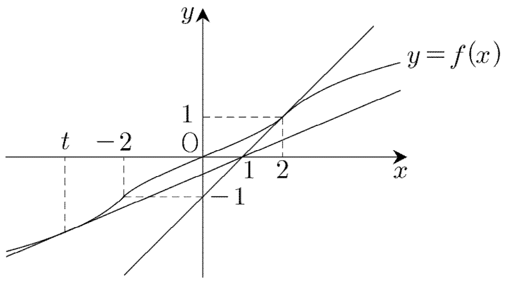
$\lim\limits_{x\to1+}(f^{-1})'(x)=1=\lim\limits_{x\to1-}(f^{-1})'(x)$, 즉

함수 $f^{-1}(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

그리고 함수 $f^{-1}(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$x=-1$에서 미분가능하다.)

함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서 세 점

$(-2,\ -1)$, $(0,\ 0)$, $(2,\ 1)$

은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

직선 $y=m(x-1)$은 점 $(2,\ 1)$에서

곡선 $y=f(x)$에 접한다.

(그리고 그 외의 점에서는 서로 만나지 않는다.)

직선 $y=m(x-1)$이 제3사분면에서

곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 접점의 x좌표를 $t(<-2)$

라고 하자.

$x<-1$일 때, $f(x)=-\ln(-x-1)-1$

($\because$ $y=-e^{-x-1}-1$의 x자리에 y,

y자리에 x를 대입하면

$x=-e^{-y-1}-1$, $y=-\ln(-x-1)-1$)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$, 즉

$y=-\dfrac{1}{t+1}(x-t)-\ln(-t-1)-1$

$(\because f'(x)=-\dfrac{1}{x+1})$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-\dfrac{1}{t+1}(1-t)-\ln(-t-1)-1$

정리하면

$\dfrac{2}{t+1}=-\ln(-t-1)$ $\cdots(*)$

m을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면서

$g(m)$의 값을 정리하면 다음과 같다.

$$g(m)=\begin{cases}1 & (m>b)\\ 2 & (m=b)\\ 3 & (a<m<b)\\ 1 & (m\le a)\end{cases}$$

이때, $a=0$, $b=-\dfrac{1}{t+1}$

(*)에 $t+1=-\dfrac{1}{b}$ 대입하면

$-2b=-\ln\dfrac{1}{b}$, 즉 $\dfrac{\ln b}{b}=-2$

$\therefore\ g(a)\times\left(\lim\limits_{m\to a+}g(m)\right)+g(b)\times\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2$

$=1\times3+2\times(-2)^2=11$

답 11

[참고]

$\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.

점 $(0,\ 1)$에서 곡선

$y=f^{-1}(x)=-e^{-x-1}-1(x<0,\ y<0)$

에 그은 접선 위의 접점을 $(s,\ -e^{-s-1}-1)$이라고

하자.

함수 $f^{-1}(x)$의 도함수는

$(f^{-1}(x))'=e^{-x-1}$

이므로, 접선의 기울기는 e^{-s-1}이다.

이때, $e^{-s-1}=\dfrac{1}{b}$, $s+1=\ln b$ $\cdots$㉠

접선의 방정식은

$y=e^{-s-1}(x-s)-e^{-s-1}-1$

이 직선이 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=e^{-s-1}(0-s)-e^{-s-1}-1$

정리하면

$(s+1)e^{-s-1}=-2$

위의 등식에 ㉠을 대입하면

$$\frac{\ln b}{b}=-2$$

$$\therefore \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2=4$$

〈 기하 〉

23

[풀이]

$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 0)$

이므로 구하는 값은 3이다.

답 ③

24

[풀이]

포물선 $y^2=4\times3\times(x-2)$의

초점은 $(3+2,\ 0)$, 준선은 $x=-3+2$

이다.

따라서 초점에서 준선까지의 거리는

$5-(-1)=6$

답 ①

25

[풀이]

두 점 B, C의 좌표는 각각

$\mathrm{B}\left(-3,\ -\frac{3}{2},\ -2\right)$, $\mathrm{C}\left(-3,\ \frac{3}{2},\ 2\right)$

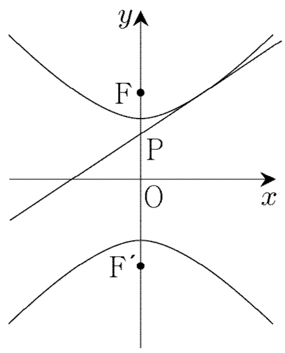
$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+(-2-2)^2}$$

$$=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

답 ⑤

26

[풀이]



주어진 쌍곡선의 방정식은 점 $(a,\ \sqrt{2}a)$를 지나므로

$$\frac{a^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{2}a)^2}{b^2}=-1$$

정리하면

$a=b$

접선의 방정식은

$$\frac{ax}{a^2}-\frac{\sqrt{2}ay}{a^2}=-1$$

이 직선의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$$\frac{a\times 0}{a^2}-\frac{\sqrt{2}ay}{a^2}=-1,$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \mathrm{P}\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

한편 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{2}a)$, $\mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{2}a)$

$(\because c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2,\ c=\sqrt{2}a)$

이므로

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

$$=\left(\sqrt{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-(-\sqrt{2}a)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{3\sqrt{2}}{2}a=\frac{3}{2}a^2=8$$

$$\therefore\ a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

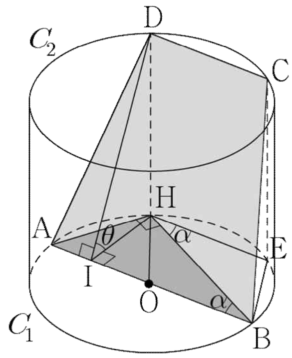
27

[풀이]

점 C에서 평면 ABH에 내린 수선의 발을 E라고 하자.

이때, 점 E는 원 C_1 위의 점이다.

그리고 원 C_1의 중심을 O라고 하자.



두 직각삼각형 AHD, BEC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2}$, $\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}$

그런데 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CE}}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BE}}$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{HE}}$이다.

그리고 $\overline{\mathrm{HE}}//\overline{\mathrm{DC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{DC}}$이다.

그러므로 두 사각형 ABCD, ABEH는 모두 사다리꼴이다.

이제 $\angle\mathrm{HBA}=\alpha$로 두면

평행선의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{BHE}=\alpha$ (엇각)

($\triangle$ABH의 넓이):($\triangle$EHB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times 5\times\overline{\mathrm{BH}}\times\sin\alpha:\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HE}}\times\overline{\mathrm{HB}}\times\sin\alpha$$

$=5:3$ $(\because\ \overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{DC}}=3)$

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

삼각형 ABH의 넓이는 $\frac{1}{4}S$,

삼각형 EHB의 넓이는 $\frac{3}{20}S\left(=\frac{1}{4}S\times\frac{3}{5}\right)$

이므로 사각형 ABEH의 넓이는

$\frac{2}{5}S(=\frac{1}{4}S+\frac{3}{20}S)$이다.

점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라고 하면

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DI}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{DIH}=\theta$

정사영의 넓이의 정의에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\frac{2}{5}S}{S}=\frac{2}{5},\ \tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

직각삼각형 HOI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{HI}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$$

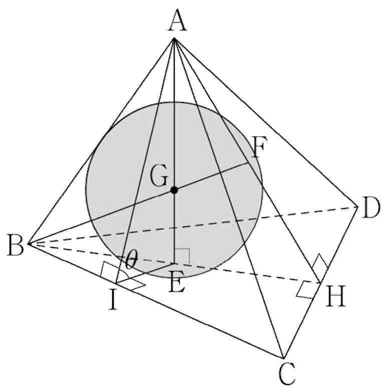
직각삼각형 AHD에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\therefore\ \overline{\mathrm{DH}}=2\times\tan\theta=2\times\frac{\sqrt{21}}{2}=\sqrt{21}$$

답 ④

28

[풀이]



이등변삼각형의 성질에 의하여

직선 AH는 선분 CD의 수직이등분선이다.

직각삼각형 BCH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$$

삼각형 ABH는 세 변의 길이가 같으므로 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BH에 내린 수선의 발을 E,

점 B에서 선분 AH에 내린 수선의 발을 F

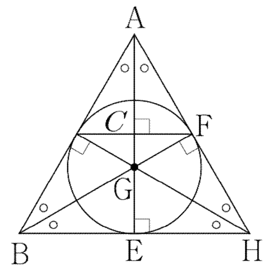
라고 하면

점 E는 선분 BH의 중점이고,

점 F는 선분 AH의 중점이다.

그리고 두 선분 AE, BF의 교점은 무게중심 G이다.

(아래 그림)



(단, $\circ=30^\circ$)

$$\angle \mathrm{APG}=\frac{\pi}{2}$$

이므로 도형 T의 자취는 '점 F를 지나고 평면 BCD에 평행한 평면으로 구 S를 자른 단면' 즉, 원이다.

이 원을 C라고 하자.

원 C의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AF}}\times\sin 30^\circ=1$

이므로, 원 C의 넓이는 π이다.

원 C를 포함한 평면과 평면 BCD는 서로 평행하므로

원 C를 포함한 평면과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기는 θ이다.

점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라고 하면

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AI}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{AIE}=\theta$

두 직각삼각형 BCH, BEI는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{EI}}$, 즉 $2\sqrt{5}:2=2:\overline{\mathrm{EI}}$, 즉

$$\overline{\mathrm{EI}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

직각삼각형 AIE에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt{15},\ \cos\theta=\frac{1}{4}$$

따라서 도형 T(원 C)의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이를 S'라고 하면

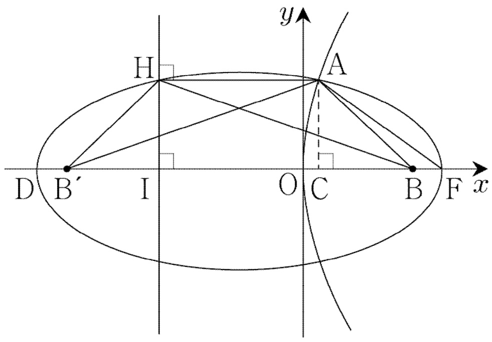
$\therefore\ S'=\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$

답 ④

29

[풀이]

타원의 두 초점 중에서 점 B가 아닌 점을 B′,
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C,
타원이 x축과 만나는 두 점 중에서 점 F가 아닌 점을 D,
직선 $x=-p$가 x축과 만나는 점을 I라고 하자.
그리고 점 A의 x좌표를 a라고 하자.

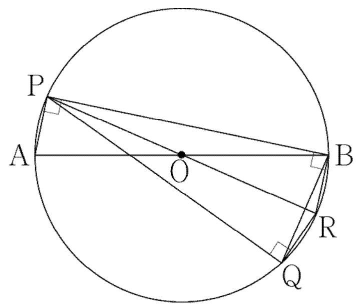


$\overline{\mathrm{HA}}=p+a$이므로
$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{OF}}-\overline{\mathrm{OC}}=p-a$이고,
$\overline{\mathrm{DI}}=p-a(=\overline{\mathrm{CF}})$이므로
$\overline{\mathrm{DF}}=(p-a)+(p+a)+(p-a)=3p-a$
즉, 타원의 장축의 길이는 $3p-a$이다.
($\triangle$AHB의 둘레의 길이)
$=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{HB}}+\overline{\mathrm{BA}}$
$=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{AB}}$ ($\because \overline{\mathrm{HB}}=\overline{\mathrm{AB'}}$)
$=\overline{\mathrm{AH}}+(\overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{AB}})$
$=(p+a)+(3p-a)=p+27$ ($\because$ 타원의 정의)
$\therefore\ p=9$
한편 포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{HA}}=p+a$
이므로 직각삼각형 ACF에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(p+a)^2-(p-a)^2}=2\sqrt{pa}=6\sqrt{a}$
($\triangle$AHB의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times(9+a)\times6\sqrt{a}=30$
정리하면
$(9+a)\sqrt{a}=10$ (←여기서 바로 $a=1$을 결정해도 좋다.)
양변을 제곱하면
$(a+9)^2a=100,\ a^3+18a^2+81a-100=0,$
$(a-1)(a^2+19a+100)=0,\ \therefore\ a=1$
$(\because a^2+19a+100>0)$
직각삼각형 HIF에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\therefore\ k^2=18^2+6^2=360$
답 360

30

[풀이]

문제에서 주어진 원을 C, 원 C의 중심을 O라고 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}(=2\overrightarrow{\mathrm{PO}})$
을 만족시키는 점 R은 (아래 그림처럼) 원 C 위에 있고,
선분 PR은 원 C의 지름이다.



$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$
$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2$
$=2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

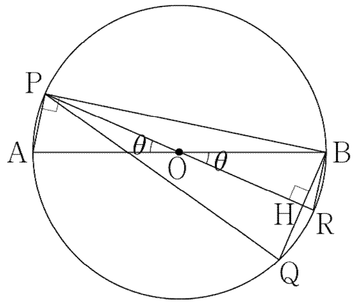
정리하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$, 즉 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}$

이때, 두 직각삼각형 PBR, PQR은 서로 합동이다.

두 선분 PR, BQ가 만나는 교점을 H라고 하자.

이때, 직선 OH는 선분 BQ의 수직이등분선이다.



이제 $\angle \mathrm{POA}=\theta$로 두면

$\angle \mathrm{BOR}=\theta$ (∵ 맞꼭지각의 성질)

직각삼각형 PAB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(10\sqrt{2})^2-14^2}=2$

삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-2^2}{2\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}=\frac{24}{25}$$

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{BR}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}$

$=-\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

$=-2\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

$=-2|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$

$=-2\times(5\sqrt{2}\times\sin\theta)^2$

$=-\frac{196}{25}$ $\left(\because \sin\theta=\frac{7}{25}\right)$

$\frac{q}{p}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=\frac{196}{25}$

$\therefore\ p+q=196+25=221$

답 221