06 도함수의 활용

미적분II 교과서 Review

문제 1

곡선 $y=\tan(\sin x)$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

문제 2

곡선 $y=a-\sin^2 x$와 $y=\cos x$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a의 값은? (단, $0<t<\pi$)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{5}{4}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

문제 3

함수 $f(x)=xe^{ax+b}$이 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

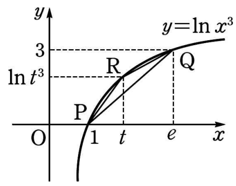
문제 4

$1\le x\le 3$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\alpha x\le \ln x\le \beta x$$

가 성립하도록 실수 α, β를 정할 때, $\beta-\alpha$의 최솟값을 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)

문제 5



오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\ln x^3$ 위의 세 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(e,\ 3)$, $\mathrm{R}(t,\ \ln t^3)$에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 최대일 때, t의 값은? (단, $1<t<e$)

① $e-2$　② $e-1$　③ e　④ $e+1$　⑤ $e+2$

06 도함수의 활용

미적분II 교과서 Review

문제 6

원점에서 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=\ln x$에 각각 그은 두 접선이 이루는 각 중 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

문제 7

함수 $f(x)=ax+\ln(x^2+4)$가 실수 전체의 구간에서 증가하도록 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

문제 8

다음 보기에서 함수 $f(x)=-2x^2+5x-\ln x$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. $x=1$에서 극댓값 3을 가진다.

ㄴ. 점 $\left(\frac{1}{2},\ 2+\ln 2\right)$는 변곡점이다.

ㄷ. $0<x<\frac{1}{2}$에서 위로 볼록하다.

문제 9

$x>0$에서 함수 $f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$가 극댓값을 갖는 x의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$이라고 할 때, $\ln f(a_n)-\ln f(a_{n+1})$의 값을 구하여라.

문제 10

함수 $f(x)=ax^2+bx-\ln x$의 그래프의 변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대일 때, 극솟값을 구하고 그 과정을 서술하여라.

06 도함수의 활용

미적분II 교과서 Review

문제 11

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$로 정의할 때, 다음 설명 중 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

|보 기|

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 12

x에 대한 방정식 $\frac{16}{x}=-x^2+a$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

문제 13

방정식 $\frac{x^2}{e^x}=a$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

문제 14

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a\neq b$)

|보 기|

ㄱ. $h'(b)=0$
ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=h(x)$의 변곡점은 없다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

문제 15

곡선 $y=\cos^n x\left(0<x<\frac{\pi}{2},\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\right)$의 변곡점의 y좌표를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

06 도함수의 활용

미적분Ⅱ 교과서 Review

문제 16

두 함수 $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=ke^{-x}$에 대하여 $x>0$일 때 $f(x)>g(x)$이기 위한 실수 k의 최댓값을 구하여라.

문제 17

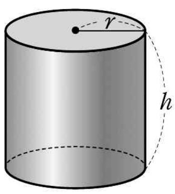
$x \ge 0$일 때, 부등식 $e^x \ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}$이 성립함을 증명하여라.

문제 18

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=kxe^{-x}$이 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)

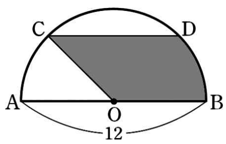
문제 19

겉넓이가 일정한 원기둥 중에서 부피가 최대인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이 r와 높이 h의 비를 구하여라.



문제 20

오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 길이가 12인 반원에서 지름에 평행한 현 CD를 그을 때 생기는 도형 OBDC의 넓이의 최댓값을 구하여라.
(단, 점 O는 반원의 중심)



〈정답 및 해설〉
미적분Ⅱ - 6단원. 도함수의 활용

1. ③

2. ③

3.

$f'(x)=e^{ax+b}(1+ax)$

$f(x)=xe^{ax+b}$가 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 가지므로

$f'(-1)=0$

$e^{-a+b}(1-a)=0,\ a=1$

$f(x)=xe^{x+b}$이고 $f(-1)=-\frac{1}{e}$이므로

$-e^{-1+b}=-e^{-1},\ b=0$

4.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 3}{3}$

$1\le x\le 3$에서 $0\le\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}$

따라서 $\alpha\le 0$, $\beta\ge\frac{1}{e}$이므로 $\beta-\alpha$의 최솟값은 $\frac{1}{e}-0=\frac{1}{e}$

5. ②

점 R에서 그은 접선이 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 평행할 때 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이가 최대가 된다.

$f(x)=\ln x^3$이라고 하면 $f'(x)=\frac{3x^2}{x^3}=\frac{3}{x}$이므로 점 R에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{3}{t}$

한편 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(e,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{3}{e-1}$이므로

$\frac{3}{t}=\frac{3}{e-1}\qquad\therefore\ t=e-1$

6.

$\frac{2}{3}e-\frac{1}{3e}$

7.

$a\ge\frac{1}{2}$

8.

$f'(x)=-4x+5-\frac{1}{x}$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=-4+\frac{1}{x^2}$이므로 $f''(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

ㄱ. $f'(1)=0$이고 $f''(1)<0$이므로 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=3$이다.

ㄴ. $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$이고 $x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $\left(\frac{1}{2},\ 2+\ln 2\right)$는 변곡점이다.

ㄷ. 구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 $0<x<\frac{1}{2}$에서 아래로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9.

$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$
$\quad=-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$

$\therefore\ x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ 또는 $x=3\pi\ \cdots$

$f''(x)=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x$
$\quad=2e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$x=2\pi,\ x=4\pi,\ x=6\pi,\ \cdots$일 때 $f''(x)<0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2n\pi$ (n은 자연수)에서 극댓값을 가진다.

따라서 $a_n=2n\pi$이므로

$\ln f(a_n)-\ln f(a_{n+1})$
$=\ln f(2n\pi)-\ln f(2(n+1)\pi)$
$=\ln e^{-2n\pi}-\ln e^{-2(n+1)\pi}$
$=-2n\pi+2(n+1)\pi=2\pi$

10.

$f(x)=ax^2+bx-\ln x$에서

$f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x}$, $f''(x)=2a+\frac{1}{x^2}$

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=2a+4=0$에서 $a=-2$

또 $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=2a+b-1=-4+b-1=0$에서 $b=5$

$f(x)=-2x^2+5x-\ln x$

$f'(x)=-4x+5-\frac{1}{x}=-\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}+2\ln 2$

11. ⑤

ㄱ. $f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

구간 $(0,\ \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)$

$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

구간 $(0,\ \pi)$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가한다.

ㄷ. $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$

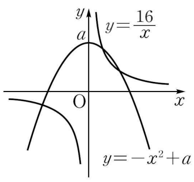
$\dfrac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$이고 $g(x)$는 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여 $g'(x)=1$인 x가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

12. $a>12$

주어진 방정식 서로 다른 세 실근을 가지려면 두 곡선 $y=\dfrac{16}{x}$, $y=-x^2+a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

그런데 오른쪽 그림에서 $x<0$일 때 한 점에서 만나므로 두 그래프는 제1사분면에서 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=\dfrac{16}{x}$, $g(x)=-x^2+a$라고 하면

$$f'(x)=-\frac{16}{x^2},\ g'(x)=-2x$$

접점의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$$\frac{16}{t}=-t^2+a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(t)=g'(t)$에서

$$-\frac{16}{t^2}=-2t \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $t^3=8$, 즉 $t=2$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$8=-4+a,\quad a=12$

$\therefore a>12$

13.

$0<a<\dfrac{4}{e^2}$

14. ③

점 $\mathrm{A}(a,f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

이므로 $g(x)=f'(a)x-af'(a)+f(a)$ ···㉠

이때 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,f(b))$에서 접하므로 점 $\mathrm{B}(b,f(b))$에서의 접선의 방정식도 $y=g(x)$ 이다.

즉 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$에서

$g(x)=f'(b)x-bf'(b)+f(b)$ ······㉡

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

이때 ㉠, ㉡에서 $g'(x)=f'(a)=f'(b)$이므로

$h'(x)=f'(x)-f'(a)=f'(x)-f'(b)$ ···㉢

$\therefore h'(b)=f'(b)-f'(a)=f'(b)-f'(b)=0$

ㄴ. $h'(b)=0$이고, ㉢에서 $h'(a)=0$이므로 두 점 A, B에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접한다.

따라서 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 즉 $h(a)=0$, $h(b)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 구간 $(a,\ b)$에 $f'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 그러므로 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.

ㄷ. 점 $\mathrm{A}(a,f(a))$가 $y=f(x)$의 변곡점이고 ㉢에서 $h''(x)=f''(x)$이므로 $h''(a)=f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 바뀐다. 따라서 점 $(a,\ h(a))$는 $y=h(x)$의 변곡점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15.

해결 과정 $f(x)=\cos^n x$라고 하면

$f'(x)=-n\cos^{n-1}x\sin x$

$f''(x)=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x-n\cos^n x$

$=n\cos^{n-2}x\{(n-1)\sin^2 x-\cos^2 x\}$

$=n\cos^{n-2}x(-n\cos^2 x+n-1)$ ▶30%

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\cos^2 x=1-\dfrac{1}{n}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로 $\cos x=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$ ▶40%

답 구하기 따라서 $a_n=\cos^n x=\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

이때 $-\dfrac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{t\to 0-}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$ ▶30%

16.

1

17.

실수 x에 대하여 $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$으로 놓으면

$f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$

$x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

즉, $f'(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 $x=0$일 때, 최소이므로

$f'(x)\geq f'(0)=0$ (단, $x\geq 0$)

이때, $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로

$f(x)\geq f(0)=0$ (단, $x\geq 0$)

따라서 $x\geq 0$일 때, $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$이다.

18.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 $x>0$인 모든 실수에 대하여 $f(x)<1$이어야 하므로 $kxe^{-x}<1$, 즉 $k<\frac{e^x}{x^2}$

$g(x)=\frac{e^x}{x}$으로 놓으면 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}=0$에서

$x=1$

따라서 $x>0$일 때 함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$

$x>0$일 때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값 e를 가지므로 $k<e$이다.

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

19.

원기둥의 겉넓이는 $2\pi r^2+2\pi rh$

이 원기둥의 겉넓이가 일정하므로

$2\pi r^2+2\pi rh=2\pi k$ (k는 상수, $k>0$)

라고 하면 $h=\frac{k}{r}-r$

그런데 $h>0$이므로 $\frac{k}{r}-r>0$에서 $\frac{k-r^2}{r}>0$

이때 $r>0$이므로 $r^2-k<0$

$(r+\sqrt{k})(r-\sqrt{k})<0$, $0<r<\sqrt{k}$

원기둥의 부피를 $V(r)$라고 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2\left(\frac{k}{r}-r\right)=\pi kr-\pi r^3$ $(0<r<\sqrt{k})$

이므로 $V'(r)=\pi k-3\pi r^2$

$V'(r)=0$에서 $r=\sqrt{\frac{k}{3}}$

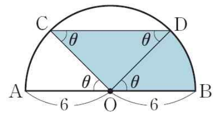
r	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{k}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{k}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$V(r)$는 $r=\sqrt{\frac{k}{3}}$에서 극대이면서 최대이고, 이때 h는

$$h=\frac{k}{r}-r=\frac{k-r^2}{r}=\frac{k-\frac{k}{3}}{\sqrt{\frac{k}{3}}}=2\sqrt{\frac{k}{3}}$$

$$r:h=\sqrt{\frac{k}{3}}:2\sqrt{\frac{k}{3}}=\mathbf{1:2}$$

20.



$\angle \mathrm{BOD}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

라고 하면 도형 OBDC의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=$(부채꼴 BOD의 넓이)$+$($\triangle$COD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\theta+\frac{1}{2}\cdot 6^3\cdot\sin(\pi-2\theta)$

$=18(\theta+\sin 2\theta)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$S'(\theta)=18(1+2\cos 2\theta)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$	0	$\nearrow$	$6\pi+9\sqrt{3}$	$\searrow$	9π

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로

도형 OBDC의 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\pi+9\sqrt{3}$