05 여러 가지 미분법

미적분II 교과서 Review

문제 1

함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$의 값을 구하여라.

문제 2

두 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x)=x^2-3$에 대하여 $\dfrac{d}{dx}(f\circ g)(x)$를 구하여라.

문제 3

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=5$$

를 만족시킬 때, 합성함수 $y=g(f(x))$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하고 그 과정을 서술하여라.

문제 4

함수 $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$에 대하여 함수 $g(x)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^3$의 도함수를 구하여라.

05 여러 가지 미분법

문제 5

함수 $f(x)=x\tan x$일 때, 극한값

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}$$

는?

① π ② $1+\pi$ ③ $2+\pi$ ④ $1+2\pi$ ⑤ $2+2\pi$

문제 6

함수 $f(x)=3^{2x-1}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하여라.

문제 7

함수 $f(x)=(ax^2+1)\sin 2x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 8

다음 등식을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}=10$$

05 여러 가지 미분법

문제 9

함수 $f(x)=\ln|\sin^2 3x|$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{18}\right)$는?

① $6\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $-3\sqrt{3}$ ⑤ $-6\sqrt{3}$

문제 10

함수 $f(x)=x^3+2x-2$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}$의 값을 구하여라.

문제 11

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(-x)=-f(x)$	Ⅱ. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고, 그 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(-2)$를 구하여라.

05 여러 가지 미분법

문제 12

함수 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^2}$ 에서 $f'(0)$의 값을 구하여라.

문제 13

함수 $f(x)=x^{\ln x}\ (x>0)$에 대하여 $f'(e)$의 값을 구하여라.

문제 14

함수 $f(x)=e^{ax}\sin bx$에 대하여 등식

$$f(x)+f'(x)+f''(x)=0$$

이 실수 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하여라. $(b\neq 0)$

〈정답 및 해설〉
미적분Ⅱ - 5단원. 여러 가지 미분법

1.

$$f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x-(\sqrt{1-x^2}-1)\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{2}$$

2.

$f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $g'(x)=2x$ 이므로

$$\frac{d}{dx}(f\circ g)(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$=\frac{2}{(x^2-2)^2}\cdot 2x$$

$$=\frac{4x}{(x^2-2)^2}$$

답 $\dfrac{4x}{(x^2-2)^2}$

3.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=5$에서

$x\to 0$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{g(x)-1\}=g(0)-1=0$에서 $g(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-1}=g'(0)=5$$

이때 $y'=g'(f(x))\cdot f'(x)$이므로

$y'_{x=1}=g'(f(1))\cdot f'(1)=g'(0)\cdot 3=5\cdot 3=15$

4.

$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}=\sqrt{x^2+1}$ 이므로

$$g(x)=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3=(\sqrt{x^2+1})^3$$

$$=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'=3x\sqrt{x^2+1}$$

5.

③

6.

$f'(x)=2\cdot 3^{2x-1}\ln 3$이므로

$f'(1)=6\ln 3$

7.

$f'(x)=2ax\sin 2x+2(ax^2+1)\cos 2x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi$에서

$\dfrac{\pi}{2}a=\pi$

따라서 $a=2$이므로 ②이다.

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

에서 $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$으로 놓으면

$$f(0)=\ln(1+1+1+\cdots+1)=\ln n$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=f'(0)$$

또, $f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$ 이므로

$$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+1+1+\cdots+1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}$$

따라서 $\dfrac{n+1}{2}=10$에서 $n=19$

9.

①

10.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)\{f(x)-1\}+g(x)-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot g(x)+\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}$$

이때 $f(1)=1$이므로

$g(1)=1$

• 1점

$f'(x)=3x^2+2$이므로

$f'(1)=5$

$$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}$$

$$=\frac{1}{f'(1)}$$

$$=\frac{1}{5}$$

|답 구하기| 따라서 구하는 값은

$$5\cdot1+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$$

11.

$\frac{1}{3}$

12.

$f(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln|x+1|+3\ln|x+3|-2\ln|x+2|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)$$

$$\therefore f'(0)=f(0)(1+1-1)$$

$$=f(0)=\frac{27}{4}$$

13.

2

14.

$f'(x)=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$f''(x)=ae^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$+e^{ax}(ab\cos bx-b^2\sin bx)$

$=e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\}$

$f(x)+f'(x)+f''(x)=0$이 항상 성립하므로 대입하여 정리하면

$e^{ax}\{(a^2-b^2+a+1)\sin bx+b(2a+1)\cos bx\}=0$

$a^2-b^2+a+1=0$, $b(2a+1)=0$에서 $b\neq0$이므로

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$