

# 수학 문제 및 해설 모음집

SNarGo Math Solver

2025년 11월 13일 20시 40분 16초

참고: 이것은 SN의 *SNarGo AI* 에이전트가 직접 수능 문제를 풀어본 뒤에 작성한 해설을 바탕으로 작성되었습니다.

---

**Designed by Dr. Ryun**

SNar Lab.

2025.11

SN Academy

---

## 공통 문항

### 문항 1 [2 점]

질문:  $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$  의 값은?

#### 선택지

1. ① 1
  2. ②  $\sqrt{3}$
  3. ③ 3
  4. ④  $3\sqrt{3}$
  5. ⑤ 9
- 

### 문항 1 해설

#### 정답

정답: 1 번(①).

#### 풀이

같은 밑의 거듭제곱  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  과 지수법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned}9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} &= (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\&= 3^{2 \cdot \frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\&= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\&= 3^0 \\&= 1.\end{aligned}$$

#### 난이도

하

## 문항 2

### 문제

배점: 2 점 함수  $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

- ① 7
  - ② 9
  - ③ 11
  - ④ 13
  - ⑤ 15
- 

## 문항 2 해설

### 해설

주어진 극한은 도함수의 정의에 해당하므로  $f'(1)$ 을 구하면 된다.

1. 도함수의 정의:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . 따라서  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$  이다.
2. 함수  $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 을 미분하면  $f'(x) = 9x^2 + 4$  이다.
3. 대입:  $f'(1) = 9 \cdot 1^2 + 4 = 13$ .

추가 확인(직접 전개):  $f(1+h) = 3(1+h)^3 + 4(1+h) + 1 = 8 + 13h + 9h^2 + 3h^3$ ,  $f(1) = 8$  이므로 분자는  $13h + 9h^2 + 3h^3 = h(13 + 9h + 3h^2)$  이고, 따라서 극한은 13 이다.

정답: 13 (선택지 ④)

난이도: 하

## 문제 3

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^4 (2a_k - k) = 0$  일 때,  $\sum_{k=1}^4 a_k$ 의 값은? [3 점]

### 보기

1. 1
  2. 2
  3. 3
  4. 4
  5. 5
- 

## 해설 3

### 단계별 풀이

1. 주어진 식을 전개하면  $2\sum_{k=1}^4 a_k - \sum_{k=1}^4 k = 0$  이다.
2.  $\sum_{k=1}^4 k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  이므로,  $S = \sum_{k=1}^4 a_k$  라고 두면  $2S - 10 = 0$  이다.
3. 따라서  $S = 5$  이다.

### 최종 정답

정답: 5 (⑤)

### 난이도

하

## 문항 4: 함수

### 정의

함수  $f(x)$ 를 다음과 같이 정의 한다:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & (x < 1) \\ x^2 - 3x + a, & (x \geq 1) \end{cases}$$

### 질문

이 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3 점]

### 선택지

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 5

---

## 문항 4 해설

1. 함수가 전제에서 연속이려면  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$  이어야 한다.
2. 왼쪽 극한:  $x < 1$  구간에서  $f(x) = 3x - 2$  이므로  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ 이다.
3. 오른쪽 극한과 함수값:  $x \geq 1$  구간에서  $f(x) = x^2 - 3x + a$  이므로  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + a = a - 2$ 이다.
4. 연속이므로  $a - 2 = 1$ 이고, 따라서  $a = 3$ 이다.

따라서 상수  $a$ 의 값은 3이다. (선택지 (3))  
난이도: 하

## 문제 5

### 지문

함수  $f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 2)$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은?

### 요구

$f'(1)$ 의 값

### 배점

3 점

### 선택지

1. 6
2. 7
3. 8
4. 9
5. 10

---

## 해설 5

### 정답

(3) 8

### 풀이

1.  $f(x)$ 를 전개한다:

$$f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 2) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4.$$

2. 미분한다:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 4.$$

3.  $x = 1$ 을 대입한다:

$$f'(1) = 6(1)^2 + 6(1) - 4 = 8.$$

### 난이도

하

## 문제 6

1 보다 큰 두 실수  $a, b$  가 다음을 만족시킬 때,  $\log_9(ab)$  의 값은 무엇인가? [3 점]

$$\log_a b = 3, \quad \log_3\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}$$

1.  $\frac{3}{8}$

2.  $\frac{1}{2}$

3.  $\frac{5}{8}$

4.  $\frac{3}{4}$

5.  $\frac{7}{8}$

난이도: 하

---

## 해설 6

정답: (2)  $\frac{1}{2}$

### 풀이

1.  $\log_a b = 3$  이므로  $b = a^3$ .

2.  $\log_3\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}$  이므로  $\frac{b}{a} = 3^{1/2}$ .

3. 대입하면  $\frac{a^3}{a} = a^2 = 3^{1/2}$  이므로  $a = 3^{1/4}$  ( $a > 1$  이므로 양의 해).

4. 따라서  $b = a^3 = 3^{3/4}$ ,  $ab = a \cdot b = a^4 = (3^{1/4})^4 = 3$ .

5. 그러므로  $\log_9(ab) = \log_9 3 = \frac{1}{2}$ .

따라서 최종 정답은  $\frac{1}{2}$ 이며, 선택지는 (2)이다.

난이도: 하

## 문제 7

두 곡선  $y = x^2 + 3$ ,  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 과 직선  $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 무엇인가? [3 점]

### 보기

1.  $\frac{18}{5}$
2.  $\frac{7}{2}$
3.  $\frac{17}{5}$
4.  $\frac{33}{10}$
5.  $\frac{16}{5}$

### 그림 설명

- 좌표축은 수평  $x$  축과 수직  $y$  축으로, 원점  $O$ 에서 교차한다. 축 끝에는 각각  $x, y$  라벨이 있다.
- 포물선  $y = x^2 + 3$ 은 위로 열린 포물선으로  $y$  축 대칭이며, 그래프 좌상단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 포물선  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 은 아래로 열린 포물선으로  $y$  축 대칭이며, 그래프 좌하단 가지 근처에 라벨이 있다.
- 두 포물선은  $y$  축 위의 한 점에서 서로 접하며, 그 점은 원점 위쪽에 있다.
- 직선  $x = 2$ 는  $y$  축의 오른쪽에 있는 수직선이며, 선 아래쪽 근처에 라벨이 있다.
- 음영 영역은 원쪽 경계가 두 포물선의 접점, 오른쪽 경계가 직선  $x = 2$ 이고, 위쪽 경계는  $y = x^2 + 3$ , 아래쪽 경계는  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이다. 위치는  $y$  축의 오른쪽,  $x = 2$ 의 원쪽에 있다.

## 해설 7

### 풀이

- 두 곡선의 교점은  $x^2 + 3 = -\frac{1}{5}x^2 + 3 \Rightarrow \frac{6}{5}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3$ 이다. -  $x > 0$ 에서  $x^2 + 3 > -\frac{1}{5}x^2 + 3$  이므로, 구간  $0 \leq x \leq 2$ 에서 위쪽 곡선은  $y = x^2 + 3$ , 아래쪽 곡선은  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이다. - 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^2 [(x^2 + 3) - (-\frac{1}{5}x^2 + 3)] dx = \int_0^2 \frac{6}{5}x^2 dx = \frac{6}{5} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{5}.$$

### 정답

5 번,  $\frac{16}{5}$

## 8. 문제

조건:  $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0$ , 그리고  $\cos(\pi - \theta) > 0$ . 물음:  $\sin \theta$ 의 값은? [3 점]

선택지:

1.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. 0

4.  $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

5.  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

난이도: 하

---

## 8. 해설

정답: (1)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

1.  $\sin \theta + 3 \cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = -3 \cos \theta.$

2. 항등식  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면  $9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10}.$

3. 따라서  $|\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $|\sin \theta| = \frac{3}{\sqrt{10}}.$

4.  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta > 0 \Rightarrow \cos \theta < 0.$

5.  $\sin \theta = -3 \cos \theta$  이므로  $\cos \theta$ 가 음수일 때  $\sin \theta$ 는 양수. 따라서  $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$

최종 정답: (1)

## 문항 9

### 가정

$a$ 는 양수.

### 함수

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 4.$$

### 조건

직선  $y = 5$  가 곡선  $y = f(x)$ 에 접한다.

### 질문

$f(2)$ 의 값은?

### 배점

[4 점]

### 선택지

1. (1) 11
2. (2) 12
3. (3) 13
4. (4) 14
5. (5) 15

### 난이도

중

---

## 문항 9 해설

### 정답

선택지 (4), 값은 14.

## 해설

1. 접선  $y = 5$ 가  $y = f(x)$ 에 접한다는 것은 어떤  $c$ 에 대해  $f(c) = 5$ 이고, 접선의 기울기가 0이므로  $f'(c) = 0$ 임을 뜻한다.
2.  $f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 3(x - a)(x + 3a)$ 이므로 임계점은  $x = a, x = -3a$ 이다.
3. 따라서  $f(a) = 5$  또는  $f(-3a) = 5$  중 하나여야 한다.
  - $f(a) = a^3 + 3aa^2 - 9a^2a + 4 = 4 - 5a^3$ . 만약  $f(a) = 5$ 이면  $4 - 5a^3 = 5 \Rightarrow a^3 = -\frac{1}{5}$ 가 되어  $a > 0$ 와 모순이다.
  - $f(-3a) = -27a^3 + 27a^3 + 27a^3 + 4 = 27a^3 + 4$ .  $27a^3 + 4 = 5 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$  (단,  $a > 0$ ).
4.  $a = \frac{1}{3}$ 에서  $f(2)$ 를 계산하면

$$f(2) = 8 + 12a - 18a^2 + 4 = 12 + 12a - 18a^2 = 12 + \frac{12}{3} - 18 \cdot \frac{1}{9} = 12 + 4 - 2 = 14.$$

## 최종 답

14 (선택지 (4))

## 문항 10

### 주어진 정보

- 상수  $a$ 는  $a > 1$ 이다.
- 곡선:  $y = a^x - 2$ .
- 제 1 사분면의 곡선 위 점  $A$ 를 잡는다.  $A$ 의  $x$  좌표를  $t$ 라 두면  $A = (t, a^t - 2)$ 이며  $t > 0$ ,  $a^t - 2 > 0$ 이다.
- $A$ 를 지나는  $y$  축에 평행한 직선:  $x = t$ .
  - $x = t$ 가  $x$  축 ( $y = 0$ )과 만나는 점:  $B = (t, 0)$ .
  - $x = t$ 가 곡선  $y = a^x - 2$ 의 점근선  $y = -2$ 와 만나는 점:  $C = (t, -2)$ .
- 길이
  - $AB$ 는  $x = t$  위의 수직선분이므로  $|AB| = (a^t - 2) - 0 = a^t - 2$ .
  - $BC$ 는  $x = t$  위의 수직선분이므로  $|BC| = 0 - (-2) = 2$ .
- 조건:  $|AB| = |BC|$ .
- 점  $O$ 는 원점  $O = (0, 0)$ 이다.
- 삼각형  $AOC$ 의 넓이는 8이다.
- $OB$ 는 원점에서  $B$ 까지의 거리로,  $B$ 가  $x$  축 위에 있으므로  $|OB| = t$ 이다.

### 질문

$a \times |OB|$ 의 값, 즉  $a \times t$ 를 구하여라.

### 선택지

- (1)  $2^{13/6}$
- (2)  $2^{7/3}$
- (3)  $2^{5/2}$
- (4)  $2^{8/3}$
- (5)  $2^{17/6}$

### 배점

[4 점]

## 문항 10 해설

### 정답

(3)  $2^{5/2}$

### 해설

1.  $|AB| = a^t - 2, |BC| = 2$  이고  $|AB| = |BC|$  이므로  $a^t - 2 = 2 \Rightarrow a^t = 4$  이다.

2. 삼각형  $AOC$ 의 넓이를 이용한다.  $O = (0, 0), a^t = 4$  이므로  $A = (t, 2), C = (t, -2)$  이다. 두 벡터  $\overrightarrow{OA} = (t, 2), \overrightarrow{OC} = (t, -2)$ 의 행렬식은  $t \cdot (-2) - 2 \cdot t = -4t$  이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} |t \cdot (-2) - 2 \cdot t| = \frac{1}{2} \cdot 4t = 2t$$

이다. 조건에 따라  $2t = 8$  이므로  $t = 4$  이다.

3.  $a^t = 4, t = 4$  이므로  $a^4 = 4$  이고  $a = 2^{1/2}$  이다.

4. 따라서  $a \times |OB| = a \times t = 2^{1/2} \times 4 = 4\sqrt{2} = 2^{5/2}$  이다.

### 검증

$a = \sqrt{2} > 1, t = 4 > 0, A = (4, 2)$  는 제 1 사분면에 있고  $|AB| = 2 = |BC|$  로 모든 조건을 만족한다.

## 11. 문제

시각  $t = 0$  일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점  $P$ 가 있다. 실수  $k$ 에 대하여 시각  $t$  ( $t \geq 0$ ) 일 때 점  $P$ 의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4 점]

### 보기

- ㄱ.  $k = 0$  이면, 시각  $t = 1$  일 때 점  $P$ 의 위치는  $\frac{13}{3}$  이다.
- ㄴ.  $k = 3$  이면, 출발한 후 점  $P$ 의 운동 방향이 한 번 바뀐다.
- ㄷ.  $k = 5$  이면, 시각  $t = 0$ 에서  $t = 2$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리는 3이다.

### 선택지

- ① ㄱ
  - ② ㄱ, ㄴ
  - ③ ㄱ, ㄷ
  - ④ ㄴ, ㄷ
  - ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ
- 

## 11. 해설

1. 일반식: 위치 함수  $s(t) = \int v(t) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{k}{2}t^2 + 4t$  이고, 원점 출발이므로  $s(0) = 0$  이다.
2. (ㄱ)  $k = 0$  이면  $v(t) = t^2 + 4$  이므로  $s(1) = \frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1 = \frac{13}{3}$  이다. 따라서 참이다.
3. (ㄴ)  $k = 3$  이면  $v(t) = t^2 - 3t + 4$  이다. 판별식  $\Delta = 9 - 16 < 0$  이므로 모든  $t$ 에서  $v(t) > 0$  이다. 따라서 운동 방향 변화가 없으므로 거짓이다.
4. (ㄷ)  $k = 5$  이면  $v(t) = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$  이다. 구간  $[0, 1]$ 에서  $v > 0$ , 구간  $(1, 2]$ 에서  $v < 0$  이므로 이동 거리는

$$\int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 |v(t)| dt = \int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 (-v(t)) dt = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3$$

이다. 따라서 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이며, 최종 정답은 ③(ㄱ, ㄷ)이다.

## 문제 12

등비수열  $\{a_n\}$  이

$$2(a_1 + a_4 + a_7) = a_4 + a_7 + a_{10} = 6$$

을 만족시킬 때,  $a_{10}$ 의 값은? [4 점]

1.  $\frac{22}{7}$

2.  $\frac{24}{7}$

3.  $\frac{26}{7}$

4.  $\frac{30}{7}$

5.  $\frac{32}{7}$

난이도: 중

---

## 해설 12

정답: 2 번,  $a_{10} = \frac{24}{7}$

1. 등비수열에서  $a_4 + a_7 + a_{10} = r^3(a_1 + a_4 + a_7)$  이다.

2. 주어진 조건에서  $a_1 + a_4 + a_7 = 3$ ,  $a_4 + a_7 + a_{10} = 6$  이므로  $r^3 = \frac{6}{3} = 2$  이다.

3.  $a_1 = \frac{3}{1+r^3+r^6} = \frac{3}{1+2+4} = \frac{3}{7}$  이다.

4. 따라서  $a_{10} = a_1 r^9 = \frac{3}{7} \cdot 2^3 = \frac{24}{7}$  이다.

## 문제 13

함수  $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여, 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, -6)$ 에서의 접선을  $l$ 이라 하고, 함수  $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(1, 6)$ 에서의 접선을  $m$ 이라 하자. 두 직선  $l, m$ 과  $y$  축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 얼마인가? [4 점]

1. 21
  2. 28
  3. 35
  4. 42
  5. 49
- 

## 해설 13

정답: 5

1. 함수  $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에 대하여  $f(1) = -6, f'(x) = 2x - 4$  이므로  $f'(1) = -2$  이다. 따라서 점  $(1, -6)$ 에서의 접선  $l$ 의 방정식은

$$y - (-6) = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x - 4$$

이고,  $y$  절편은  $(0, -4)$  이다.

2. 함수  $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 대하여 곱의 미분법을 적용하면

$$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$$

이다. 점  $x = 1$ 에서

$$g(1) = (1^3 - 2 \cdot 1)f(1) = (-1)(-6) = 6,$$

$$g'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2)f(1) + (1^3 - 2 \cdot 1)f'(1) = (1)(-6) + (-1)(-2) = -6 + 2 = -4$$

이므로, 점  $(1, 6)$ 에서의 접선  $m$ 의 방정식은

$$y - 6 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 10$$

이고,  $y$  절편은  $(0, 10)$  이다.

3. 두 직선  $l : y = -2x - 4, m : y = -4x + 10$ 의 교점을 구하면

$$-2x - 4 = -4x + 10 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7,$$

$$y = -2 \cdot 7 - 4 = -18$$

이다. 따라서 세 꼭짓점은  $A(0, -4), B(0, 10), C(7, -18)$  이다.

4. 넓이는  $y$  축을 밑변으로 보면 밑변의 길이는  $|10 - (-4)| = 14$ , 높이는 점  $C$ 에서  $y$  축까지의 거리  $|7| = 7$  이다. 따라서 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49$$

이다. (검산:  $\frac{1}{2}|7(-4 - 10)| = 49$ )

최종 정답: 49 (선택지 5)

난이도: 중

## 문항 14

### 그림 정보(정확한 기하 구성만 기술, 해설/추론 없음)

- 기본 도형과 길이/각
  - 직각삼각형  $ABC$ :  $AB = 3, BC = 4, \angle B = \pi/2$ .
  - 좌표 표현(인식 명확화를 위한 한 가지 일관된 배치):  $B = (0, 0), A = (-3, 0), C = (0, 4)$ . 그러면  $AC = 5$ .
  - 선분  $AB$ 를  $2 : 1$ 로 내분하는 점  $D$ :  $AD : DB = 2 : 1 \Rightarrow D = (-1, 0), AD = 2$ .
- 원과 교점
  - 원  $\omega_1$ : 중심  $A$ , 반지름  $AD = 2$ .
    - \* 직선  $AB$ 와의 교점:  $D$ 와  $F$ .  $F$ 는  $D$ 가 아닌 쪽의 교점  $\Rightarrow F = (-5, 0)$ .
    - \* 선분  $AC$ 와의 교점( $A$ 가 아닌 점)  $E \Rightarrow E = \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ .
  - 호  $EF$  위의 점  $G$ 를 잡되( $\omega_1$  위,  $D$ 를 포함하지 않는  $EF$  호),  $CG = 2\sqrt{6}$ .
  - 원  $\Omega$ : 세 점  $C, E, G$ 를 지나는 원(따라서  $\Omega \cap \omega_1 = \{E, G\}$ ).
  - 점  $H$ :  $\Omega$  위의 점이며  $\angle HCG = \angle BAC$ .
- 그림에 그려진 선/표기
  - $AB$ 는 수평선(그 위에  $F, A, D, B$  순서).  $BC$ 는 수직선( $B$ 에서 위로, 끝점  $C$ ).  $AC$ 는  $A$ 에서  $C$ 로 향하는 사선이며  $E$ 를 지난다.
  - $\omega_1$ (중심  $A$ , 반지름 2)과  $\Omega$ (세 점  $C, E, G$ 를 지나는 원)가 서로 교차하며 교점은  $E$ 와  $G$ .
  - $\Omega$  내부에는 현  $HC, HG, GC$ 가 그려져 있고, 현  $CE$ 도 표시됨.
  - $B$ 에서의 직각 표시( $\angle ABC = 90^\circ$ )가 있음.
  - $A$ 에서 작은 호 표시로  $\angle BAC$ 가 표기됨.
  - $C$ 에서 작은 호 표시로  $\angle HCG$ 가 표기되어  $\angle HCG = \angle BAC$  조건을 시각화.
- 선택지(길이)  $GH$ 
  1.  $\frac{6\sqrt{15}}{5}$
  2.  $\frac{38\sqrt{10}}{25}$
  3.  $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
  4.  $\frac{32\sqrt{15}}{25}$
  5.  $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

## 해설

1. 좌표 배치:  $B = (0, 0), A = (-3, 0), C = (0, 4) \Rightarrow AC = 5. D = (-1, 0), AD = 2$ . 원  $\omega_1$ :  $(x+3)^2 + y^2 = 4$ .
2. 점  $E$ :  $AC$  위에서  $AE = 2$  이므로 매개변수  $t = \frac{2}{5}$ . 따라서

$$E = A + \frac{2}{5}(C - A) = \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad CE = \frac{3}{5}|AC| = 3.$$

3. 점  $G$ :  $\omega_1$  위이며  $CG = 2\sqrt{6}$ . 두 원  $(x+3)^2 + y^2 = 4$  와  $x^2 + (y-4)^2 = 24$ 의 교점은 직선  $6x + 8y + 13 = 0$  위에 있다. 해를 구하면

$$x = \frac{-27 \pm 4\sqrt{15}}{10}, \quad y = \frac{-13 - 6x}{8}.$$

호  $EF$ 에 해당하는 점은

$$G = \left( \frac{-27 - 4\sqrt{15}}{10}, \frac{4 + 3\sqrt{15}}{10} \right).$$

4. 중심  $A$ , 반지름 2의 원 위에서  $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{12}{10}, \frac{16}{10}\right)$ ,  $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{3-4\sqrt{15}}{10}, \frac{4+3\sqrt{15}}{10}\right)$ . 내적  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$  이므로

$$\cos \angle EAG = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

따라서 현  $EG$ 의 길이

$$EG = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\angle EAG}{2} = 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \angle EAG}{2}} = 4 \sqrt{\frac{1 - 1/4}{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 삼각형  $CEG$ 의 변 길이:  $CE = 3$ ,  $CG = 2\sqrt{6}$ ,  $EG = \sqrt{6}$ . 헤론 공식을 사용하면 넓이  $\Delta$ 는

$$s = \frac{3 + 2\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{2}, \quad \Delta = \sqrt{s(s-3)(s-2\sqrt{6})(s-\sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

외접반지름  $R$ 은

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{4 \cdot (3\sqrt{15}/4)} = \frac{4\sqrt{15}}{5}.$$

6. 점  $H$ 는  $\Omega$  위에서  $\angle HCG = \angle BAC$ . 직각삼각형  $ABC$ 에서  $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$ . 원의 성질(현의 길이 공식)로부터

$$GH = 2R \sin \angle HCG = 2 \cdot \frac{4\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}.$$

따라서 정답은 4 번이다. 선택지는 (4)에 해당한다.

## 문항 15

### 문제

다음과 같이 정의된 함수들이 주어진다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$a > 0$  인 양수에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} ax + a, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x < 1 \\ ax - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

또한

$$h(x) = \int_0^x (g(t) - f(t)) dt$$

로 정의한다.

정의:  $h(x)$  가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는  $a$ 의 최댓값을  $k$  라 한다.  $a = k$  일 때  $k + h(3)$  의 값을 구하라.  
[4 점]

### 선택지

1.  $\frac{9}{2}$

2.  $\frac{11}{2}$

3.  $\frac{13}{2}$

4.  $\frac{15}{2}$

5.  $\frac{17}{2}$

## 문항 15

### 해설

정답: 4 번

1.  $g$  와  $f$  가 연속이므로  $h'(x) = g(x) - f(x)$  이다. 극값은  $h'(x) = 0$  에서 부호가 바뀌는 지점에서 만 생긴다.
2. 구간별  $h'(x)$  는 다음과 같다.

$$h'(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 0, \\ -x^2 + x = x(1-x), & 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + (a+1)x - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

특히  $x \in [-1, 1]$  에서는  $h'(x) \geq 0$  이고,  $x = 0, 1$  에서만 0 이 된다.  $x = 0$  에서는 좌우 부호가 모두 양이므로 극값이 없다.

3.  $x < -1$ 에서  $h'(x) = x^2 + ax + a$ 의 판별식은  $a^2 - 4a = a(a - 4)$  이다.

- $a < 4$ : 근이 없어서 항상 양이므로 극값이 생기지 않는다.
- $a = 4$ :  $(x + 2)^2$ 로 중근이 되어 부호 변화가 없으므로 극값이 생기지 않는다.
- $a > 4$ : 서로 다른 두 실근이 둘 다  $-1$ 보다 작고 부호가  $+ \rightarrow - \rightarrow +$ 로 바뀌어 이 구간에서 만 극값이 두 개 생긴다.

따라서 극값이 하나만 되려면 반드시  $a \leq 4$ 여야 한다.

4.  $x \geq 1$ 에서  $h'(x) = -x^2 + (a+1)x - a$ 를 본다.

- $0 < a < 1$ :  $x > 1$ 에서  $h'(x) < 0$ 이므로  $x = 1$ 에서  $+ \rightarrow -$ 로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다.
- $a = 1$ :  $h'(x) = -(x-1)^2 \leq 0$ 이므로 역시  $x = 1$ 에서 극값이 한 개 생긴다.
- $1 < a \leq 4$ :  $h'(x) = -(x-1)(x-a)$ 이므로  $(1, a)$ 에서는 양,  $x > a$ 에서는 음이다. 따라서  $x = a$ 에서 만  $+ \rightarrow -$ 로 바뀌어 극값이 한 개 생긴다.  $x = 1$ 에서는 부호 변화가 없다.

결론적으로  $0 < a \leq 4$ 에서 극값은 정확히 한 개이고,  $a > 4$ 에서는 이미 좌측에서 두 개가 생긴다. 따라서  $k = 4$ 이다.

5. 이제  $a = k = 4$  일 때  $h(3)$ 을 구한다.

$$\int_0^3 g(t) dt = \int_1^3 (4t - 4) dt = [2t^2 - 4t]_1^3 = 8,$$

$$\int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 (t^2 - t) dt = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

따라서  $h(3) = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$  이고,

$$k + h(3) = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}.$$

최종 정답: 4 번,  $\frac{15}{2}$

## 문항 16

### 문제

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 1$  이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = n^2 a_n + 1$  을 만족시킨다.  $a_3$  의 값을 구하시오. [3 점]

### 주어진 조건

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n^2 a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

---

## 문항 16 해설

### 정답

$$a_3 = 9$$

### 해설

1. 초기 값은  $a_1 = 1$  이다.
2.  $n = 1$  을 대입하면  $a_2 = 1^2 \cdot a_1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$  이다.
3.  $n = 2$  를 대입하면  $a_3 = 2^2 \cdot a_2 + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$  이다.

따라서  $a_3$  的 값을 9이다.

## 문항 17

### 문제

함수  $f(x) = 4x^3 - 2x$ 의 한 부정적분  $F(x)$ 에 대하여  $F(0) = 4$  일 때,  $F(2)$ 의 값을 구하시오.

### 배점

[3 점]

---

## 문항 17 해설

### 정답

16

### 해설

- 함수  $f(x) = 4x^3 - 2x$ 의 한 부정적분은 항별로 적분하여 다음과 같다.

$$F(x) = \int (4x^3 - 2x) dx = x^4 - x^2 + C.$$

- 조건  $F(0) = 4$ 를 대입하면  $C = 4$ 이다.

- 따라서  $F(2)$ 는 다음과 같다.

$$F(2) = 2^4 - 2^2 + 4 = 16 - 4 + 4 = 16.$$

최종 정답: 16

## 문항 18

다음 조건을 만족하는 삼각형  $\triangle ABC$ 에서 넓이를 구하시오. [3 점]

### 조건

- $|AB| = 5$
- $|AC| = 6$
- $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$

---

## 문항 18 해설

1. 삼각형의 넓이 공식  $S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle BAC)$  을 사용한다.
2.  $\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$  이고  $\angle BAC$ 는 삼각형의 내부각이므로  $\sin(\angle BAC) > 0$  이다. 따라서

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

3. 넓이는

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12.$$

따라서 삼각형  $\triangle ABC$ 의 넓이는 **12**이다.

난이도: 하

## 문제 19

$-2 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음 부등식

$$-k \leq 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8 \leq k$$

이 성립하도록 하는 양수  $k$ 의 최솟값을 구하시오. [3 점] 조건:  $k > 0$

---

## 해설 19

1. 함수  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ 에 대하여,  $-k \leq f(x) \leq k$ 가  $[-2, 2]$ 의 모든  $x$ 에서 성립하려면  $k$ 의 최솟값은

$$k = \max_{x \in [-2, 2]} |f(x)|$$

이다.

2. 도함수는  $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ 이므로 임계점을  $x = -2, 1$ 이고, 끝점  $x = -2, 2$ 와 함께 값을 계산한다.

$$f(-2) = 2(-8) + 3(4) - 12(-2) - 8 = 12,$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 - 8 = -15,$$

$$f(2) = 16 + 12 - 24 - 8 = -4.$$

3. 절댓값은 각각  $|f(-2)| = 12, |f(1)| = 15, |f(2)| = 4$ 이므로 구간  $[-2, 2]$ 에서의 최대값은 15이다.

따라서  $k$ 의 최솟값은 15이다. 정답: 15

## 문제 20

수열  $\{a_n\}$  이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1 = 7$
- 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10$$

다음은  $\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1}$  의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k$  이므로

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + [ ]$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n + a_{n+1} = 3 \times [ ]$$

(ㄱ)

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \quad (n \geq 2)$$

에서 양변에  $n = 2$ 를 대입하면

$$a_2 = [ ]$$

(ㄴ)

(ㄱ)과 (ㄴ)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = [ ]$$

위의 [가]에 알맞은 식을  $f(n)$ 이라 하고, [나], [다]에 알맞은 수를 각각  $p, q$ 라 할 때,  $\frac{p \times q}{f(12)}$ 의 값을 구하시오.

[4 점]

---

## 해설 20

1. 부분합  $S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$  가 주어졌으므로,  $n \geq 2$ 에서

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S(n+1) - S(n) = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \left[ \frac{1}{6}((n+1)^2 - n^2) - \frac{1}{6}((n+1) - n) \right] \\ &= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

따라서  $[ ] = f(n) = \frac{n}{3}$  이고, 정리하면  $2a_n + a_{n+1} = 3 \cdot \frac{n}{3} = n$  ( $n \geq 2$ ) 이다.

2.  $n = 2$ 를 부분합 식에 대입하면

$$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 2 + 10,$$

$$7 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3} + 10,$$

따라서  $a_2 = 10$  이므로  $[ ] = p = 10$  이다.

## 3. 구하려는 합은

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2}) = 7 + 10 + \sum_{k=1}^5 (2k + 1).$$

위에서  $2a_n + a_{n+1} = n$  을  $n = 2k + 1$ 에 적용하였다.

$$= 17 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11) = 17 + 35 = 52.$$

따라서  $[ ] = q = 52$  이다.

4.  $f(12) = \frac{12}{3} = 4$  으므로

$$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130.$$

정답: 130

## 문제 21

최고차항의 계수가 양수인 삼차 함수  $f(x)$  와 실수  $t$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x), & x < t, \\ f(x), & x \geq t \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수  $a$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$  의 값이 존재한다.
- (나)  $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$  의 값이 음수가 되도록 하는 자연수  $m$ 의 집합은  $\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\}$  이다.
- $g(-5)$ 의 값을 구하시오. (단,  $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$ ) [4 점]
- 

## 해설 21

### 1. 조건 (가)로부터의 기본 형태

$a = 0, 2$ 에서 우극한이 유한하게 존재하려면 분모  $x(x-2)$  가 0 이 되는 점에서 분자  $g(x)$  도 0 이어야 한다.  $g$  는 연속이므로  $g(0) = g(2) = 0$ , 따라서  $f(0) = f(2) = 0$  이다. 최고차항 계수가 양수인 삼차 함수  $f$  는

$$f(x) = a x(x-2)(x-b) \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}).$$

또한  $x = t$ 에서  $g$  가 연속이려면  $-f(t) = f(t)$  이어야 하므로  $f(t) = 0$ , 따라서

$$t \in \{0, 2, b\}.$$

아울러  $x \neq 0, 2$ 에서는

$$\frac{f(x)}{x(x-2)} = a(x-b), \quad \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(x-b), & x < t, \\ a(x-b), & x \geq t. \end{cases}$$

### 2. 집합 $M$ 의 정의와 경우 나누기

$M := \{m \in \mathbb{N} \mid \lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0\}$  라고 하자.  $t$ 의 값에 따라  $M$ 을 분석한다.

(1)  $t = 0$ 인 경우  $m \geq 1$ 에서  $x \rightarrow m^+$ 이면  $x \geq t$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b)$ 이다. 따라서

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid m < b\}.$$

$M$ 이 두 원소를 가지려면  $2 < b \leq 3$ 이고  $M = \{1, 2\}$ 이다. 한편  $t = 0$ 이면

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \quad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \quad -\frac{7}{2}g(1) = \frac{7}{2}a(b-1).$$

$\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\} = \{1, 2\}$ 를 만족시키는 배치를 풀어 보면

$$3a(1+b) = 1, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 2 \Rightarrow b = -8 \quad (2 < b \leq 3 \text{ 과 모순}),$$

$$3a(1+b) = 2, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 1 \Rightarrow b = \frac{2}{5} \quad (2 < b \leq 3 \text{ 과 모순}).$$

따라서  $t \neq 0$ .

(2)  $t = b$  인 경우  $x \rightarrow m+$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -a(m-b) = a(b-m) > 0, & m < b, \\ a(m-b) > 0, & m > b, \\ 0, & m = b. \end{cases}$$

즉, 항상 음수가 아니므로  $M = \emptyset$ . 이는 (나)와 모순이므로  $t \neq b$ .

(3)  $t = 2$  인 경우 이때는

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = -a(1-b) = a(b-1) = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(2-b), \quad \lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = a(m-b) (m \geq 3).$$

따라서 부호 조건은

$$m = 1 : a(b-1) < 0 \Leftrightarrow b < 1,$$

$$m = 2 : a(2-b) < 0 \Leftrightarrow b > 2,$$

$$m \geq 3 : a(m-b) < 0 \Leftrightarrow m < b.$$

$M$  이 두 원소가 되려면  $3 < b \leq 4$  이고  $M = \{2, 3\}$  뿐이다.

### 3. 조건 (나)로부터 매개변수 결정

(나)에 의해  $\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\} = \{2, 3\}$  이다.  $t = 2$  이므로

$$g(-1) = -f(-1) = 3a(1+b), \quad g(1) = -f(1) = -a(b-1), \quad -\frac{7}{2}g(1) = \frac{7}{2}a(b-1).$$

두 수의 배치를 나누어 풀면

$$3a(1+b) = 3, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{14}, \quad b = \frac{11}{3} \quad (3 < b \leq 4 \text{ 총족}),$$

$$3a(1+b) = 2, \quad \frac{7}{2}a(b-1) = 3 \Rightarrow b = -8 \quad (3 < b \leq 4 \text{ 와 모순}).$$

따라서  $a = \frac{3}{14}$ ,  $b = \frac{11}{3}$ ,  $t = 2$ . 또한  $g(-1) = 3$ ,  $-\frac{7}{2}g(1) = 2$ 로 서로 달라  $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$  을 만족한다.

### 4. 최종 계산

$-5 < t$  이므로  $g(-5) = -f(-5)$ . 계산하면

$$\begin{aligned} f(-5) &= a \cdot (-5)(-7)\left(-5 - \frac{11}{3}\right) = a \cdot 35 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right), \\ &= \frac{3}{14} \cdot 35 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right) = -65, \quad \therefore g(-5) = 65. \end{aligned}$$

최종 정답: 65

## 문제 22

다음 조건을 만족하는 두 곡선과 점들에 대하여,  $a \times b = \frac{q}{p}$  (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수) 일 때  $p + q$ 의 값을 구하시오.

### 조건

- 곡선 1:  $y = \log_{16}(8x + 2)$ .
- 점  $A = (a, b)$ 는 곡선 1 위의 점이다.
- 곡선 2:  $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ .
- 점  $B$ 는 곡선 2 위의 점이다.
- 점  $A$ 와 점  $B$ 는 모두 제 1 사분면에 있다.
- 점  $A$ 를 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점  $A' = (b, a)$ 가 직선  $OB$  위에 있다. 여기서  $O$ 는 원점이다.
- 선분  $AB$ 의 중점  $M$ 의 좌표는  $M = \left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$  이다.
- $a \times b = \frac{q}{p}$ , 여기서  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.
- 구하는 것:  $p + q$ .

### 난이도

중상

---

## 해설 22

### 풀이

1. 점  $A(a, b)$ 가 곡선  $y = \log_{16}(8x + 2)$  위에 있으므로  $b = \log_{16}(8a + 2)$ 이고, 이를 지수형으로 바꾸면  $16^b = 8a + 2$ , 즉  $4^{2b} = 8a + 2$ 이다.

2. 중점  $M\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$ 를 이용하면

$$x_B = \frac{77}{4} - a, \quad y_B = \frac{133}{4} - b.$$

3.  $A' = (b, a)$ 가 직선  $OB$  위에 있으므로 원점과 일직선인 두 점의 좌표는 같은 비례를 가진다. 어떤  $t > 0$ 에 대하여

$$(b, a) = t(x_B, y_B)$$

로 둘 수 있으므로

$$x_B = \frac{b}{t}, \quad y_B = \frac{a}{t}.$$

4. 점  $B$ 가 곡선  $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$  위에 있으므로

$$\frac{a}{t} = 4^{\frac{b}{t}-1} - \frac{1}{2} \iff 4^{\frac{b}{t}} = \frac{4a}{t} + 2.$$

앞서 얻은  $4^{2b} = 8a + 2$ 와 꼴을 비교하면  $t = \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

5. Ⓡ 제  $x_B = \frac{77}{4} - a = \frac{b}{t}$ ,  $y_B = \frac{133}{4} - b = \frac{a}{t}$  에  $t = \frac{1}{2}$  를 대입하면

$$a + \frac{b}{t} = \frac{77}{4}, \quad b + \frac{a}{t} = \frac{133}{4} \Rightarrow a + 2b = \frac{77}{4}, \quad 2a + b = \frac{133}{4}.$$

이를 풀면  $a = \frac{63}{4}$ ,  $b = \frac{7}{4}$  이다.

6. 따라서  $ab = \frac{63}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{441}{16} = \frac{q}{p}$  이므로  $p = 16$ ,  $q = 441$ ,  $p + q = 457$  이다.

## 최종 정답

457

## 선택과목: 기하

### 문제 23

#### 문항 23

두 벡터  $\vec{a} = (4, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, -1)$ 에 대하여  $\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은?

[2 점]

1. 1
  2. 2
  3. 3
  4. 4
  5. 5
- 

#### 해설

#### 문항 23

정답: ③ 3

#### 풀이

1. 성분별로 더하면  $\vec{a} + \vec{b} = (4 + (-1), 1 + (-1)) = (3, 0)$ 이다.
2. 모든 성분의 합은  $3 + 0 = 3$ 이다.

따라서 선택지 ③이 정답이다.

난이도: 하

## 문항 24

### 문항 정보

- 배점: 3 점
- 형식: 객관식(단일 정답)
- 난이도: 하

### 문제

포물선  $y^2 = 12(x - 2)$ 의 초점과 준선 사이의 거리는?

### 선지

1. 6
  2. 7
  3. 8
  4. 9
  5. 10
- 

## 해설 24

### 정답

1) 6 (① 6)

### 풀이

1. 주어진 포물선은  $y^2 = 12(x - 2)$  이므로 표준형  $y^2 = 4p(x - x_0)$  와 비교하여  $4p = 12 \Rightarrow p = 3$  이다.
2. 정점은  $(2, 0)$ 이고, 초점은  $(2 + p, 0) = (5, 0)$ , 준선은  $x = 2 - p = -1$  이다.
3. 초점과 준선 사이의 거리 =  $|5 - (-1)| = 6$  이며, 일반적으로  $2p = 6$  이다.

따라서 정답은 ① 6이다.

## 문제 25

좌표공간의 점  $A(3, -\frac{3}{2}, -2)$ 를  $yz$  평면에 대하여 대칭이동한 점을  $B$ , 점  $A$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을  $C$ 라 할 때, 선분  $BC$ 의 길이는 무엇인가? [3 점]

- (1)  $\sqrt{21}$
  - (2)  $\sqrt{22}$
  - (3)  $\sqrt{23}$
  - (4)  $2\sqrt{6}$
  - (5) 5
- 

## 해설 25

정답: 5 (선택지 (5))

1.  $yz$  평면에 대한 대칭은  $x$  좌표의 부호만 바뀌므로 점  $B$ 는 다음과 같다.

$$B = \left(-3, -\frac{3}{2}, -2\right).$$

2. 원점에 대한 대칭은 모든 좌표의 부호가 바뀌므로 점  $C$ 는 다음과 같다.

$$C = \left(-3, \frac{3}{2}, 2\right).$$

3. 따라서 벡터  $BC$ 는 다음과 같다.

$$C - B = (0, 3, 4).$$

4. 선분  $BC$ 의 길이는 다음과 같다.

$$|BC| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

따라서 최종 정답은 5이다.

## 문항 26

### 문제

양수  $a$ 에 대하여, 두 초점이  $F, F'$ 인 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$  위의 점  $(a, \sqrt{2}a)$ 에서의 접선이  $y$ 축과 만나는 점을  $P$ 라 하자.  $|PF| \times |PF'| = 8$  일 때,  $a$ 의 값은? [3 점]

### 선택지

1.  $\sqrt{3}$
  2.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
  3.  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
  4.  $2\sqrt{3}$
  5.  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
- 

## 문항 26 해설

정답: 2

1. 주어진 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$  은  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 로 정리된다. 따라서 초점은  $F(0, a\sqrt{2}), F'(0, -a\sqrt{2})$  이다 ( $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ ).
2. 점  $(a, \sqrt{2}a)$ 에서의 접선: 암시적 미분으로  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$  이므로 기울기  $m = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  이다. 접선은  $y - \sqrt{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - a)$  이므로,  $y$ 축과의 교점은  $x = 0$ 에서  $y = \sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$  이고, 따라서  $P = \left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$  이다.
3. 거리:  $P$ 와  $F, F'$ 는  $x$  좌표가 같으므로  $PF = |a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{a}{\sqrt{2}}, PF' = |-a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = \frac{3a}{\sqrt{2}}$  이다. 따라서 곱은  $PF \cdot PF' = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3a^2}{2}$  이다.
4. 조건  $\frac{3a^2}{2} = 8$  을 만족하므로  $a^2 = \frac{16}{3}, a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  ( $a > 0$ ) 이다.

따라서 최종적으로  $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  이며, 정답은 (2)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  이다.  
난이도: 중

## 문항 27

### 문제

원기둥의 아랫면 원  $C_1$  과 윗면 원  $C_2$  의 지름은 모두 5이다. 점  $A, B$ 는  $C_1$  위에 있고  $|AB| = 5$ 이다. 점  $C, D$ 는  $C_2$  위에 있고  $|CD| = 3$ 이다. 또한  $|AD| = |BC|$ 이다. 점  $H$ 는  $D$ 에서  $C_1$ 을 포함하는 평면으로 내린 수선의 발이다. 사각형  $ABCD$ 의 넓이는 삼각형  $ABH$ 의 넓이의 4배이다. 원기둥의 높이를 구하여라.

### 선택지

label=(0)  $3\sqrt{2}$

lbbel=(0)  $\sqrt{19}$

lcbel=(0)  $2\sqrt{5}$

lbel=(0)  $\sqrt{21}$

lebel=(0)  $\sqrt{22}$

## 문항 27 해설

### 정답

(4)  $\sqrt{21}$

### 풀이

- 반지름을  $r = 2.5$ 라고 두고, 아랫면  $C_1$ 을 평면  $z = 0$ , 윗면  $C_2$ 를 평면  $z = h$ 에 둔다. 지름  $AB = 5$  이므로  $A = (r, 0, 0), B = (-r, 0, 0)$ 로 잡는다.
- 윗면의 현 길이가  $|CD| = 3$ 이므로 중심각을  $\theta$ 라고 하면

$$2r \sin \frac{\theta}{2} = 3 \Rightarrow 5 \sin \frac{\theta}{2} = 3,$$

따라서  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ 이다.

- 윗면에서  $C, D$ 의 각도를  $\varphi \mp \frac{\theta}{2}$ 로 두자. 그러면

$$|AD|^2 = 2r^2(1 - \cos(\varphi + \frac{\theta}{2})) + h^2, \quad |BC|^2 = 2r^2(1 + \cos(\varphi - \frac{\theta}{2})) + h^2.$$

조건  $|AD| = |BC|$ 에서

$$\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) = -\cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \cos \varphi \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

여기서  $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} \neq 0$ 이므로  $\cos \varphi = 0$ , 즉  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (또는  $\frac{3\pi}{2}$ )이다.

- 따라서 좌표는

$$x_C = +r \sin \frac{\theta}{2} = 1.5, \quad x_D = -1.5, \quad y_C = y_D = r \cos \frac{\theta}{2} = 2, \quad z_C = z_D = h.$$

점  $H$ 는  $D$ 의 아래평면 수선의 발이므로  $H = (x_D, y_D, 0) = (-1.5, 2, 0)$ 이다.

5. 삼각형  $ABH$ 의 밑변은  $|AB| = 5$ , 높이  $|y_D| = 2$  이므로

$$S(\triangle ABH) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5.$$

6. 사각형  $ABCD$ 는 평행한 변  $AB$ 와  $CD$ 를 갖는 공간 사다리꼴이다. 두 직선  $AB$ 와  $CD$  사이의 거리는  $\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{2^2 + h^2} = \sqrt{h^2 + 4}$  이다. 따라서

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(5+3) \cdot \sqrt{h^2 + 4} = 4\sqrt{h^2 + 4}.$$

7. 면적 조건  $S(ABCD) = 4S(\triangle ABH)$ 에서

$$4\sqrt{h^2 + 4} = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow \sqrt{h^2 + 4} = 5 \Rightarrow h^2 = 21 \Rightarrow h = \sqrt{21}.$$

따라서 원기둥의 높이는  $\sqrt{21}$  이며, 정답은 (4) 이다.

## 문항 28

### 조건

사면체  $ABCD$ 에서 다음을 만족한다.

- 길이:  $|AB| = |CD| = 4$ ,  $|BC| = |BD| = 2\sqrt{5}$ .
- 점  $H$ : 점  $A$ 에서 직선  $CD$ 에 내린 수선의 발. 즉,  $AH \perp CD$ ,  $H \in CD$ , 그리고  $|AH| = 4$ .
- 두 평면  $ABH$ 와  $BCD$ 는 서로 수직이다. 즉,  $ABH \perp BCD$ .
- 점  $G$ : 삼각형  $\triangle ABH$ 의 무게중심.
- 구  $S$ : 중심이  $G$ 이고, 평면  $ACD$ 에 접한다.
- 집합  $T$ : 구  $S$  위의 점  $P$  중에서  $\angle APG = \pi/2$ 를 만족하는 모든 점들의 궤적.

### 물음

도형  $T$ 를 평면  $ABC$  위로 직교 정사영한 도형의 넓이를 구하시오.

### 보기

$$\text{label}=(0) \frac{\pi}{7}$$

$$\text{lbbel}=(0) \frac{\pi}{6}$$

$$\text{lcbel}=(0) \frac{\pi}{5}$$

$$\text{ldbel}=(0) \frac{\pi}{4}$$

$$\text{lebel}=(0) \frac{\pi}{3}$$

## 문항 28 해설

정답: (4)

1. 좌표 설정: 직선  $CD$ 를  $x$ 축으로, 점  $H$ 를 원점으로 둔다.  $AH \perp CD$ ,  $|AH| = 4$ 이므로  $A = (0, 0, 4)$ ,  $H = (0, 0, 0)$ . 또한  $|CD| = 4$ 이므로  $C = (c, 0, 0)$ ,  $D = (d, 0, 0)$ ,  $d - c = 4$ .
2. 점  $B = (x, y, z)$ 라 하자.  $|BC| = |BD|$ 이므로  $B$ 는  $CD$ 의 수직 이등분 평면 위에 있어  $x = (c+d)/2 =: M$ 이다.
3. 평면 수직 조건: 평면  $ABH$ 와  $BCD$ 가 수직이므로, 법선 벡터  $(AH \times BH)$ 와  $(\mathbf{e}_x \times BH)$ 가 서로 수직이다. 여기서  $AH = (0, 0, 4)$ ,  $BH = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$ 이다. 계산하면

$$AH \times BH = (-4y, 4x, 0), \quad \mathbf{e}_x \times BH = (0, -z, y), \quad (AH \times BH) \cdot (\mathbf{e}_x \times BH) = -4xz = 0.$$

따라서  $xz = 0$ 이다. 만약  $z = 0$ 이면,  $|AB|^2 = M^2 + y^2 + 16 = 16$ 에서  $M = y = 0$ 가 되어  $|BC|^2 = 4$ 가 되어 모순이다. 그러므로  $z \neq 0$ 이므로  $x = 0$ 이고,  $x = M$ 이므로  $M = 0$ 이다. 따라서  $H$ 는  $CD$ 의 중점이며  $C = (-2, 0, 0)$ ,  $D = (2, 0, 0)$ 이다.

4. 거리 조건으로  $B$  결정:

$$|BC| = 2\sqrt{5} \Rightarrow y^2 + z^2 = 16, \quad |AB| = 4 \Rightarrow y^2 + (z - 4)^2 = 16.$$

두 식의 차로  $z = 2$ , 이어서  $y^2 = 12$  이므로  $B = (0, \pm 2\sqrt{3}, 2)$ . 편의상  $B = (0, 2\sqrt{3}, 2)$ 를 취한다.

5. 무게중심  $G$ :  $G = \frac{A + B + H}{3} = (0, 2\sqrt{3}/3, 2)$ .

6. 구  $S$ : 중심  $G$ , 평면  $ACD$ 에 접한다. 점들  $A, C, D$ 가 모두  $y = 0$  위에 있으므로 plane  $ACD : y = 0$ . 반지름은  $r = \text{dist}(G, y = 0) = |G_y| = 2\sqrt{3}/3$ .

7. 벡터  $AG$ :  $AG = G - A = (0, 2\sqrt{3}/3, -2)$ ,  $|AG|^2 = (2\sqrt{3}/3)^2 + (-2)^2 = 16/3$ , 따라서  $|AG| = 4/\sqrt{3}$ .

8. 집합  $T$ :  $AP \perp GP$ 을 만족하는 구  $S$  위의 점들의 집합은  $A$ 의 극평면과  $S$ 의 교선인 원이다. 이 원의 평면은  $AG$ 에 수직이고,  $G$ 로부터의 거리  $d = \frac{r^2}{|AG|} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  이다. 원의 반지름은

$$R^2 = r^2 - d^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow R = 1, \quad |T| = \pi R^2 = \pi.$$

9. 평면  $ABC$ 로의 직교 정사영 넓이: 원의 면적에 두 평면 사이의 각  $\theta$ 에 대한  $|\cos \theta|$ 를 곱한다. 평면  $T$ 의 법선은  $AG$ , 평면  $ABC$ 의 법선은  $n_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  이다. 여기서

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2\sqrt{3}, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -4),$$

$$n_{ABC} = (-8\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{3}), \quad n_{ABC} \cdot AG = -\frac{16\sqrt{3}}{3}, \quad |n_{ABC}| = 16, \quad |AG| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

따라서

$$|\cos \theta| = \frac{|n_{ABC} \cdot AG|}{|n_{ABC}| |AG|} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{16 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}.$$

그러므로 정사영 넓이는  $|T| \cdot |\cos \theta| = \pi \cdot \frac{1}{4} = \pi/4$  이다.

최종 정답: (4)  $\pi/4$

## 문항 29

다음 조건을 만족하는 도형에서  $k^2$ 의 값을 구하라. [4 점]

- 초점이  $F(p, 0)$  ( $p > 0$ )이고 준선이  $x = -p$ 인 포물선 위의 점 중 제 1 사분면에 있는 점  $A$ 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을  $H$ 라 한다.
- 두 초점이  $x$ 축 위에 있고 세 점  $F, A, H$ 를 지나는 타원의  $x$ 좌표가 양수인 초점을  $B$ 라 한다.
- 삼각형  $AHB$ 의 둘레 길이는  $p + 27$ , 넓이는  $2p + 12$ 이다.
- 선분  $HF$ 의 길이를  $k$ 라 할 때  $k^2$ 의 값을 구하라.

추가 설명:

- 포물선은 오른쪽으로 열리고,  $A = (x_A, y_A)$ 는 제 1 사분면에 있다. 수선의 발  $H$ 는  $x = -p$  위에 있으며  $AH \perp (x = -p)$  이므로  $H = (-p, y_A)$ 이다.
- 타원의 두 초점은  $x$ 축 위에 있고,  $F = (p, 0)$  또한 타원 위의 점이다.  $x$ 좌표가 양수인 초점을  $B = (x_B, 0)$ 라 한다.

## 문항 29 해설

정답을 구하기 위해 좌표를  $A = (x, y)$  ( $x > 0, y > 0$ ),  $H = (-p, y)$ 로 두고 풀이한다.

### 1. 포물선의 성질과 기본식

포물선  $y^2 = 4px$  이므로  $y^2 = 4px$ 이다. 또한 포물선의 정의에 의해  $AF = AH = x + p$ 이다.

### 2. 넓이 조건

삼각형  $AHB$ 에서  $AH$ 는 수평선이므로 높이는  $y$ 이고, 밑변은  $AH = x + p$ 이다. 넓이가  $2p + 12$ 이므로

$$\frac{1}{2}(x + p)y = 2p + 12 \Rightarrow (x + p)y = 4p + 24.$$

이를  $y^2 = 4px$ 와 합치면

$$px(x + p)^2 = 4(p + 6)^2. \quad (1)$$

### 3. 둘레 조건과 타원의 반장축

둘레  $AH + AB + HB = p + 27$ 에서  $AH = x + p$ 이므로

$$AB + HB = 27 - x. \quad (2)$$

세 점  $A, H$ 가 타원 위에 있고  $y$ 좌표가 같으므로 타원의 중심을  $(h, 0)$ 라 하면  $x_A + x_H = 2h$ 이어서

$$h = \frac{x - p}{2}.$$

또한 타원에서 임의의 점까지 두 초점까지의 거리 합은  $2a$ 이므로, 식 (2)에서

$$2a = 27 - x. \quad (3)$$

#### 4. 점 $F$ 가 타원 위에 있을 조건

점  $F = (p, 0)$  가 타원과  $x$  축에서 만나는 점이어야 하므로  $p = h \pm a$  이다. 식  $h = \frac{x-p}{2}$ ,  $a = \frac{27-x}{2}$  를 대입하면

$$\frac{3p - x}{2} = \pm \frac{27 - x}{2}.$$

- + 인 경우:  $3p - x = 27 - x \Rightarrow p = 9$ .

- - 인 경우:  $x = \frac{3p+27}{2}$ . 이때  $A$ 가 타원 위의 점이 되려면  $\frac{(x-h)^2}{a^2} < 1$  이어야 하나,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{\left(\frac{x+p}{2}\right)^2}{\left(\frac{27-x}{2}\right)^2} = \frac{(x+p)^2}{(27-x)^2} \geq 1 \quad (p > 0),$$

로 모순이므로 불가하다.

따라서  $p = 9$  이다.

#### 5. $x, y$ 의 결정

식 (1)에  $p = 9$  를 대입하면

$$9x(x+9)^2 = 900 \Rightarrow x(x+9)^2 = 100.$$

이는  $x^3 + 18x^2 + 81x - 100 = 0 = (x-1)(x^2 + 19x + 100)$  이므로  $x = 1$  만 실수 해이다. 따라서

$$y^2 = 4px = 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 \Rightarrow y = 6.$$

#### 6. 구하는 값 $k^2$

$H = (-p, y)$ ,  $F = (p, 0)$  이므로

$$HF^2 = (2p)^2 + y^2 = 4p^2 + y^2 = 4 \cdot 9^2 + 36 = 324 + 36 = 360.$$

따라서 최종적으로  $k^2 = 360$  이다.

## 문항 30

좌표평면에서 길이가  $10\sqrt{2}$ 인 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 원 위의 두 점  $P, Q$ 가

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = 2 |\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다.  $|\overrightarrow{PB}| = 14$  일 때,  $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \frac{q}{p}$  이다.  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단,  $|\overrightarrow{QB}| > 0$ 이고,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4 점]

---

## 문항 30 해설

정답: 221

1.  $AB$ 가 지름이므로  $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ 이다. 따라서  $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$ 이다.

2.  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{PQ}$ 를 이용하면

$$0 = \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ}) \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ 이므로  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 이고, 따라서

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

3. 주어진 식을 전개하면

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} + |\overrightarrow{PB}|^2 = 2 |\overrightarrow{PQ}|^2.$$

위 식과 비교하여  $|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2$ 이므로  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PB}| = 14$ 이다.

4.  $AB = 10\sqrt{2}$ 이므로 반지름은  $r = 5\sqrt{2}$ 이다. 또한  $\triangle APB$ 는 직각삼각형이므로  $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = |AB|^2$ 에서  $|\overrightarrow{PA}|^2 = 200 - 196 = 4$ , 따라서  $|\overrightarrow{PA}| = 2$ 이다.

5.  $PB$ 가 만드는 중심각을  $\theta$ 라 하자. 현의 길이는  $2r \sin(\theta/2)$ 이므로

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{|PB|}{2r} = \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{49}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$|PQ| = |PB|$ 이므로  $PQ$ 의 중심각도  $\theta$ 이고, 따라서  $BQ$ 의 중심각은  $2\theta$ 이다. 그러면

$$|QB| = 2r \sin \theta = 2r \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{14\sqrt{2}}{5},$$

$$|QB|^2 = \frac{392}{25}.$$

6.  $\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$ 이고  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ}$ 이므로

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB}.$$

또한  $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}$ ,  $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PQ}|$  이므로

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} - |\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{QB}|^2}{2} - |\overrightarrow{PQ}|^2 = -\frac{|\overrightarrow{QB}|^2}{2}.$$

따라서

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \frac{|\overrightarrow{QB}|^2}{2} = \frac{392}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{196}{25} = \frac{q}{p}.$$

그러므로  $p = 25$ ,  $q = 196$  이고, 최종적으로  $p + q = \mathbf{221}$  이다.

## 선택과목: 미분과 적분

### 문항 번호: 23

#### 문제

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{2x}$  의 값은?

#### 보기

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

#### 난이도

하

---

### 문항 번호: 23

#### 정답

3 (③)

#### 해설

1. 극한을 곱의 형태로 분해한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan(6x)}{6x} \right) \cdot \left( \frac{6x}{2x} \right).$$

2. 여기서  $u = 6x$  라 하면  $u \rightarrow 0$  일 때  $\frac{\tan u}{u} \rightarrow 1$  이므로 첫 항의 극한은 1이다.
3. 둘째 항은  $\frac{6x}{2x} = 3$  ( $x \neq 0$ ) 이므로 극한은 3이다.
4. 따라서 전체 극한값은  $1 \cdot 3 = 3$ 이다.

#### 난이도

하

## 문항 24

다음을 구하시오:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$$

주의: 제곱근의 범위는  $\sin x - \sin^3 x$  까지이며,  $dx$ 는 루트 밖에 있음.

### 선택지

1.  $\frac{1}{6}$
  2.  $\frac{1}{3}$
  3.  $\frac{1}{2}$
  4.  $\frac{2}{3}$
  5.  $\frac{5}{6}$
- 

## 문항 24 해설

1.  $\sin x - \sin^3 x = \sin x(1 - \sin^2 x) = \sin x \cdot \cos^2 x.$
2. 구간  $[0, \pi/2]$ 에서  $\cos x \geq 0$  이므로  $\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\sin x \cos^2 x} = \cos x \cdot \sqrt{\sin x}.$
3. 치환  $u = \sin x, du = \cos x dx$ 로 두면

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{\sin x} dx = \int_{u=0}^1 u^{1/2} du = \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

4. 따라서 정답은 선택지 4이며, 값은  $\frac{2}{3}$ 이다.

최종 정답: ④  $\frac{2}{3}$

## 문항 25

### 조건

수열  $\{a_n\}$  이 모든 자연수  $n$ 에 대하여 다음을 만족한다:

$$\sqrt{9n^2 - 5} + 2n < a_n < 5n + 1.$$

### 질문

다음 극한의 값을 구하시오:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2}.$$

[3 점]

### 선택지

1. (1)  $\frac{1}{2}$
2. (2)  $\frac{3}{2}$
3. (3)  $\frac{5}{2}$
4. (4)  $\frac{7}{2}$
5. (5)  $\frac{9}{2}$

### 난이도

중

---

## 문항 25 해설

### 정답

(3)  $\frac{5}{2}$

### 해설

1.  $n > 0$  이므로 양변을  $n$ 으로 나누면

$$\sqrt{9 - \frac{5}{n^2}} + 2 < \frac{a_n}{n} < 5 + \frac{1}{n}.$$

$n \rightarrow \infty$ 에서 좌우가 모두 5로 수렴하므로, 끼워 넣기 정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 5.$$

2. 분자와 분모를  $n^2$ 로 나누면

$$\frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} = \frac{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n} + 5 - \frac{2}{n^2}}.$$

따라서  $n \rightarrow \infty$ 에서  $\frac{a_n}{n} \rightarrow 5$ ,  $\frac{2}{n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$ 므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} = \frac{5^2}{5+5} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

3. 따라서 정답은 (3)  $\frac{5}{2}$ 이다.

난이도

중

## 문제 26

그림과 같이 곡선  $y = \sqrt{x + x \ln x}$  와  $x$  축 및 두 직선  $x = 1, x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체 도형이 있다. 이 입체도형을  $x$  축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는 무엇인가? [3 점] 밑면 영역은 다음과 같다.

$$R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x + x \ln x}\}.$$

보기:

1.  $\frac{\sqrt{3}(3+8 \ln 2)}{16}$

2.  $\frac{\sqrt{3}(5+12 \ln 2)}{24}$

3.  $\frac{\sqrt{3}(1+12 \ln 2)}{16}$

4.  $\frac{\sqrt{3}(1+2 \ln 2)}{4}$

5.  $\frac{\sqrt{3}(1+9 \ln 2)}{12}$

## 해설 26

1. 단면이 정삼각형이며,  $x$  가 고정될 때 밑면의  $y$  방향 길이는  $s(x) = \sqrt{x + x \ln x}$  이다. 정삼각형의 넓이는

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} [s(x)]^2$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (x + x \ln x).$$

2. 부피는

$$V = \int_1^2 A(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^2 (x + x \ln x) dx.$$

3. 적분 계산:

$$\int_1^2 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = (2 \ln 2 - 1) - \left( 0 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

따라서

$$\int_1^2 (x + x \ln x) dx = \frac{3}{2} + \left( 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) = 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$

4. 부피는

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 2 \ln 2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}(3+8 \ln 2)}{16}.$$

최종 정답: (1)  $\frac{\sqrt{3}(3+8 \ln 2)}{16}$ .

## 문항 27

매개변수  $t$ 로 나타내어진 곡선

$$x = e^{4t}(1 + \sin^2(\pi t)), \quad y = e^{4t}(1 - 3\cos^2(\pi t))$$

을  $C$ 라 하자. 곡선  $C$ 가 직선  $y = 3x - 5e$ 와 만나는 점을  $P$ 라 할 때, 곡선  $C$  위의 점  $P$ 에서의 접선의 기울기는 무엇인가? [3 점]

- (1)  $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$
- (2)  $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$
- (3)  $\frac{3\pi}{\pi+8}$
- (4)  $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$
- (5)  $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

난이도: 중

---

## 문항 27 해설

정답: (2)

1. 교점 조건 이용. 직선  $y = 3x - 5e$  와의 교점에서  $y - 3x = -5e$  이다. 한편 매개변수식에서

$$\begin{aligned} y - 3x &= e^{4t}(1 - 3\cos^2(\pi t)) - 3e^{4t}(1 + \sin^2(\pi t)) \\ &= e^{4t}\left[(1 - 3) - 3(\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t))\right] = e^{4t}(-2 - 3) = -5e^{4t}. \end{aligned}$$

따라서  $-5e^{4t} = -5e$  이므로  $e^{4t} = e$ , 곧  $4t = 1$  이고  $t = \frac{1}{4}$  이다.

2. 접선의 기울기 계산. 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = e^{4t}\left[4(1 + \sin^2(\pi t)) + \pi \sin(2\pi t)\right], \quad \frac{dy}{dt} = e^{4t}\left[4(1 - 3\cos^2(\pi t)) + 3\pi \sin(2\pi t)\right].$$

따라서 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4(1 - 3\cos^2(\pi t)) + 3\pi \sin(2\pi t)}{4(1 + \sin^2(\pi t)) + \pi \sin(2\pi t)}.$$

3.  $t = \frac{1}{4}$ 에서  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 따라서  $\sin^2 = \cos^2 = \frac{1}{2}$  이고  $\sin(2\pi \cdot \frac{1}{4}) = 1$  이다. 대입하면

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1/4} = \frac{4\left(1 - 3 \cdot \frac{1}{2}\right) + 3\pi \cdot 1}{4\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \pi \cdot 1} = \frac{-2 + 3\pi}{6 + \pi} = \frac{3\pi - 2}{\pi + 6}.$$

4. 유효성 확인.  $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1/4} = e^{4 \cdot (1/4)}(6 + \pi) = e(6 + \pi) > 0$  이므로 기울기 정의가 가능하다.

따라서 최종 접선의 기울기는  $\frac{3\pi - 2}{\pi + 6}$ 이며, 정답은 (2)이다.

## 문제 28

함수  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$  가 주어진다.

양수  $t$ 에 대하여, 점  $(s, f(s))$  ( $s > 0$ )에서  $y$ 축에 내린 수선의 발과, 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(s, f(s))$ 에서의 접선이  $y$ 축과 만나는 점 사이의 거리가  $t$ 가 되도록 하는  $s$ 의 값을  $g(t)$ 라 하자.  $\int_{1/2}^{27/4} g(t) dt$ 의 값을 무엇인가?

[4 점]

보기:

1.  $\frac{161}{12} + \ln 3$

2.  $\frac{40}{3} + \ln 3$

3.  $\frac{53}{4} + \ln 2$

4.  $\frac{79}{6} + \ln 2$

5.  $\frac{157}{12} + \ln 2$

난이도: 중상

## 해설 28

정답: 5)  $\frac{157}{12} + \ln 2$

1. 도함수를 구한다.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

2. 점  $(s, f(s))$ 에서  $y$ 축에 내린 수선의 발은  $(0, f(s))$ 이고, 접선의 방정식은  $y - f(s) = f'(s)(x - s)$  이므로  $y$  절편은

$$y = f(s) - sf'(s)$$

이다. 두 점 사이의 거리는

$$t = |f(s) - (f(s) - sf'(s))| = |sf'(s)|.$$

3.  $s > 0$ 에서  $f'(s) = \frac{s^2}{1+s} > 0$  이므로

$$t = sf'(s) = \frac{s^3}{1+s}.$$

이를  $T(s) = \frac{s^3}{1+s}$  라 두면,

$$T'(s) = \frac{s^2(3+2s)}{(1+s)^2} > 0 \quad (s > 0)$$

이므로  $T$ 는 증가 함수이고  $g(t)$ 는  $T$ 의 역함수로 유일하게 정의된다.

4. 역함수 적분 공식을 적용한다.

$t = T(s)$  라 할 때

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = [s t]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} T(s) ds,$$

여기서  $t_1 = \frac{1}{2}$ ,  $t_2 = \frac{27}{4}$ ,  $s_1 = g\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $s_2 = g\left(\frac{27}{4}\right)$  이며  $t = T(s) = \frac{s^3}{1+s}$ 이다.

5. 양 끝에서의  $s$  값을 구한다.

$$\frac{1}{2} = \frac{s^3}{1+s} \iff 2s^3 = 1 + s \Rightarrow s = 1,$$

$$\frac{27}{4} = \frac{s^3}{1+s} \iff 4s^3 = 27(1+s) \Rightarrow s = 3.$$

따라서  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 3$ 이다.

6. 각 항을 계산한다.

$$\text{먼저 } st = s \cdot \frac{s^3}{1+s} = \frac{s^4}{1+s} \text{ 이므로}$$

$$[st]_1^3 = \frac{3^4}{1+3} - \frac{1^4}{1+1} = \frac{81}{4} - \frac{1}{2} = \frac{79}{4}.$$

또한

$$\int T(s) ds = \int \frac{s^3}{1+s} ds = \int \left(s^2 - s + 1 - \frac{1}{1+s}\right) ds = \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s - \ln(1+s) + C.$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_1^3 T(s) ds &= \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \ln 4\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 - \ln 2\right) \\ &= \left(\frac{15}{2} - \ln 4\right) - \left(\frac{5}{6} - \ln 2\right) \\ &= \frac{20}{3} - \ln 2. \end{aligned}$$

7. 결론을 얻는다.

$$\int_{1/2}^{27/4} g(t) dt = ([st]_1^3) - \int_1^3 T(s) ds = \frac{79}{4} - \left(\frac{20}{3} - \ln 2\right) = \frac{157}{12} + \ln 2.$$

따라서 정답은 5)  $\frac{157}{12} + \ln 2$ 이다.

난이도: 중상

## 문제 29

다음을 만족하는 수열을 생각하자.

- 등차수열  $\{a_n\}$ : 첫째 항과 공차가 같은 수열이다. 즉  $a_1$  이 공차와 같고,  $a_1 \neq 0$  이다.
- 등비수열  $\{b_n\}$ .

또한 어떤 자연수  $k$ 가 존재하여,  $i = 1, 2, 3$ 에 대하여

$$b_{k+i} = \frac{1}{a_i} - 1.$$

다음 부등식을 만족한다.

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30.$$

이때

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{q}{p}$$

(여기서  $p, q$ 는 서로소인 자연수) 일 때,  $p + q$ 의 값을 구하라.

배점: [4 점]

---

## 해설

1. 등차수열의 성질: 첫째 항과 공차가 같으므로  $a_n = na_1$  이다.

2. 등비수열의 공비  $r$ 을 두 가지로 나타내면 다음과 같다.

$$r = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{a_2} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{\frac{1}{2a_1} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)},$$

$$r = \frac{b_{k+3}}{b_{k+2}} = \frac{\frac{1}{a_3} - 1}{\frac{1}{a_2} - 1} = \frac{\frac{1}{3a_1} - 1}{\frac{1}{2a_1} - 1} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)}.$$

이를 같게 두고 정리하면

$$\frac{1 - 2a_1}{2(1 - a_1)} = \frac{2(1 - 3a_1)}{3(1 - 2a_1)} \implies 3(1 - 2a_1)^2 = 4(1 - a_1)(1 - 3a_1) \implies 4a_1 - 1 = 0,$$

따라서  $a_1 = \frac{1}{4}$  이다. 이때  $r = \frac{1}{3}$ , 그리고

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_1} - 1 = 4 - 1 = 3, \quad b_n = b_{k+1} r^{k+1-n} = 3^{k+2-n},$$

특히  $b_1 = 3^{k+1}$  이다.

3. 주어진 부등식을 위해 두 합을 각각 구한다. 먼저  $a_n = \frac{n}{4}$  이므로

$$a_n a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{16}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n(n+1)} = 16.$$

또한  $\{b_n\}$ 의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}b_1.$$

따라서

$$0 < \frac{3}{2}b_1 - 16 < 30 \implies \frac{32}{3} < b_1 < \frac{92}{3}.$$

$b_1 = 3^{k+1}$  이므로 가능한 값은  $k = 2$  이고  $b_1 = 27$ 이다.

4. 구하는 값을  $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 이다. 여기서  $a_2 = 2a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ,  $b_2 = b_1r = 27 \cdot \frac{1}{3} = 9$ 이다. 짝수항의 합은 공비  $r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{b_2}{1-r^2} = \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{81}{8}.$$

따라서

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{8} = \frac{81}{16} = \frac{q}{p}.$$

$p = 16, q = 81$  이므로  $p + q = 97$ 이다.

5. 검증:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 16 = \frac{49}{2} \in (0, 30)$$

이므로 조건을 만족한다.

최종 정답: 97.

## 문항 30

다음은 실수 전체  $\mathbb{R}$ 에서 증가하는 연속 함수  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(x)$ 에 대한 조건이다.

### 역함수의 정의

모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- $|x| \leq 1$  일 때:  $4(f^{-1}(x))^2 = x^2(x^2 - 5)^2$ .
- $|x| > 1$  일 때:  $|f^{-1}(x)| = e^{|x|-1} + 1$ .

### 정의

- 임의의 실수  $m$ 에 대하여, 기울기가  $m$ 이고 점  $(1, 0)$ 을 지나는 직선  $L_m$ :  $y = m(x - 1)$ . -  $g(m)$ : 직선  $L_m$ 과 곡선  $y = f(x)$ 의 교점의 개수.

### 추가 조건

함수  $g(m)$ 은  $m = a, m = b$  ( $a < b$ )에서 불연속이다.

### 구하는 값

$$g(a) \times \left( \lim_{m \rightarrow a^+} g(m) \right) + g(b) \times \left( \frac{\ln b}{b} \right)^2.$$

### 참고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

### 배점

[4 점]

---

## 문항 30 해설

### 개요

$f$ 는 실수 전체에서 증가하고 연속이므로 역함수  $f^{-1}$ 도 증가하고 연속이다. 이하에서  $y$ 를 역함수의 입력 변수로 사용한다.

### 1. 역함수 $f^{-1}(y)$ 의 구체적 형태

- $|y| \leq 1$  일 때,  $4(f^{-1}(y))^2 = y^2(y^2 - 5)^2$  이고  $f^{-1}(0) = 0$ , 단조성을 고려하면

$$f^{-1}(y) = \frac{y(5 - y^2)}{2} \quad (-1 \leq y \leq 1).$$

- $y > 1$  일 때,  $|f^{-1}(y)| = e^{y-1} + 1$  이고  $f^{-1}(y) > 0$  이므로

$$f^{-1}(y) = e^{y-1} + 1 \quad (y > 1).$$

- $y < -1$  일 때,  $|f^{-1}(y)| = e^{-y-1} + 1$  이고  $f^{-1}(y) < 0$  이므로

$$f^{-1}(y) = -(e^{-y-1} + 1) \quad (y < -1).$$

## 2. 교점 수의 방정식

직선  $L_m : y = m(x - 1)$  과 곡선  $y = f(x)$  의 교점의 개수는

$$y = m(f^{-1}(y) - 1)$$

의 해의 개수와 같다.  $m \neq 0$  에서  $s = 1/m$  이라 두면

$$f^{-1}(y) = sy + 1$$

로 쓸 수 있다. 또한  $m = 0$  이면  $y = 0$  과의 교점이 하나이므로  $g(0) = 1$  이다.

## 3. 경우 분석

- $m < 0$  ( $s < 0$ ): 증가 함수  $f^{-1}(y)$  와 기울기 음수의 직선  $x = sy + 1$  은 항상 정확히 한 점에서 만난다. 따라서  $g(m) = 1$  이다.
- $m > 0$  ( $s > 0$ ): 해의 개수 변화는 접선이 생길 때 또는 경계에서 일어난다. 접선 조건은

$$f^{-1}(y) = sy + 1, \quad (f^{-1})'(y) = s$$

을 동시에 만족하는 것이다.

–  $|y| \leq 1$  에서  $(f^{-1})'(y) = \frac{5-3y^2}{2}$  이고

$$f^{-1}(y) - y(f^{-1})'(y) = y^3.$$

접선 조건으로부터  $y^3 = 1$  이어서  $y = 1$  만 가능하다. 경계점  $y = 1$  에서의 접촉은 교점 수를 바꾸지 않는다.

- $y > 1$  에서는  $(f^{-1})'(y) = e^{y-1}$  이다. 접선 조건을 동시에 풀면  $y = 1$  만 나오므로  $(1, \infty)$  에서는 접선이 생기지 않는다.
- $y < -1$  에서는

$$f^{-1}(y) = -(e^{-y-1} + 1) = sy + 1 \iff T(y) := e^{-y-1} + sy + 2 = 0.$$

여기서

$$T'(y) = -e^{-y-1} + s,$$

$$T'(y) = 0 \iff e^{-y-1} = s \iff y_0 = -1 - \ln s,$$

$$T_{\min} = T(y_0) = 2 - s \ln s.$$

따라서

$$s \ln s < 2 \Rightarrow 해 없음, \quad s \ln s = 2 \Rightarrow 중근 1 개, \quad s \ln s > 2 \Rightarrow 해 2 개.$$

$s^* \ln s^* = 2$  를 만족하는 유일한 양의 수  $s^*$  를 두면,  $b = 1/s^*$  에서 해의 개수가 바뀐다.

#### 4. 함수 $g(m)$ 의 값과 불연속점

정리하면

$$g(m) = \begin{cases} 1, & m < 0, \\ 1, & m = 0 \quad (\lim_{m \rightarrow 0^+} g(m) = 3), \\ 3, & 0 < m < b, \\ 2, & m = b, \\ 1, & m > b, \end{cases}$$

이므로 불연속점은  $m = 0$  과  $m = b$  이다. 따라서  $a = 0, b = 1/s^*$  이다.

#### 5. 값 계산

$s^* \ln s^* = 2, b = 1/s^*$  이므로

$$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln(1/s^*)}{1/s^*} = -s^* \ln s^* = -2.$$

따라서

$$g(a) \times \left( \lim_{m \rightarrow a^+} g(m) \right) + g(b) \times \left( \frac{\ln b}{b} \right)^2 = 1 \times 3 + 2 \times (-2)^2 = 11.$$

#### 최종 정답

정답: 11

## 선택과목: 확률과 통계

### 문항 23

#### 문제

네 문자  $a, b, c, d$  중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2 점]

#### 선지

1. 56
  2. 60
  3. 64
  4. 68
  5. 72
- 

### 문항 23 해설

#### 정답

③ 64

#### 해설

1. 중복을 허용하고 순서를 고려하므로 각 자리마다 네 문자  $\{a, b, c, d\}$  중 하나를 택할 수 있다.
2. 따라서 경우의 수는  $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$  로 계산된다.
3. 주어진 선택지에서 64는 ③에 해당한다.

#### 난이도

하

## 문항 24

두 사건  $A, B$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B | A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = 1.$$

이 때  $P(B)$ 의 값은 무엇인가? [3 점]

1.  $\frac{7}{10}$
2.  $\frac{3}{4}$
3.  $\frac{4}{5}$
4.  $\frac{17}{20}$
5.  $\frac{9}{10}$

난이도: 하

---

## 해설 24

정답: 1

1. 교집합의 확률을 구한다.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

2. 합집합의 공식에 대입한다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이므로

$$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{10} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

3. 검산을 한다. 확률의 범위  $0 \leq P(B) \leq 1$ 를 만족한다.

따라서 최종 정답은  $\frac{7}{10}$ 이며, 선택지 1이다.

## 문제 25

주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5 개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5 개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2 개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2 개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은?

1.  $\frac{7}{15}$
  2.  $\frac{8}{15}$
  3.  $\frac{3}{5}$
  4.  $\frac{2}{3}$
  5.  $\frac{11}{15}$
- 

## 문제 25 해설

정답: 2

1. 전체 경우의 수는  ${}^{10}C_2 = 45$ 이다.
2. 같은 색인 경우의 수는 흰 공  ${}^5C_2 = 10$ , 검은 공  ${}^5C_2 = 10$ 이므로 합은 20이다.
3. 같은 수인 경우는 겹치는 숫자 2, 3, 4, 5에 대해 흰 공과 검은 공이 한 쌍씩 있으므로 4가지이다.
4. 같은 수인 경우는 색이 서로 다르므로 두 사건은 서로 배타적이다. 따라서 유리한 경우의 수는  $20+4 = 24$ 이다.
5. 확률은  $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ 이다. 따라서 최종 정답은  $\frac{8}{15}$ 이며, 선택지 번호는 2번이다.

## 문항 26

평균이  $m$ 이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의 추출하여 얻은 표본 평균을 이용하여 구한 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$1.2 \leq m \leq a$$

이다.  $a$ 의 값은? (단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $\mathbb{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [3 점]

- 1. 5.1
  - 2. 5.2
  - 3. 5.3
  - 4. 5.4
  - 5. 5.5
- 

## 해설 26

정답: ⑤

1. 신뢰구간 공식은  $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  이다.
2. 표준오차는  $\frac{5}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$  이다.
3. 마진오차는  $2.58 \cdot \frac{5}{6} = \frac{12.9}{6} = 2.15$  이다.
4. 하한이  $1.2 = \bar{x} - 2.15$  이므로  $\bar{x} = 1.2 + 2.15 = 3.35$  이다.
5. 따라서 상한은  $a = \bar{x} + 2.15 = 3.35 + 2.15 = 5.5$  이다.

최종 정답은  $a = 5.5$ 이며, 선택지는 ⑤이다.

난이도: 하

## 문항 27

### 문제

이산 확률 변수  $X$  가 가지는 값이 0 부터 4 까지의 정수이고

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{|2x-1|}{12} & (x = 0, 1, 2, 3) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

일 때,  $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right)$  의 값은? (단,  $a$  는 0 이 아닌 상수이다.) [3 점]

### 보기

1. 36
  2. 39
  3. 42
  4. 45
  5. 48
- 

## 문항 27 해설

### 정답

4 번

### 해설

1.  $x = 0, 1, 2, 3$  에서  $P(X = x) = \frac{|2x-1|}{12}$  이므로 각 확률은  $\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}$  이고 합은  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$  이다. 전체 합이 1 이 되어야 하므로  $a = P(X = 4) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} (\neq 0)$  이다.
2. 기대값:  $E[X] = \sum xP(X = x) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{12} = \frac{0 + 1 + 6 + 15 + 8}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ .
3. 제곱의 기대값:  $E[X^2] = \sum x^2P(X = x) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 16 \cdot 2}{12} = \frac{0 + 1 + 12 + 45 + 32}{12} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2}$ .
4. 분산:  $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$ .
5. 선형 변환의 분산 성질에 의해  $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \text{Var}(X)$  이다. 여기서  $a = \frac{1}{6}$  이므로  $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = 36$ , 따라서  $\text{Var}\left(\left(\frac{1}{a}\right)X\right) = 36 \cdot \frac{5}{4} = 45$ .

### 최종 정답

정답: 4 번 (45)

## 문항 28 [4 점]

### 문제

- 공 16개.
- 숫자 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 여섯 개의 빈 상자.
- 하나의 6면 주사위를 던지는 시행을 사용한다.

**규칙** 주사위를 한 번 던져 나온 눈을  $k$ 라 할 때,

- $k$ 가 홀수이면: 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.
- $k$ 가 짝수이면: 1부터 6까지 중  $k$ 의 약수가 적힌 각 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

**요구** 위 시행을 4번 반복한 후, 여섯 개 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 정확히 1개 더 많을 확률을 구하라.

### 선택지

1.  $\frac{1}{8}$
2.  $\frac{3}{16}$
3.  $\frac{1}{4}$
4.  $\frac{5}{16}$
5.  $\frac{3}{8}$

## 문항 28 해설

정답: (2)  $\frac{3}{16}$

1. 한 번의 시행에서 들어가는 공의 개수와 2, 3이 적힌 상자에의 기여를 정리하면 다음과 같다.

- $k \in \{1, 3, 5\}$  일 때: (2가 적힌 상자 +0, 3이 적힌 상자 +1), 전체 +3개  $\rightarrow$  홀수.
- $k = 2$ : (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +0), 전체 +2개  $\rightarrow$  짝수.
- $k = 4$ : (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +0), 전체 +3개  $\rightarrow$  홀수.
- $k = 6$ : (2가 적힌 상자 +1, 3이 적힌 상자 +1), 전체 +4개  $\rightarrow$  짝수.

2. 4번의 시행에서 각 유형의 빈도를  $X_0 (= \{1, 3, 5\})$ ,  $X_2$ ,  $X_4$ ,  $X_6$ 라 하면 총합은  $X_0 + X_2 + X_4 + X_6 = 4$ 이다. 이때

$$C_2 = X_2 + X_4 + X_6, \quad C_3 = X_0 + X_6.$$

전체 공의 개수의 홀짝은  $X_0 + X_4 \pmod{2}$ 로 결정된다.

3. 사건  $A: C_3 = C_2 + 1 \iff X_O = X_2 + X_4 + 1$ . 또한  $X_O + X_2 + X_4 + X_6 = 4$  이므로

$$X_6 = 4 - (X_O + X_2 + X_4) = 3 - 2(X_2 + X_4) \geq 0 \Rightarrow X_2 + X_4 \in \{0, 1\}.$$

조건  $B$ (전체 합 홀수):  $X_O + X_4$  가 홀수여야 한다. 가능한 경우는 다음과 같다.

- $X_2 = 0, X_4 = 0 \Rightarrow X_O = 1, X_6 = 3$ , 그리고  $X_O + X_4 = 1$ (홀수)  $\Rightarrow$  포함.
- $X_2 = 1, X_4 = 0 \Rightarrow X_O = 2, X_6 = 1, X_O + X_4 = 2$ (짝수)  $\Rightarrow$  제외.
- $X_2 = 0, X_4 = 1 \Rightarrow X_O = 2, X_6 = 1, X_O + X_4 = 3$ (홀수)  $\Rightarrow$  포함.

4. 확률 계산(주사위가 공정하다고 가정하여 각 눈의 확률을  $1/6$ 로 둔다). 한 시행에서  $\{1, 3, 5\}$  가 나올 확률은  $1/2$  이므로 다항분포를 사용한다.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1, 0, 0, 3) &= \frac{4!}{1! 0! 0! 3!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{108}, \\ \mathbb{P}(2, 0, 1, 1) &= \frac{4!}{2! 0! 1! 1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

따라서  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{108} + \frac{1}{12} = \frac{5}{54}$ .

5. 분모  $\mathbb{P}(B)$ : 한 시행이 홀수 개의 공을 더하는 확률은  $p = \mathbb{P}(\{1, 3, 5, 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . 4번 중 홀수 번 발생할 확률은

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1 - (1 - 2p)^4}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^4}{2} = \frac{40}{81}.$$

따라서 조건부 확률은

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{5}{54}}{\frac{40}{81}} = \frac{3}{16}.$$

즉,  $\frac{3}{16}$  이며, 선택지는 (2)이다.

## 문항 29

### 문제

6 이하의 자연수  $a$ 에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다. 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가  $a$ 보다 작거나 같으면 동전을 5 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고, 나온 눈의 수가  $a$ 보다 크면 동전을 3 번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다. 이 시행을 19200 번 반복하여 기록한 수가 3인 횟수를 확률변수  $X$  라 하자.  $E(X) = 4800$  일 때,  $P(X \leq 4800 + 30a)$  의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이  $k$ 이다.  $1000 \times k$ 의 값을 구하시오. [4 점]

다음 표준정규분포표를 사용하라.

| $z$ | $P(0 \leq Z \leq z)$ |
|-----|----------------------|
| 0.5 | 0.191                |
| 1.0 | 0.341                |
| 1.5 | 0.433                |
| 2.0 | 0.477                |
| 2.5 | 0.494                |
| 3.0 | 0.499                |

## 문항 29 해설

정답: 977

### 해설

- 한 시행에서 기록된 수가 3 일 확률을  $p$  라 하자. 그러면

$$p = \frac{a}{6} \cdot P(\text{5 번에서 } 3 \text{ 앞}) + \frac{6-a}{6} \cdot P(\text{3 번에서 } 3 \text{ 앞}) = \frac{a}{6} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{2^5} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{a}{6} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{a+4}{32}.$$

- $X$  는 19200 번 시행 중 기록이 3 인 횟수이므로  $X \sim \text{Bin}(19200, p)$  이고,  $E(X) = 19200p$  이다.  $E(X) = 4800$  이므로  $p = \frac{4800}{19200} = \frac{1}{4}$ . 따라서

$$\frac{a+4}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 4.$$

- 따라서  $X \sim \text{Bin}(19200, \frac{1}{4})$ . 평균은  $\mu = 19200 \cdot \frac{1}{4} = 4800$ , 분산은  $\sigma^2 = 19200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3600$ , 표준편차는  $\sigma = 60$  이다. 구하는 값은

$$k = P(X \leq 4800 + 30a) = P(X \leq 4800 + 120) = P(X \leq 4920).$$

- 정규 근사로 표준화하면

$$z = \frac{4920 - 4800}{60} = 2.0.$$

표에서  $P(0 \leq Z \leq 2.0) = 0.477$  이므로  $P(Z \leq 2.0) = 0.5 + 0.477 = 0.977$ . 따라서  $k \approx 0.977$  이고,  $1000 \times k = 977$ .

최종 정답: 977

## 문항 번호: 30 [4 점]

### 문제

비어 있는 주머니 10 개가 일렬로 놓여 있고, 공 8 개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

1. (가) 들어 있는 공의 개수가 1 인 주머니는 4 개 또는 6 개이다.
2. (나) 들어 있는 공의 개수가 2 인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

### 형식화

- 주머니는 일렬로 10 개이며, 위치는  $i = 1, 2, \dots, 10$ 이다.
  - 각 위치  $i$ 에 들어간 공의 개수는  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이다.
  - 총합 조건:  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 8$ .
  - 1 개 든 주머니의 개수 조건:  $\#\{i \mid a_i = 1\} \in \{4, 6\}$ .
  - 인접 금지 조건: 임의의  $i$ 에 대해  $a_i = 2$  이면, 가능한 이웃  $j \in \{i - 1, i + 1\}$ 에 대해  $a_j = 0$ 이다.
  - 선형 이웃 관계는  $(i, i + 1)$ 만 인접으로 본다.
- 

### 해설

#### 정답

262

#### 풀이

문제를 변수로 정리하면 각 위치  $i$ 에 대해  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ 이고, 총합은  $\sum_{i=1}^{10} a_i = 8$ 이다. 1 이 든 주머니 수를  $o$ , 2 가 든 주머니 수를  $t$ 라 하면  $o + 2t = 8$ 이며, (가) 조건으로  $o \in \{4, 6\}$ 이다. 따라서 가능한 쌍은  $(o, t) = (6, 1)$  또는  $(4, 2)$  두 가지이다. 또한  $a_i = 2$ 인 자리의 이웃은 반드시 0 이어야 한다. 2의 위치를 먼저 정하고, 그 후 1의 배치를 센다.

1.  $(o, t) = (6, 1)$ 인 경우
  - 2가 한 곳에만 들어간다.
    - 2가 끝자리(1 또는 10)에 있을 때: 강제 0은 이웃 1칸, 따라서 1을 놓을 수 있는 자리는  $10 - 1 - 1 = 8$  칸이므로  $\binom{8}{6}$ . 끝자는 2곳이므로 기여는  $2\binom{8}{6}$ .
    - 2가 내부 자리(2부터 9) 중 한 곳에 있을 때: 강제 0은 양옆 2칸, 따라서 1을 놓을 수 있는 자리는  $10 - 1 - 2 = 7$  칸이므로  $\binom{7}{6}$ . 내부 자리는 8곳이므로 기여는  $8\binom{7}{6}$ .

따라서 합은

$$2\binom{8}{6} + 8\binom{7}{6} = 2 \cdot 28 + 8 \cdot 7 = 56 + 56 = 112.$$

2.  $(o, t) = (4, 2)$  인 경우

2 가 든 두 주머니는 서로 인접할 수 없다. 두 2 의 배치가 주어졌을 때, 그들에 의해 강제되는 0 의 서로 다른 칸 수를  $s$  라 하자. 그러면 1 을 놓을 수 있는 자리는  $10 - 2 - s = 8 - s$  칸이므로 경우의 수는  $\binom{8-s}{4}$  이다.  $s$ 에 따라 2 의 배치를 분류하면 다음과 같다.

- $s = 2$ : 양 끝 1, 10에 두는 경우 1 가지, 끝과 거리 2 내부 쌍 1, 3, 8, 10 2 가지. 합 3 가지. 기여:  $3\binom{6}{4} = 3 \cdot 15 = 45$ .
- $s = 3$ : 끝과 내부(겹치지 않음) 쌍 12 가지, 내부끼리 거리가 2 인 쌍 6 가지. 합 18 가지. 기여:  $18\binom{5}{4} = 18 \cdot 5 = 90$ .
- $s = 4$ : 내부끼리 거리가 3 이상인 쌍 15 가지. 기여:  $15\binom{4}{4} = 15 \cdot 1 = 15$ .

따라서 합은

$$45 + 90 + 15 = 150.$$

최종 합계는  $112 + 150 = 262$  이므로, 정답은 **262**이다.

(검증)  $t = 2$ 에서 비인접 쌍의 총수는  $\binom{9}{2} = 36$ 이며, 위 분류에서  $3 + 18 + 15 = 36$ 으로 일치한다.