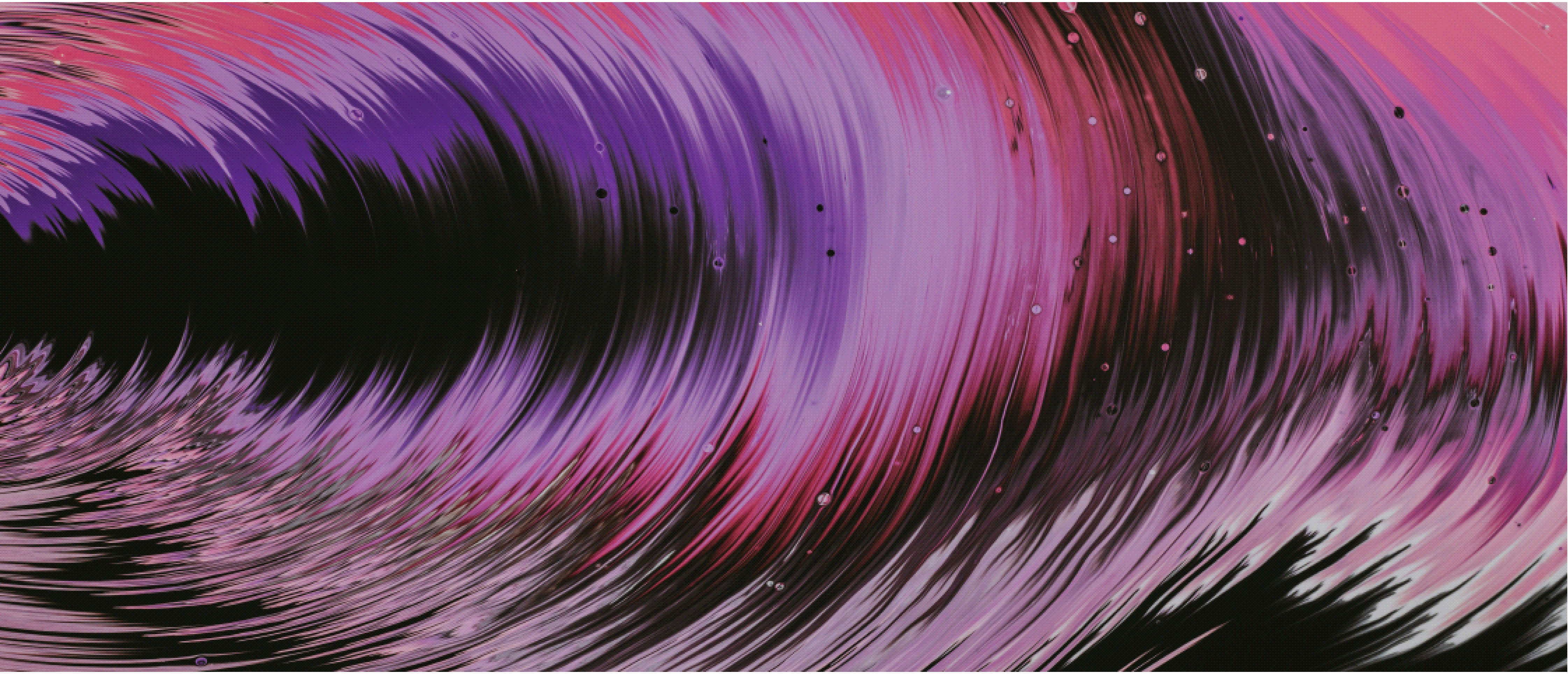
2026 규토 N제 시리즈 보충프린트 - 20일의 기적

이것만은 제발

ver. 2026 수능대비 미적분



유성민T

대치명인학원

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.미적분 문제지

1. 수열의 극한

Theme 1 극한값 계산

001

090 | 2016학년도 고3 9월 평가원 A형

양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

002 2025년 고3 5월 교육청 미적분

25. 두 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

003 2026학년도 고3 9월 평가원 미적분

25. 두 실수 a, b에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Theme 2 일반항이 포함된 수열의 극한

004

023

첫째항과 공차가 모두 $k\ (k\neq 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{S_n}=k^2$이다. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

Theme 3 수열의 극한의 대소 관계

005

075 | 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

006 2025년 고3 3월 교육청 미적분

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$0<x<3$일 때, x에 대한 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$이다.

$\lim_{n\to\infty} na_n$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

Theme 4 등비수열의 극한

007

074 | 2016학년도 수능 B형

첫째항이 1이고 공비가 $r(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{3}{4}$이다. r의 값을 구하시오. [3점]

008 2026 규토 모의평가 9월 미적분

25. 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+k\times 2^{2n}}{a_n}=\frac{3}{2}$$

일 때, $k\times a_3$의 값은? (단, k는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

009 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

29. 두 실수 a, $b(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 5 등비수열의 수렴 조건

010

037

등비수열 $\left\{\left(\frac{|x-1|-3}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수를 구하시오.

011 2025년 고3 3월 교육청 미적분

25. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n=\frac{(k^2+9)^n+30^n}{(10k)^n}$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Theme 6 x^n을 포함한 수열의 극한

012

039

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1}=4$$가 되도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.

013 2024년 고3 5월 교육청 미적분

26. 열린구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}$$

이 있다. $x>0$일 때, 방정식 $f(x)=2x-3$의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{41}{7}$ ② $\frac{43}{7}$ ③ $\frac{45}{7}$ ④ $\frac{47}{7}$ ⑤ 7

014

102 | 2021학년도 수능 가형

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

015 2026 규토 모의평가 5월 공통

28. 이차함수 $f(x)$에 대하여 열린구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^2+x)^{n+1}+f(x)\times 6^n}{(x^2+x)^n+6^n}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하다.
(나) $g(1)=6$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(4)$의 값은? [4점]

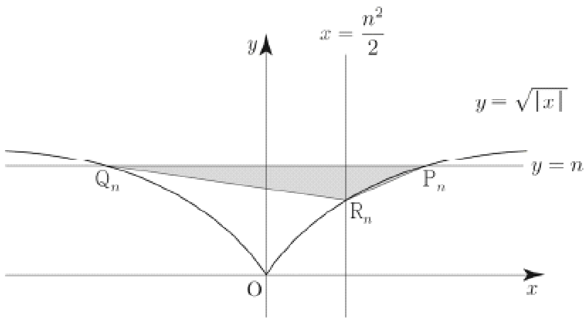
① 185 ② 190 ③ 195 ④ 200 ⑤ 205

Theme 7 수열의 극한의 활용

016

048

그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 곡선 $y=\sqrt{|x|}$와 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고, 직선 $x=\frac{n^2}{2}$이 곡선 $y=\sqrt{|x|}$와 만나는 점을 R_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n\times l_n}{S_n}=a+b\sqrt{2}$이다. ab의 값을 구하시오.
(단, 점 P_n의 x좌표는 점 Q_n의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.)



Theme 8 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} a_n$사이의 관계

017

056 | 2013학년도 수능 나형

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

018

062 | 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

019 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

25. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

020

006

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)=5$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}}{a_n+2}$의 값은?

① 10 ② $\frac{32}{3}$ ③ $\frac{34}{3}$ ④ 12 ⑤ $\frac{38}{3}$

Theme 9 급수의 성질

021

010

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5, \quad S_n=\frac{2n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(3S_n+2a_n-1)$의 값을 구하시오.

022

011

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$이고

모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\left(b_k-\frac{k^2}{n^3}\right)=\frac{n^2-1}{n^2+1}$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$의 값을 구하시오.

Theme 10 분수 꼴로 된 급수

023

017

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2+3n$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}$의 값을 구하시오.

024 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

025 2025학년도 고3 9월 평가원 미적분

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

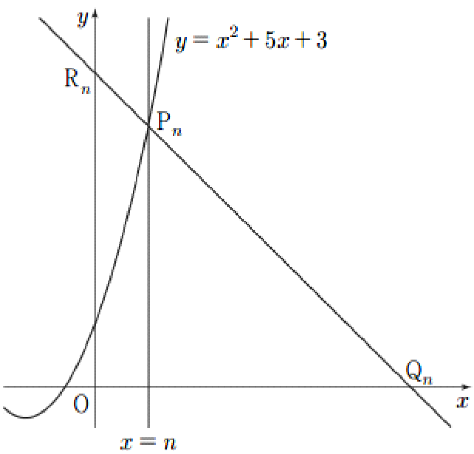
$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

026 2025년 고3 5월 교육청 미적분

26. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2+5x+3$과 직선 $x=n$이 만나는 점을 P_n이라 하고, 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q_n, y축과 만나는 점을 R_n이라 하자.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} - \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$



027 2026 규토 모의평가 5월 미적분

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{n^2}{4n^2-1}\right) = \frac{5}{4}$$

일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{a_n + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k - \frac{1}{4}\right)\right\}$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{8}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{15}{8}$ ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{19}{8}$

Theme 11 등비급수의 계산

028

061 | 2022학년도 수능 미적분

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

029

063 | 2011학년도 고3 6월 평가원 나형

수열 $\{a_n\}$이

$$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

030

066 | 2013학년도 고3 6월 평가원 가형

2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

031 2026 규토 모의평가 파이널 미적분

26. 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$과 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}=2$$

를 만족시킨다. $f'(1)=1$일 때, $f(a_2)$의 값은? [3점]

① $-\frac{59}{64}$ ② $-\frac{15}{16}$ ③ $-\frac{61}{64}$ ④ $-\frac{31}{32}$ ⑤ $-\frac{63}{64}$

Theme 12 급수 case분류형

032

079 2024학년도 수능 미적분

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right), \quad 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

033

081 2025학년도 수능 미적분

등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = \frac{40}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) = \frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times a_{m+k} \right) > \frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

034 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

29. 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\alpha\times\sin\dfrac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\dfrac{n}{2}\pi$ 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

035 2025년 고3 10월 교육청 미적분

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=5,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)=2$$

일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(100a_n-ma_{3n})$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 m의 최댓값을 구하시오. [4점]

036 2026 규토 모의평가 5월 미적분

29. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}|a_n| & (|a_n|\le 6)\\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & (|a_n|>6)\end{cases}$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5=6$

(나) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}(a_n-|a_n|)=-8$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=S$일 때, $-20\times S$의 값을 구하시오. [4점]

037 2026 규토 모의평가 9월 미적분

29. 정수 m에 대하여 $x\ge m$에서 방정식

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|=\cos\left\{\frac{\pi}{2}(x+1)\right\}+2$$

의 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 정수 m의 최솟값을 m_1라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-|a_n|)=\frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_2}{(a_{n+1}-a_n)^{n-1}}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_1}{a_na_{n+2}}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2. 미분법

Theme 13 무리수 e의 정의

038

069 | 2012학년도 고3 6월 평가원 가형

$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{6x}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\sqrt{e}$ ④ e ⑤ e^2

039

080 | 2017학년도 사관학교 가형

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^{\sec x}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

Theme 14 지수함수와 로그함수의 극한

040

009

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-e^{-x}}{2x}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

041

010

연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\{1+f(x)\}}{2x} = 12$$

일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{f(x)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

042

013

두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x + b}{\ln(2x+1)} = \ln 5 \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

을 만족시킬 때, 상수 $a+b$의 값을 구하시오.

043

088 2024학년도 고3 6월 평가원 미적분

$\lim_{x \to 0} \frac{2^{ax+b} - 8}{2^{bx} - 1} = 16$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

044

112 | 2011학년도 고3 6월 평가원 가형

세 양수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{x \to \infty} x^a \ln\left(b + \frac{c}{x^2}\right) = 2$$

일 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

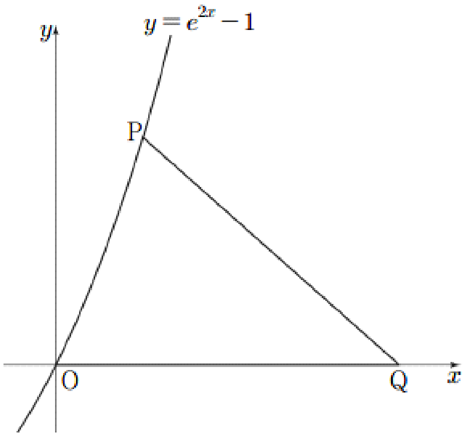
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Theme 15 지수함수와 로그함수의 극한 활용

045 2024년 고3 5월 교육청 미적분

25. 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)(t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

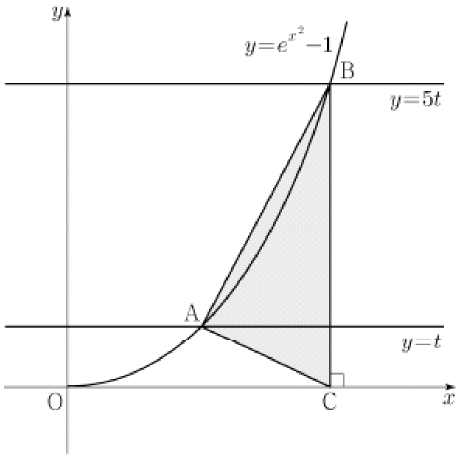
① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3



046 2025학년도 고3 6월 평가원 미적분

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x\geq 0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$ ④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



Theme 16 삼각함수의 덧셈정리

047

098 | 2022학년도 고3 9월 평가원 미적분

$2\cos\alpha = 3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

048

105 | 2022학년도 고3 6월 평가원 미적분

원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

049

101 | 2016학년도 고3 9월 평가원 B형

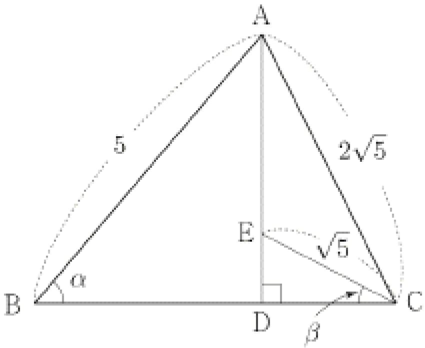
좌표평면에서 두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta=\frac{1}{6}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

050

120 | 2018학년도 수능 가형

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자.
선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$이다.
$\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

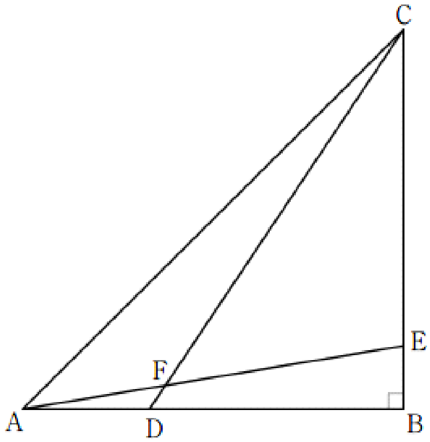
051 2024년 고3 7월 교육청 미적분

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$ 이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 AB 위의 점 D 와 선분 BC 위의 점 E 가

$$\overline{AD}=2\overline{BE}\quad (0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD 가 만나는 점을 F 라 하자. $\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$ 일 때, $\tan(\angle CDB)$ 의 값은?

(단, $\frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}$) [3점]

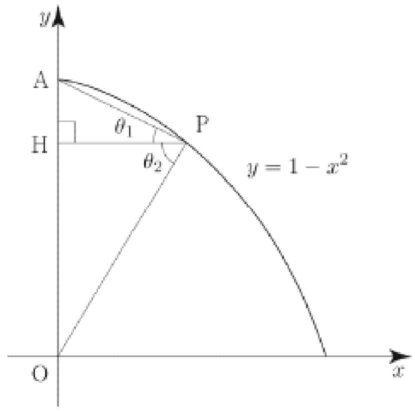


① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

052

125 • 2018학년도 고3 9월 평가원 가형

곡선 $y=1-x^2\ (0<x<1)$ 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원점 O와 점 A(0, 1)에 대하여 $\angle APH=\theta_1$, $\angle HPO=\theta_2$라 하자. $\tan\theta_1=\frac{1}{2}$일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$의 값은? [4점]



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Theme 17 함수의 몫의 미분법

053

050 | 2020학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-2h)}{h}$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{e}$ ② $-\frac{3}{e^2}$ ③ $-\frac{1}{e}$ ④ $-\frac{2}{e^2}$ ⑤ $-\frac{3}{e^3}$

054

066 | 2021학년도 고3 6월 평가원 가형

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$$

라 하자. $f'(0)-f(0)=2$일 때, $g'(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

Theme 18 합성함수의 미분법

055 2026 규토 모의평가 5월 미적분

25. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+2x)=3^{x^2-1}+1$$

을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $a\times b$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}\ln 3$ ② $\frac{6}{5}\ln 3$ ③ $\frac{8}{5}\ln 3$ ④ $2\ln 3$ ⑤ $\frac{12}{5}\ln 3$

056 2025학년도 고3 9월 평가원 미적분

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

057

091 | 2022학년도 고3 6월 평가원 미적분

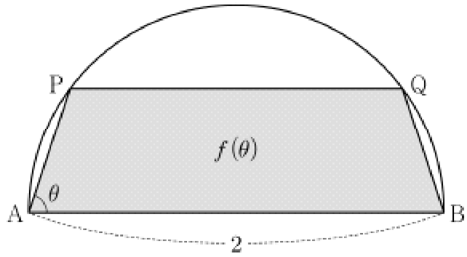
$t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

058 2024년 고3 10월 교육청 미적분

29. 점 $(0,\,1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\,(a>0)$이 있다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 직선 l이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\,(a>0)$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $f(\theta)$라 하자. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a$일 때, $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=pe+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고 p, q는 정수이다.) [4점]

059 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$ ④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

Theme 19 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

060 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \cos 2t, \quad y = \sin^2 t$$

에서 $t = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

061 2026 규토 모의평가 9월 미적분

26. 매개변수 $t\,(t > -2)$으로 나타내어진 함수

$$x = \ln(t+2) + t, \quad y = (-t-4)e^{-t}$$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$의 최댓값은? [3점]

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

062 2024 규토 모의평가 1회

24. 매개변수 $t\,(t > 0)$로 나타내어진 곡선

$$x = t + \ln\sqrt{t}, \quad y = t\sqrt{t}$$

에서 $t = 1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

063

023

매개변수 $t\,(t > 0)$로 나타내어진 함수

$$x = \log_3 t, \quad y = 3t + \sqrt{3t}$$

의 그래프 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $\frac{ab}{\ln 3}$의 값을 구하시오.

Theme 20 음함수의 미분법

064

053 | 2021학년도 고3 6월 평가원 가형

곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

065 2025학년도 고3 6월 평가원 미적분

24. 곡선 $x\sin 2y+3x=3$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

066 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

24. 곡선 $3x+y+\cos(xy)=2$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

067

075 2024학년도 수능 미적분

실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

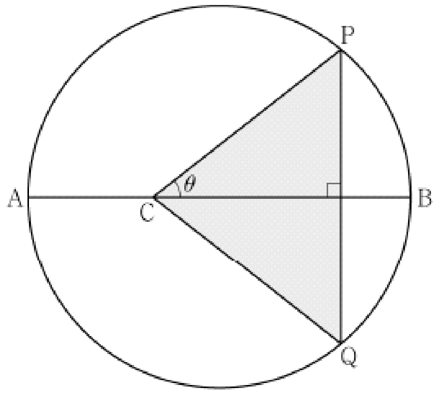
068 2026 규토 모의평가 9월 미적분

27. 양의 실수 t에 대하여 원점에서 곡선 $y=x^2+\frac{t}{x}\ (x>0)$에 그은 접점을 A라 하자. $f(t)=\overline{\mathrm{OA}}^2$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? (단, 점 O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

069 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

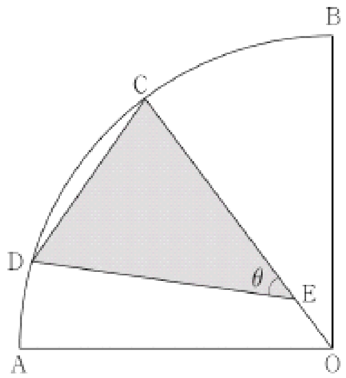
30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle\mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



070 2026 규토 모의평가 5월 미적분

30. 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 선분 OC 위의 점 E를 $\overline{\mathrm{CE}}=4$가 되도록 잡고, 호 AB 위의 점 D를 $\angle\mathrm{CED}=\theta$가 되도록 잡을 때, 삼각형 CED의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Theme 21 역함수의 미분법

071

088 | 2020학년도 수능 가형

함수 $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고

$$g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x),\quad g(1)=0$$

을 만족시킬 때, $|g'(1)|$의 값을 구하시오. [4점]

072

068 • 2023년 고3 10월 교육청 미적분

함수 $f(x)=e^{2x}+e^x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

073

089 | 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

074 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

26. 함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $a+f'(g(a))$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

075 2026학년도 고3 9월 평가원 미적분

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 함수 $f(x^3+x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

076 2026 규토 모의평가 5월 미적분

27. 상수 a $(a>0)$에 대하여 정의역이 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}\pi < x < \frac{a}{2}\pi\right\}$인 함수 $f(x)=3\tan\frac{x}{a}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(3)=\frac{2}{3}$일 때, $g'(6)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

077 2026 규토 모의평가 파이널 미적분

25. 함수 $f(x)=e^{\sec x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^2,\ g(e^2))$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{5\sqrt{3}}{12e^2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3e^2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4e^2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6e^2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{12e^2}$

078

096 • 2016학년도 수능 B형

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

(두 번째 풀이 중요)

Theme 22 이계도함수

079

037

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=f(x)e^x$는 다음 조건을 만족시킨다.

$g'(1)=-e,\ \ g''(1)=2e$

$f(4)$의 값을 구하시오.

070

038

열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가
다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$

(나) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1$

함수 $g(x)=e^{f'(x)f(x)}$에 대하여 $g'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=ae^b$일 때,
$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)

081

039

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\sin 2x$가
다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=0$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}=8$

함수 $h(x)=\ln|g(x)|$에 대하여 $h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $\dfrac{2}{\pi}$ ② $\dfrac{4}{\pi}$ ③ $\dfrac{6}{\pi}$ ④ $\dfrac{8}{\pi}$ ⑤ $\dfrac{10}{\pi}$

Theme 23 접선의 방정식

082

012

곡선 $y=3\ln(x^2+2)$에 접하고 기울기가 2인 서로 다른 두 직선의 y절편을 각각 y_1, y_2라 할 때, y_1+y_2의 값은?

① $3\ln 18-8$ ② $3\ln 18-6$ ③ $3\ln 18$ ④ $3\ln 18+6$ ⑤ $3\ln 18+8$

083

065 | 2020학년도 고3 9월 평가원 가형

양수 k에 대하여 두 곡선 $y=ke^x+1$, $y=x^2-3x+4$가 점 P에서 만나고, 점 P에서 두 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직일 때, k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{2}{e^2}$ ④ $\frac{2}{e^3}$ ⑤ $\frac{3}{e^3}$

084

074 | 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\sin x$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점 $(1, (g\circ f)(1))$에서의 접선이 원점을 지난다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

일 때, 상수 k에 대하여 $30k^2$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 24 함수의 증가와 감소

085

019

함수 $f(x)=-\ln(\cos x)-ax^2$가 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가할 때, 실수 a의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

086

021

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=\frac{(\ln x)^2+k}{x}$ $(x>0)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

087 2024년 고3 10월 교육청 미적분

27. 함수 $f(x)=e^{3x}-ax$ (a는 상수)와 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ -f(x) & (x<k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가질 때, $a \times k$의 값은? [3점]

① e ② $e^{\frac{3}{2}}$ ③ e^2 ④ $e^{\frac{5}{2}}$ ⑤ e^3

Theme 25 함수의 극대와 극소

088

026

$0<x<2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin x}{e^{3x}}$는 $x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=b$에서 극솟값을 갖는다.
두 상수 a, b에 대하여 $\cos(a+b)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{9}{10}$ ③ $-\frac{4}{5}$
④ $-\frac{7}{10}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

089 2025년 고3 7월 교육청 미적분

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 실수 k $(k \neq 0)$에 대하여 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\frac{f(x)+k}{e^{f(x)}}$$

가 $x=3$에서 극대이고 $g(3)=e$일 때, $g(k)$의 값은? [3점]

① $-2e^6$ ② $-3e^5$ ③ $-2e^5$ ④ $-3e^4$ ⑤ $-2e^4$

Theme 26 변곡점

090

066 • 2011학년도 고3 9월 평가원 가형

곡선 $y=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2$의 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있을 때 양수 a의 값은? [3점]

① e　② $\frac{5}{4}e$　③ $\frac{3}{2}e$　④ $\frac{7}{4}e$　⑤ $2e$

091

077 | 2020학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $f(x)=3\sin kx+4x^3$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 가지도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

092

091 | 2018학년도 고3 6월 평가원 가형

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^x$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
(나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15　② -12　③ -9　④ -6　⑤ -3

093

037

상수 $a(a>0)$에 대하여 함수 $f(x)=a\ln(x^2+1)$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점에서의 접선은 서로 수직이다.
(나) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)-\frac{n}{4}x^2$이 오직 $x=b$에서만 극값을 갖도록 하는 자연수 n의 최솟값은 c이다. (단, b, c는 상수이다.)

$a+b+c$의 값을 구하시오.

094

038

함수 $f(x)=2\ln(3-x)+\frac{1}{2}x^2$ $(x<3)$에 대하여 ⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=3$을 점근선으로 갖는다.
ㄷ. $x_1<x_2<2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)<f(x_1)$이다.
ㄹ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.
ㅁ. 곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ k)$에서 아래로 볼록하도록 하는 실수 k의 최댓값은 $3-\sqrt{2}$이다.
ㅂ. 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㅅ. 방정식 $f(x)=f(a)$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 개수는 2이다.
ㅇ. $\lim_{x\to b+}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}$를 만족시키는 실수 b는 오직 하나 존재한다.
ㅈ. $x_1<3-\sqrt{2}<x_2<3$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

Theme 27 함수의 최대와 최소

095

039

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)=(x^2-3)e^{-x+3}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?

① $-12e^3$ ② $-14e^3$ ③ $-16e^3$ ④ $-18e^3$ ⑤ $-20e^3$

096 2025학년도 고3 6월 평가원 미적분

27. 상수 $a(a>1)$과 실수 $t(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e

Theme 28 방정식의 실근의 개수

097

074 • 2024학년도 고3 6월 평가원 미적분

x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8

④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

098

073 | 2022학년도 고3 6월 평가원 미적분

두 함수

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

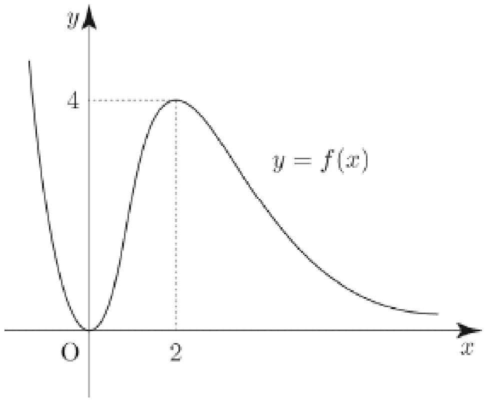
① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$

④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

099

086 | 2017년 고3 3월 교육청 가형

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

Theme 29 부등식의 활용

100

053

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$2x+1+ke^{x^2} \geq 0$$

가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{3}{e}$ ④ $\frac{4}{e}$ ⑤ $\frac{5}{e}$

Theme 30 속도와 가속도

101

054

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\frac{1}{2}\cos 2t,\ y=t-\frac{1}{2}\sin 2t$$

이다. 점 P의 가속도가 $(1,\ a)$일 때, 점 P의 속력은 b이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

102

056

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t-\frac{1}{2t},\ y=t+\frac{2}{t}$$

이다. 시각 $t=2$에서 점 P의 가속도의 크기는?

① $\frac{\sqrt{14}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{17}}{8}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

3. 적분법

Theme 31 여러 가지 함수의 적분법

103

009

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$x^3 f'(x) = \cos x - 3x^2 f(x)$$

을 만족시킨다. $f(\pi)=0$일 때, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $-\frac{30}{\pi^4}$ ② $-\frac{36}{\pi^4}$ ③ $-\frac{42}{\pi^4}$ ④ $-\frac{48}{\pi^4}$ ⑤ $-\frac{54}{\pi^4}$

104

010

정의역이 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 $0 < x < \frac{\pi}{2}$인 모든 x에 대하여

$$xf'(x) - f(x) = x^2 \tan^2 x$$

을 만족시킨다. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{3}{\pi} \times f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $\sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi$ ② $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ ③ $\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$ ④ $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ ⑤ $\sqrt{3} - \frac{\pi}{12}$

Theme 32 치환적분법

105 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

25. 함수 $f(x) = x + \ln x$에 대하여 $\int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2} + \frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2} + e$ ③ $\frac{e^2}{2} + 2e$ ④ $e^2 + e$ ⑤ $e^2 + 2e$

106 2026학년도 고3 9월 평가원 미적분

24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$의 값은? [3점]

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

107 2026 규토 모의평가 파이널 미적분

24. 함수 $f(x) = 3x + e^{3x}$에 대하여 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1+e^{3x}}{f(x)} dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\ln(1+e)}{3}$ ② $\frac{\ln(3+e)}{3}$ ③ $\frac{\ln(1+3e)}{3}$ ④ $\frac{\ln(6+e)}{3}$ ⑤ $\frac{\ln(6+3e)}{3}$

108

050 | 2019학년도 고3 6월 평가원 가형

$\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

109

020

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
> $\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ 이다.
> (나) $f(0)=0$

$\int_{0}^{2} x\{f(x)\}^3 dx$의 값은?

① $\frac{9}{4}(5\ln5-4)$ ② $\frac{11}{4}(5\ln5-4)$ ③ $\frac{13}{4}(5\ln5-4)$ ④ $\frac{15}{4}(5\ln5-4)$ ⑤ $\frac{17}{4}(5\ln5-4)$

110

062 • 2024학년도 수능 미적분

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_{1}^{a} \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

111

093 • 2023학년도 수능 미적분

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^x+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=1$
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$\int_{0}^{14} g(x)dx = p+q\ln2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln2$는 무리수이다.) [4점]

Theme 33 부분적분법

112

052 | 2019학년도 수능 가형

$\int_0^{\pi} x\cos(\pi - x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

113

061 • 2023년 고3 7월 교육청 미적분

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

114

072 | 2020학년도 고3 9월 평가원 가형

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x) = x^4 - 1$이다.
(나) $\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 g'(x)dx = 120$

$\int_{-1}^{1} x^3 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

115

081 | 2018년 고3 7월 교육청 가형

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여
$g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}dt$이다.
(나) $\int_2^5 f(x)dx = 16$

$g(2)=3$일 때, $\int_1^2 xg(x)dx$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

116

098 • 2014학년도 수능 B형

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx$ 의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$　② $2\pi-3$　③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$　⑤ 2π

117

099 2025학년도 고3 9월 평가원 미적분

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$　② $-\frac{1}{2\pi}$　③ $-\frac{1}{3\pi}$
④ $-\frac{1}{4\pi}$　⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

118 2026학년도 고3 9월 평가원 미적분

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1)=4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)dx=34,\quad \int_1^2 xg(x)dx=53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}dx$의 값을 구하시오. [4점]

119 2026 규토 모의평가 파이널 미적분

29. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 모든 양의 실수 x에 대하여

$$g(x)=x\int_1^x \frac{tf(t^2)}{e^{t^2}}dt$$

를 만족시킨다.

$$\int_1^2 g(x)e^{x^2}dx=19,\quad \int_1^4 f(x)dx=4$$

일 때, $e^4\times g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 34 정적분으로 표시된 함수의 극한

120

066 | 2019학년도 고3 6월 평가원 가형

함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}=3$$

일 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

Theme 35 정적분을 포함한 등식

121

032

양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$f(x)=(\ln x)^2-\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$

를 만족시킬 때, $\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

122

035

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt=e^{2x-2}+ax^2+bx+3$$

을 만족시킬 때, $a-b+f(1)$의 값을 구하시오.

123

036

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)e^{x-t}dt=\sin 3x$$

을 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$의 값은?

① $\frac{2\sqrt{2}+1}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}+2}{9}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}+3}{9}$

④ $\frac{3\sqrt{2}+1}{9}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}+2}{9}$

124

037

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가
모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 x f(tx+1)dx = 4te^t$$

을 만족시킬 때, $f(5)\times f(-3)$의 값은?

① -26 ② -24 ③ -22
④ -20 ⑤ -18

Theme 36 정적분으로 정의된 함수 (New함수)

125

070 | 2018년 고3 4월 교육청 가형

자연수 n에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\int_1^x \frac{n-\ln t}{t}dt$의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$의 값을 구하시오. [4점]

126

092 | 2016학년도 고3 9월 평가원 B형

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x - |\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

127 2026 규토 모의평가 9월 미적분

28. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$와 양수 t에 대하여 함수 $F(x)$는

$$F(x)=\int_0^x \{f(s)-ts\}ds$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $F(x) \le F(\alpha)$를 만족시키는 음이 아닌 실수 α의 값을 $g(t)$라 할 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{g(t)}{t^2}dt$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{2}{3}$　③ 1　④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{3}$

128

045

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$는

$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx+\int_0^2 F(x)f'(x)dx=12$$

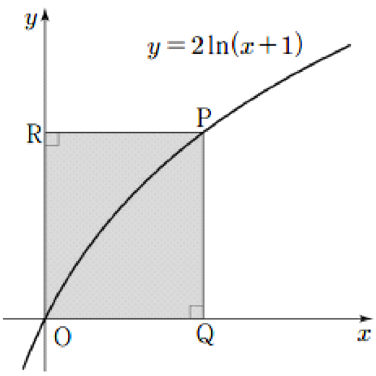
을 만족시킨다. $\int_0^2 xf'(x)dx=5$일 때, $\int_0^2 \{F(x)\}^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, $F(2)>0$)

Theme 37 새롭게 정의된 함수의 정적분

129 2024년 고3 7월 교육청 미적분

27. 양수 t에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-2+12\ln 2$ ② $-1+12\ln 2$ ③ $-2+16\ln 2$
④ $-1+16\ln 2$ ⑤ $-2+20\ln 2$

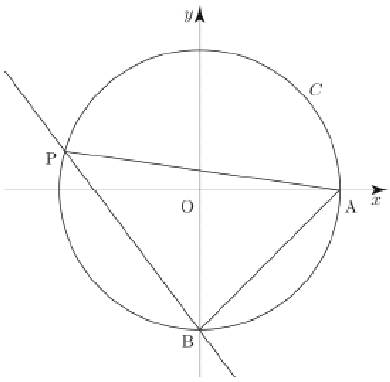


130

085 2022학년도 고3 9월 평가원 미적분

좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 A(2, 0), B(0, -2)가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자.
점 Q$(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때,

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은? [4점]



① $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2}$

Theme 38 정적분과 급수의 관계

131

040 | 2021학년도 수능 가형

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

132

051 | 2022학년도 수능 미적분

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

133 2024 규토 모의평가 1회

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(k-3n)^2}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}-2\ln\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}+2\ln\frac{2}{3}$ ③ $1+2\ln\frac{2}{3}$
④ $1+2\ln 2$ ⑤ $2+2\ln 3$

134 2026 규토 모의평가 9월 미적분

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(n+k)-n\ln n}{(n+k)^2}$ 의 값은? [3점]

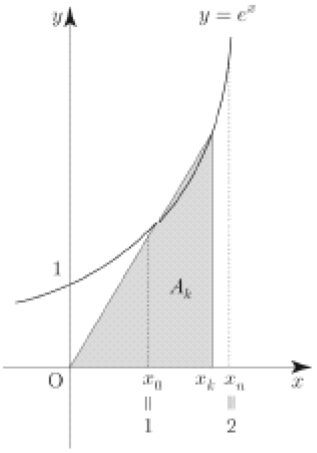
① $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{\ln 2}{2}$
④ $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$

Theme 39 정적분과 급수의 관계 활용

135

069 | 2014학년도 고3 6월 평가원 B형

함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[1, 2]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=2$라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k(k=1, 2, \cdots, n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은? [4점]

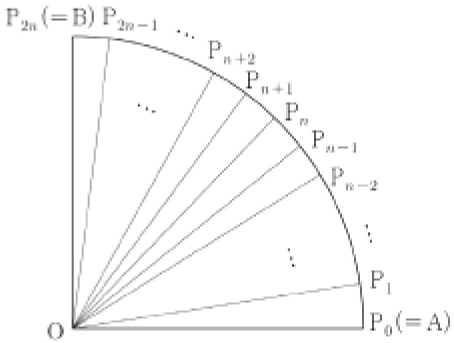


① $\frac{1}{2}e^2-e$　② $\frac{1}{2}(e^2-e)$　③ $\frac{1}{2}e^2$
④ e^2-e　⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

136

068 | 2015학년도 고3 9월 평가원 B형

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $P_{2n}(=B)$라 하자. 주어진 자연수 n에 대하여 $S_k(1\le k\le n)$을 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? [3점]

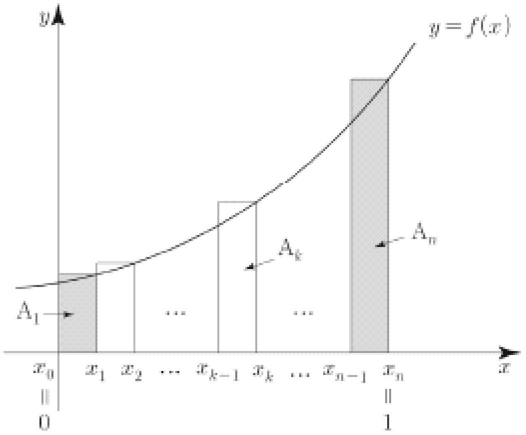


① $\frac{1}{\pi}$　② $\frac{13}{12\pi}$　③ $\frac{7}{6\pi}$
④ $\frac{5}{4\pi}$　⑤ $\frac{4}{3\pi}$

137

080 • 2010학년도 수능 가형

함수 $f(x)=x^2+ax+b\,(a\ge 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로
$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 하자.
닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 40 넓이

138 2026학년도 고3 9월 평가원 미적분

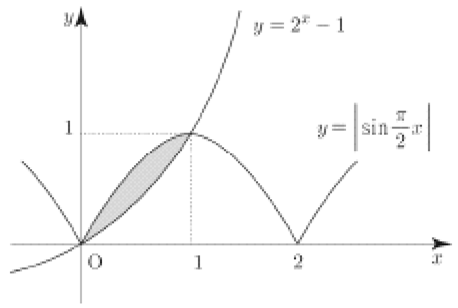
26. 곡선 $y=\frac{3}{x-1}\,(x>1)$이 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\frac{3}{x-1}\,(x>1)$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-3\ln 3$　② $3-3\ln 2$　③ $4-2\ln 3$
④ $3+3\ln 2$　⑤ $3+3\ln 3$

139

045 | 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

그림과 같이 두 직선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$가 원점 O와 점 $(1,\ 1)$에서 만난다. 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



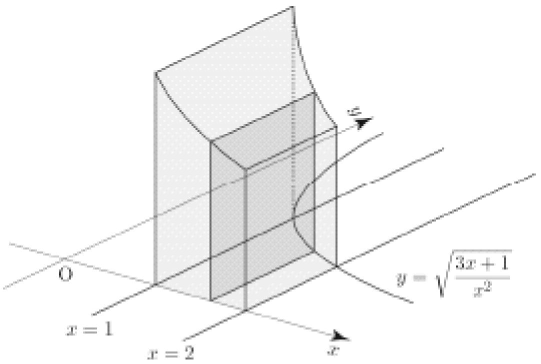
① $-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$　② $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$
③ $\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2\ln 2}-1$　④ $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\ln 2}+1$
⑤ $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$

Theme 41 입체도형의 부피

140

050 | 2022학년도 고3 9월 평가원 미적분

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



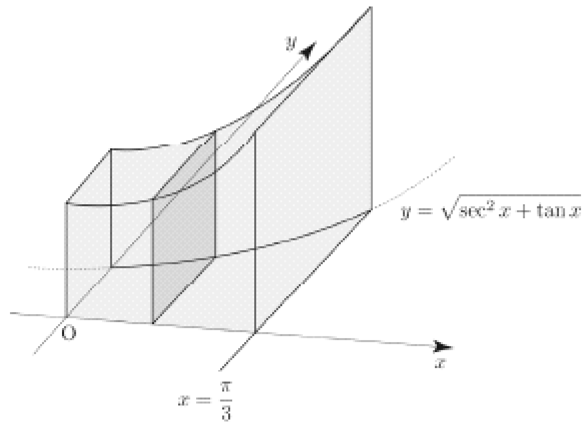
① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

141

052 | 2023학년도 수능 미적분

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분의 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



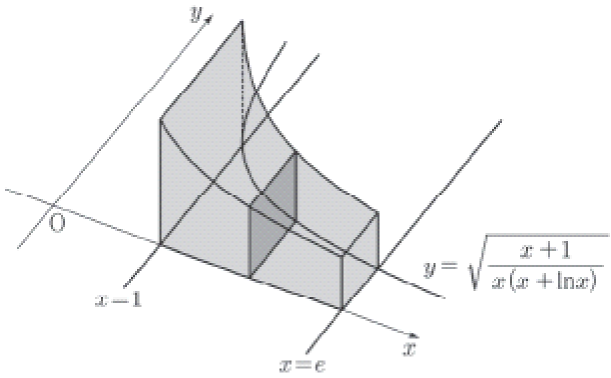
① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\ln 2}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\dfrac{\ln 2}{2}$

④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

142

065 2025학년도 수능 미적분

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x(x+\ln x)}}$ 과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

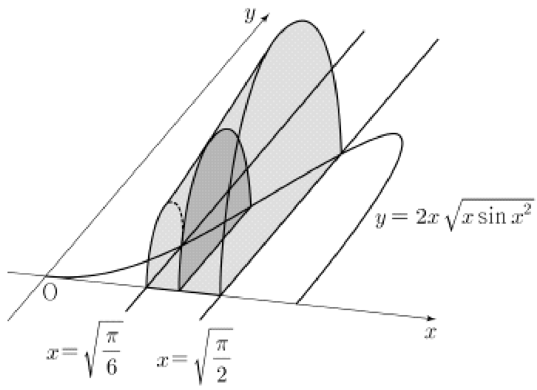


① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$

④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

143 2025학년도 고3 9월 평가원 미적분

26. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}$ $(0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\dfrac{\pi^2+6\pi}{48}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

Theme 42 움직인 거리

144

028

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 2\pi)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x = 2(\cos t - \sin t) \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

이다. 점 P가 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 움직인 거리는?

① $\pi+\frac{1}{2}$　② $\pi+1$　③ $\pi+\frac{3}{2}$　④ $\pi+2$　⑤ $\pi+\frac{5}{2}$

145

062 | 2022학년도 수능 미적분

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$　② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$　③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$　④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$　⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

146 2026 규토 모의평가 파이널 미적분

27. 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{12\ln 2+1}{8}$　② $\frac{6\ln 2+1}{4}$　③ $\frac{12\ln 2+3}{8}$　④ $\frac{3\ln 2+1}{2}$　⑤ $\frac{12\ln 2+5}{8}$

Theme 43 곡선의 길이

147

053 | 2008학년도 수능 가형

$x=0$에서 $x=6$까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하시오. [4점]

148

032

$x=1$에서 $x=e$ 까지 $y=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}$ 의 길이는?

① $\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}e^2$

④ $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

149

055 • 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

$x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$

④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

드디어 고지가 보이네요. ㅎㅎ
여러분의 앞날에 행복이 가득하기를 기원하겠습니다.
그동안 정말 수고 많으셨습니다!!

-규토-

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.미적분 빠른 정답

1. 수열의 극한

Theme 1 극한값 계산

1. 110
2. ①
3. ②

Theme 2 일반항이 포함된 수열의 극한

4. ②

Theme 3 수열의 극한의 대소 관계

5. ④
6. ②

Theme 4 등비수열의 극한

7. 4
8. ③
9. 18

Theme 5 등비수열의 수렴 조건

10. 8
11. ④

Theme 6 x^n을 포함한 수열의 극한

12. 7
13. ④
14. ③
15. ③

Theme 7 수열의 극한의 활용

16. 32

Theme 8 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\lim_{n \to \infty} a_n$사이의 관계

17. ⑤
18. ③
19. ④
20. ②

Theme 9 급수의 성질

21. 26
22. 14

Theme 10 분수 꼴로 된 급수

23. 5
24. ⑤
25. 57
26. ⑤
27. ②

Theme 11 등비급수의 계산

28. ②
29. ①
30. ①
31. ⑤

Theme 12 급수 case분류형

32. 162
33. 25
34. 109
35. 686
36. 24
37. 31

2. 미분법

Theme 13 무리수 e의 정의

38. ③

39. ②

Theme 14 지수함수와 로그함수의 극한

40. ②

41. ①

42. 24

43. ①

44. ①

Theme 15 지수함수와 로그함수의 극한 활용

45. ④

46. ②

Theme 16 삼각함수의 덧셈정리

47. ②

48. ④

49. ④

50. ⑤

51. ④

52. ④

Theme 17 함수의 몫의 미분법

53. ⑤

54. ③

Theme 18 합성함수의 미분법

55. ①

56. ②

57. 17

58. 5

59. ③

Theme 19 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

60. ②

61. ①

62. ②

63. 126

Theme 20 음함수의 미분법

64. 4

65. ③

66. ②

67. ①

68. ④

69. 32

70. 55

Theme 21 역함수의 미분법

71. 5

72. ⑤

73. ③

74. ②

75. ①

76. ④

77. ④

78. ④

Theme 22 이계도함수

79. 10

80. 36

81. ②

Theme 23 접선의 방정식

82. ②

83. ①

84. 10

Theme 24 함수의 증가와 감소

85. ②

86. 1

87. ①

Theme 25 함수의 극대와 극소

88. ③

89. ⑤

Theme 26 변곡점

90. ⑤

91. 2

92. ③

93. 5

94. ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ, ㅈ

Theme 27 함수의 최대와 최소

95. ④

96. ②

Theme 28 방정식의 실근의 개수

97. ②

98. ④

99. ③

Theme 29 부등식의 활용

100. ①

Theme 30 속도와 가속도

101. 6

102. ④

3. 적분법

Theme 31 여러 가지 함수의 적분법

103. ④

104. ⑤

Theme 32 치환적분법

105. ②

106. ④

107. ①

108. ②

109. ①

110. ④

111. 26

Theme 33 부분적분법

112. 2

113. ④

114. ②

115. ①

116. ①

117. ③

118. 31

119. 80

Theme 34 정적분으로 표시된 함수의 극한

120. ⑤

Theme 35 정적분을 포함한 등식

121. ②

122. 16

123. ③

124. ④

Theme 36 정적분으로 정의된 함수 (New함수)

125. 325

126. ①

127. ②

128. 9

Theme 37 새롭게 정의된 함수의 정적분

129. ③

130. ①

Theme 38 정적분과 급수의 관계

131. ①

132 ③

133. ③

134. ⑤

Theme 39 정적분과 급수의 관계 활용

135. ③

136. ①

137. 14

Theme 40 넓이

138. ①

139. ②

Theme 41 입체도형의 부피

140. ②

141. ④

142. ③

143. ③

Theme 42 움직인 거리

144. ②

145. ①

146. ③

Theme 43 곡선의 길이

147. 78

148. ⑤

149. ①

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.미적분 해설지

1. 수열의 극한

Theme 1 극한값 계산

1. 110

090

$a>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+4n-b^2n^2}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

수열 $\left\{\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right\}$이 $\frac{1}{5}$으로 수렴하기 위해서는

분자의 최고차항이 n이어야 한다.

$\Rightarrow a-b^2=0 \Rightarrow a=b^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{b^2n^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{bn+bn}=\frac{2}{b}=\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow a=100,\ b=10$

따라서 $a+b=110$이다.

답 110

2. ①

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(b-\frac{1}{n}\right)^2}{b+6+\frac{1}{n^2}}=\frac{b^2}{b+6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+b}{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+b}=\frac{b^2}{b+6}$$

그러므로 $a-b^2=0,\ a=b^2$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{b}{n}}+b}=\frac{1}{2}=\frac{b^2}{b+6}$$

$2b^2-b-6=(2b+3)(b-2)=0$

$b>0$이므로 $b=2,\ a=4$

따라서 $a+b=6$

3. ②

25. 출제의도 : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{\left(\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}\right)\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{(n^4+4n)-(n^4+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅰ) $b>-1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$의 값은 존재하지 않으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $b<-1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=0$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(iii) $b=-1$일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^{-1}\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}$$

$$=\frac{2a}{3}$$

이므로

$$\frac{2a}{3}=6$$

$$a=9$$

(i), (ii), (iii)에서

$a=9$, $b=-1$

따라서

$a+b=9+(-1)=8$

정답 ②

Theme 2 일반항이 포함된 수열의 극한

4. ②

023

첫째항과 공차가 모두 k $(k\neq 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n

$a_n=kn$, $S_n=\dfrac{kn(n+1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn\times k(n+1)}{\frac{kn(n+1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2k^2n^2}{kn^2}=2k=k^2$$

$\Rightarrow k=2$ $(\because\ k\neq 0)$

$a_n=2n$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{2}\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

답 ②

Theme 3 수열의 극한의 대소 관계

5. ④

075

$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$

모두 양수이므로 양변에 제곱을 해도 부등호 방향은 변하지 않는다.

$9n^2+4<na_n<(3n+2)^2$

양변에 $\dfrac{1}{n^2}$를 곱하면

$$\frac{9n^2+4}{n^2}<\frac{a_n}{n}<\frac{(3n+2)^2}{n^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4}{n^2}=9$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{n^2}=9$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=9$이다.

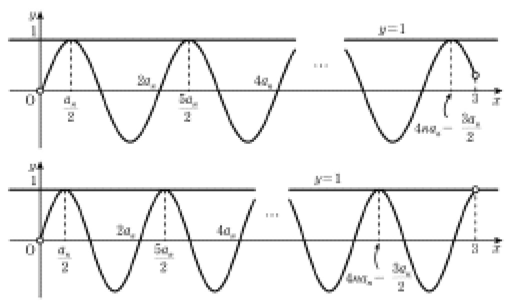
답 ④

6. ②

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

함수 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)$의 주기는 $2a_n$ 이고

$0<x<3$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 $2n$ 이므로 $0<x<3$에서 함수 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\left(4n-\frac{3}{2}\right)\times a_n<3\leq\left(4n+\frac{1}{2}\right)\times a_n$$

$$\frac{3}{4n+\frac{1}{2}}\leq a_n<\frac{3}{4n-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3n}{4n+\frac{1}{2}}\leq na_n<\frac{3n}{4n-\frac{3}{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n+\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n-\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}$ 이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{3}{4}$

Theme 4 등비수열의 극한

7. 4

074

$a_n=r^{n-1}$, $S_n=\dfrac{r^n-1}{r-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(r-1)r^{n-1}}{r^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r-1}{r}\right)r^n}{r^n-1}$$

$$=\frac{r-1}{r}=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow 4r-4=3r\Rightarrow r=4$$

답 4

8. ③

25. 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+k\times 2^{2n}}{a_n}=\frac{3}{2}$$

일 때, $k\times a_3$의 값은? (단, k는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

$a_n=2\cdot r^{n-1}=\frac{2}{r}\cdot r^n$

$S_n=\dfrac{2(r^n-1)}{r-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{r-1}(r^n-1)+k\times 4^n}{\frac{2}{r}\cdot r^n}=\frac{3}{2}$$

r의 $|r|<1\Rightarrow$ 모순

$|r|>4\Rightarrow\dfrac{\frac{2}{r-1}}{\frac{2}{r}}\Rightarrow\dfrac{r}{r-1}=\dfrac{3}{2}$ $\therefore r=3$ $\Downarrow$ 모순 $|r|>4$

$\left.\begin{matrix}-4<r<-1\\1<r<4\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ 모순

$\therefore r=4$

$$\frac{\frac{2}{3}+k}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

$\frac{2}{3}+k=\frac{3}{4}$

$k=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

$a_3=a\times r^2=2\times16=32$

$\therefore\dfrac{32}{12}=\dfrac{8}{3}$

9. 18

29. 출제의도 : 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+a\times0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$

$a=\frac{1}{3}<1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}1=1=a$$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a>3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+a}{3\times0+1}=a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=b>3=\frac{9}{3}>\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3<a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$$

에서

$a=9,\ b=9$

이상에서 $a=9,\ b=9$이므로

$a+b=18$

정답 18

Theme 5 등비수열의 수렴 조건

10. 8

037

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1 < r \le 1$이다.

등비수열 $\left\{\left(\dfrac{|x-1|-3}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $\dfrac{|x-1|-3}{2}$이므로

$-1 < \dfrac{|x-1|-3}{2} \le 1 \Rightarrow -2 < |x-1|-3 \le 2$

$\Rightarrow 1 < |x-1| \le 5$

$1 < |x-1| \Rightarrow x-1 > 1$ or $x-1 < -1 \Rightarrow x > 2$ or $x < 0$

$|x-1| \le 5 \Rightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Rightarrow -4 \le x \le 6$

$[x > 2 \text{ or } x < 0] \cap -4 \le x \le 6$

$\Rightarrow -4 \le x < 0$ or $2 < x \le 6$

범위를 만족하는 정수 x는 다음과 같다.

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

따라서 모든 정수 x의 개수는 8이다.

답 8

11. ④

25. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$a_n = \left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n + \left(\dfrac{3}{k}\right)^n$ 에서 k가 자연수이므로

$\dfrac{k^2+9}{10k} > 0,\ \dfrac{3}{k} > 0$

두 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\dfrac{3}{k}\right)^n\right\}$ 중 어느 한 수열이 발산하면 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으므로

두 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\dfrac{3}{k}\right)^n\right\}$이 모두 수렴하여야 한다.

$\dfrac{k^2+9}{10k} \le 1$ 에서 $k^2-10k+9 \le 0,\ 1 \le k \le 9$

$\dfrac{3}{k} \le 1$ 에서 $k \ge 3$이므로

$3 \le k \le 9$

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 7

Theme 6 x^n을 포함한 수열의 극한

12. 7

039

[개념 확인문제 12] 해설에서 배웠듯이 바로 공비를 찾아 case분류해보자.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1} = 4$$

공비 $\dfrac{k}{3}$의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $\left|\dfrac{k}{3}\right| < 1 \Rightarrow -3 < k < 3$일 때

극한값은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1} = \frac{0+4}{0+1} = 4$이므로

조건을 만족시킨다.

② $\left|\dfrac{k}{3}\right| > 1 \Rightarrow k < -3$ or $k > 3$일 때

극한값은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k}{3}\times\left(\frac{k}{3}\right)^{n}+4}{\frac{3}{k}\times\left(\frac{k}{3}\right)^{n}+1} = \frac{\frac{k}{3}}{\frac{3}{k}} = \frac{k^2}{9}$

이므로 극한값이 4가 되려면 $k=6$ or $k=-6$이다.

이는 전제조건인 $k < -3$ or $k > 3$에 포함되므로

조건을 만족시킨다.

③ $\left|\frac{k}{3}\right|=1 \Rightarrow k=3$ or $k=-3$일 때

ⅰ) $k=3$일 때

극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+4}{1^{n-1}+1}=\frac{5}{2}$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

ⅱ) $k=-3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}+4}{(-1)^{n-1}+1}$은 진동하므로

조건을 만족시키지 않는다.

①, ②, ③에서 조건을 만족시키는 정수 k를 구하면
다음과 같다.
$-6,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 6$

따라서 모든 정수 k의 개수는 7이다.

답 7

13. ④

104

$x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}$$

분모 분자에 $\left(\frac{x}{4}\right)^n$을 곱하여 공비를 하나로 만들면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}$$

공비 $\frac{x^2}{4}$의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $\left|\frac{x^2}{4}\right|<1 \Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow 0<x<2$ ($\because\ x>0$)

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}=\frac{x}{4}$

방정식 $f(x)=2x-3$ $(x>0)$

$\frac{x}{4}=2x-3$ $(0<x<2) \Rightarrow x=\frac{12}{7}$

② $\left|\frac{x^2}{4}\right|>1 \Rightarrow x<-2$ or $x>2 \Rightarrow x>2$ ($\because x>0$)

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}=x$

방정식 $f(x)=2x-3$ $(x>0)$

$x=2x-3$ $(x>2) \Rightarrow x=3$

③ $\left|\frac{x^2}{4}\right|=1 \Rightarrow x=2$ or $x=-2 \Rightarrow x=2$ ($\because x>0$)

$x=2$일 때

$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1}{1+2}=1$

방정식 $f(x)=2x-3$ $(x>0)$

$1=2x-3$ $(x=2) \Rightarrow x=2$

①, ②, ③에 의해 방정식 $f(x)=2x-3$ $(x>0)$의
실근은 $x=\frac{12}{7}$ or $x=3$ or $x=2$이다.

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{12}{7}+3+2=\frac{47}{7}$이다.

답 ④

14. ③

102

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$

$(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$

$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times 1^{2n+1}+2}{3\times 1^{2n}+1}=\frac{a}{4}$

즉, $f\left(\frac{a}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{5}{4}$를 만족시키는 a의 값을 구하면 된다.

공비가 $\left(\frac{a}{4}\right)^2$이므로 이전 문제들에서 학습했듯이 공비가 $\frac{a}{4}$라고 생각하고 분류해보자.

Tip 공비가 r^2일 때도 공비가 r일 때와 마찬가지로 ① $|r|<1$ ② $|r|>1$ ③ $|r|=1$ 로 분류할 수 있다고 이전 문제들에서 정말 많이 학습하였다. 이제는 자연스럽게 분류할 수 있어야 한다. 혹시나 매끄럽지 못했다면 [개념확인 문제 12] 해설을 참고하도록 하자.

① $\left|\frac{a}{4}\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{a}{4}<1 \Rightarrow -4<a<4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{0+\frac{a}{2}}{0+1}=\frac{a}{2}=\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow a=\frac{5}{2}$

$a=\frac{5}{2}$는 $-4<a<4$에 속하므로 조건을 만족한다.

② $\left|\frac{a}{4}\right|>1 \Rightarrow \frac{a}{4}<-1$ or $\frac{a}{4}>1 \Rightarrow a<-4$ or $a>4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a(a-2)}{4}\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}$$

$$=\frac{a(a-2)}{12}=\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow a(a-2)=15 \Rightarrow a^2-2a-15=0 \Rightarrow (a-5)(a+3)=0$

$\Rightarrow a=5$ or $a=-3$

$a<-4$ or $a>4$에 속하는 a의 값은 5이다.

③ $\left|\frac{a}{4}\right|=1 \Rightarrow a=-4$ or $a=4$

i) $a=-4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-6)\times(-1)^{2n+1}-2}{3\times(-1)^{2n}+1}$$

$$=\frac{6-2}{3+1}=\frac{4}{4}=1$$

이므로 조건을 만족하지 않는다.

ii) $a=4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 1^{2n+1}+2}{3\times 1^{2n}+1}$$

$$=\frac{2+2}{3+1}=\frac{4}{4}=1$$

이므로 조건을 만족하지 않는다.

①,②,③에 의하여 조건을 만족하는 모든 a의 값을 구하면 $\frac{5}{2}$, 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$이다.

답 ③

15. ③

28. 이차함수 $f(x)$에 대하여 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수

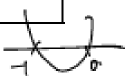
$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^2+x)^{n+1}+f(x)\times 6^n}{(x^2+x)^n+6^n}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다. (나) $g(1)=6$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(4)$의 값은? [4점]

x^2+x
$x(x+1)$



① 185 ② 190 ③ 195 ④ 200 ⑤ 205

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x^2+x)\left(\frac{x(x+1)}{6}\right)^n+f(x)}{\left(\frac{x(x+1)}{6}\right)^n+1}$$

$\frac{x^2+x}{6}>1 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x^2+x$

$0<\frac{x^2+x}{6}<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow f(x)$

$x^2+x<6$ $(x+3)(x-2)<0$

$x^2+x-6<0$

$\frac{x^2+x}{6}=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \frac{6+f(2)}{2}$

① $x=2$에서 연속

$4+2=f(2)=\frac{6+f(2)}{2}$ ∴ $f(2)=6$

② $x=2$ 미분 ∴ $f'(2)=5$

$2x+1$

$5=f'(2)$

③ $g(1)=6=f(1)$ $f(1)=6$

5

$f(x)=a(x-1)(x-2)+6$

$f'(x)=a(x-2)+a(x-1)$

$f'(2)=a=5$

$-\frac{3}{2})$

$\frac{3}{4}$

$f(x)=5(x-1)(x-2)+6$ $16+4$

24

20

$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}+6=\frac{39}{4}$, $g(4)=20$

∴ 195

Theme 7 수열의 극한의 활용

16. 32

048

$n=\sqrt{|x|} \Rightarrow x=n^2$ or $x=-n^2$이므로

$P_n(n^2,\ n)$, $Q_n(-n^2,\ n)$이고

$\sqrt{\frac{n^2}{2}}=\frac{n}{\sqrt{2}}$이므로 $R_n\left(\frac{n^2}{2},\ \frac{n}{\sqrt{2}}\right)$이다.

① 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이 S_n

$\overline{P_nQ_n}=n^2-(-n^2)=2n^2$

선분 P_nQ_n의 길이를 밑변으로 잡으면

높이는 n에서 R_n의 y좌표를 뺀 것이므로

$$\text{높이}=n-\frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}n$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times 2n^2\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}n^3$$

② 삼각형 OP_nQ_n의 둘레 l_n

$\overline{OP_n}=\overline{OQ_n}=\sqrt{n^4+n^2}$ 이고 $\overline{P_nQ_n}=2n^2$이므로

$$\therefore\ l_n=2n^2+2\sqrt{n^4+n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\times l_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n\sqrt{n^4+n^2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n^3}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}n^3}$$

$$=\frac{4}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{8}{2-\sqrt{2}}=\frac{8(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$=8+4\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$$

따라서 $ab=8\times 4=32$이다.

답 32

Theme 8 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} a_n$사이의 관계

17. ⑤

056

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$는 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}n\left(a_n-\frac{n^2+1}{n(2n+1)}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)=\frac{1}{4}+1+2=\frac{1}{4}+\frac{12}{4}=\frac{13}{4}$이다.

답 ⑤

18. ③

062

$a_n=4+(n-1)d$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$$

$\Rightarrow d=3$

$a_n=4+(n-1)3=3n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 $S=\frac{3}{2}$이다.

답 ③

19. ④

25. 출제의도 : 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 미지수를 구한 후 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}-3+\frac{a+\frac{6}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)$$

$$=0-3+a=0$$

즉 $a=3$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n}-3+\frac{3(n+3)-3}{n+3}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}-3+3-\frac{3}{n+3}\right)$$

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{11}{6}$$

따라서

$$S=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=3\times\frac{11}{6}$$
$$=\frac{11}{2}$$

이므로

$$a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$$

정답 ④

20. ②

006

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)=5$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{4^n}=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}}{a_n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{4^n}\times 4^{n+2}}{\frac{2a_n}{4^n}+\frac{4}{4^n}}=\frac{32}{3+0}=\frac{32}{3}$$ 이다.

답 ②

Theme 9 급수의 성질

21. 26

010

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5,\ S_n=\frac{2n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=2+5=7$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(3S_n+2a_n-1)=3\times7+2\times3-1=21+6-1=26$$

이다.

답 26

22. 14

011

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5,\ \sum_{k=1}^{n}\left(b_k-\frac{k^2}{n^3}\right)=\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k-\frac{k^2}{n^3}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n^2-1}{n^2+1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10+4=14$이다.

답 14

Theme 10 분수 꼴로 된 급수

23. 5

017

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = n^2 + 3n$이라 하면

$S_n - S_{n-1} = \frac{a_n}{n}$ $(n \geq 2)$이므로

$n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2 = \frac{a_n}{n}$ $(n \geq 2)$

$S_1 = 4 = \frac{a_1}{1}$이므로 $a_n = (2n+2)n = 2n(n+1)$ $(n \geq 1)$

(물론 라이트 N제 수1에서 배운 테크닉을 이용하여

$\frac{a_n}{n} = 2n + 3 - 1 = 2n + 2$라고 구해도 된다.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 T_n이라고 하면

$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k(k+1)} = 5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$은

한끝차이므로 초말유형이다.

$T_n = 5\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 5$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = 5$이다.

답 5

24. ⑤

26. 출제의도 : 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad \cdots ㉠$$

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn + 1 - d) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$

㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}(1 - 0)$$
$$= \frac{1}{d}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{1}{d} \quad \cdots \text{ⓛ}$$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$$r = \frac{1}{1+d}$$

이때 $d > 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d} \quad \cdots \text{ⓒ}$$

이므로 ⓛ, ⓒ에서

$$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d},$$

$$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$$

$$d = 2$$

ⓛ 또는 ⓒ에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$$

정답 ⑤

25. 57

29. 출제의도 : 급수의 합을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

S_m

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+1}\right)\right\}$$

따라서

S_1

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로

$$a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

또한

S_9

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$$

S_{10}

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$$

$$=S_9+\frac{1}{11}$$

이므로

$$a_{10}=S_{10}-S_9$$
$$=\left(S_9+\frac{1}{11}\right)-S_9$$
$$=\frac{1}{11}$$

따라서

a_1+a_{10}

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}$$

$$=\frac{35}{22}$$

이므로 $p=22$, $q=35$

$p+q=57$

정답 57

26. ⑤

26. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

점 P_n에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 S_n, T_n이라 하면

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n}=\sqrt{2}(n^2+5n+3)$,

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n}=\sqrt{2}n$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=\sqrt{2}(n^2+5n+3)-\sqrt{2}n$$
$$=\sqrt{2}(n^2+4n+3)$$
$$=\sqrt{2}(n+1)(n+3)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{4}$$

27. ②

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{4n^2-1}\right)=\frac{5}{4}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left\{a_n+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{1}{4}\right)\right\}$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{8}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{15}{8}$ ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{19}{8}$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{4n^2-1}\right)=0$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$

$b_n=a_n-\frac{n^2}{4n^2-1}$

$b_n=a_n-\frac{k^2}{4k^2-1}$

$a_n=b_n+\frac{n^2}{4n^2-1}$

$\sum_{k=1}^{n}\left(a_n-\frac{1}{4}\right)$

$\left(b_n+\frac{k^2}{4k^2-1}-\frac{1}{4}\right)$

$\left(b_n+\frac{4n^2-4n^2+1}{4(4n^2-1)}\right)$

$\left(b_n+\frac{1}{4(2n-1)(2n+1)}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n}b_n+\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$

$\frac{5}{4}+\frac{1}{8}(1-0)$

$\frac{1}{4}+\frac{11}{8}=\frac{13}{8}$

Theme 11 등비급수의 계산

28. ②

061

$a_1=a$라 하면 $a_n=a\times r^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$

$\Rightarrow a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots=3$

$\Rightarrow \frac{a}{1-(-r)}=\frac{a}{1+r}=3$ ($\because$ 첫째항이 a, 공비가 $-r$)

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$

$\Rightarrow \frac{a^2}{1-r^2}=6 \Rightarrow \frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=6$

$\Rightarrow \frac{a}{1-r}\times 3=6 \left(\because \frac{a}{1+r}=3\right)$

$\Rightarrow \frac{a}{1-r}=2$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$이다.

답 ②

29. ①

063

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}7^ka_k=3^n-1$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}7^ka_k=3^n-1$이라 하면

$S_n-S_{n-1}=7^na_n\ (n\geq 2)$이므로

$S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)$

$=2\times 3^{n-1}=7^na_n\ (n\geq 2)$

이때 $S_1=3^1-1=2$이고 $7^1a_1=2\times 3^{1-1}=2$이므로

$7^na_n=2\times 3^{n-1}\ (n\geq 1)$이다.

$a_n=2\times\frac{3^{n-1}}{7^n}\ (n\geq 1)$이므로 $\frac{a_n}{3^{n-1}}=2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{7}\right)^n=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

답 ①

30. ①

066

a의 n제곱근을 x라 하면 $x^n=a$이므로
$(-3)^{n-1}$의 n제곱근을 x라 하면 $x^n=(-3)^{n-1}$이다.

$(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는
두 함수 $y=x^n$, $y=(-3)^{n-1}$의 교점의 개수와 같다.

n이 홀수와 짝수일 때 $y=x^n$의 그래프 개형이
달라지므로 이를 기준으로 case분류하면

① n이 홀수일 때
n에 상관없이 $a_n=1$이다.

② n이 짝수일 때
$x^n=(-3)^{n-1}$
$x^2=(-3)^{2-1}=-3$
$x^4=(-3)^{4-1}=-27$
$\vdots$

n이 짝수이므로 $n-1$은 홀수이다.
즉, $(-3)^{n-1}<0$이므로 $a_n=0$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_7}{2^7}+\cdots$

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{8-2}=\frac{1}{6}$$

이다.

답 ①

31. ⑤

26. 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$과 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}=2$$

를 만족시킨다. $f'(1)=1$일 때, $f(a_2)$의 값은? [3점]

① $-\frac{59}{64}$ ② $-\frac{15}{16}$ ③ $-\frac{61}{64}$ ④ $-\frac{31}{32}$ ⑤ $-\frac{63}{64}$

$-1<r<1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}=2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}=0$

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cancel{a_n^2}+\cancel{pa_n}+q+\frac{r}{a_n}\right)=0$

$q=0,\ r=0.$
$(\because |r|<1)$

$f(x)=x^3+px^2$
$f'(x)=3x^2+2px$
$f'(1)=1 \Rightarrow 3+2p=1 \Rightarrow p=-1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1 \Rightarrow \frac{a}{1-r}=1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2-a_n)=2$

$\displaystyle\frac{a^2}{1-r^2}-\frac{a}{1-r}=2.$

$\displaystyle\frac{a^2}{1-r^2}=3 \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{1-r}}_{1}\times\frac{a}{1+r}=3$ $\quad \displaystyle\frac{a}{1+r}=3$

$\displaystyle\frac{a}{1+r}=3 \quad \frac{a}{1-r}=1$

$a=3+3r \quad a=1-r$

$3+3r=1-r$

$2=-4r \Rightarrow r=-\frac{1}{2}\quad a=\frac{3}{2}\quad a_2=-\frac{3}{4}$

$f(x)=x^3-x^2$

$\displaystyle\therefore f(a_2)=-\frac{27}{64}-\frac{9}{16}=-\frac{63}{64}$

20

Theme 12 급수 case분류형

32. 162

079

a_n 의 초항을 a, b_n 의 초항을 b라 하고,

a_n 의 공비를 r, b_n 의 공비를 R라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수렴하므로

$-1<r<1$, $-1<R<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{1-rR} = \left(\frac{a}{1-r}\right)\left(\frac{b}{1-R}\right)$$

$$\Rightarrow 1-rR = 1-r-R+rR$$

$$\Rightarrow r+R = 2rR$$

$$|a_{2n}| = |ar^{2n-1}| = \left|\frac{a}{r}\right| |r^{2n}| = \left|\frac{a}{r}\right| r^{2n}$$

$$|a_{3n}| = |ar^{3n-1}| = \left|\frac{a}{r}\right| |r^{3n}| = \left|\frac{a}{r}\right| |r^3|^n$$

$-1<r<1 \Rightarrow -1<r^2<1$, $-1<|r^3|<1$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$ 은 각각 수렴한다.

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

$$\Rightarrow 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a}{r}\right| r^{2n} = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a}{r}\right| |r^3|^n$$

$$\Rightarrow 3\left|\frac{a}{r}\right| \times \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7\left|\frac{a}{r}\right| \times \sum_{n=1}^{\infty} |r^3|^n$$

$$\Rightarrow 3\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7\sum_{n=1}^{\infty} |r^3|^n$$

r의 부호에 따라 case분류하면

① $0<r<1$

$$3\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n}$$

$$\Rightarrow \frac{3r^2}{1-r^2} = \frac{7r^3}{1-r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1+r} = \frac{7r}{1+r+r^2}$$

$$\Rightarrow 7r+7r^2 = 3+3r+3r^2$$

$$\Rightarrow 4r^2+4r-3=0$$

$$\Rightarrow (2r-1)(2r+3)=0$$

$$\Rightarrow r=\frac{1}{2} \ (\because\ 0<r<1)$$

이때, $r=\frac{1}{2}$ 이면

$r+R=2rR \Rightarrow \frac{1}{2}+R=R \Rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$이므로 모순이다.

② $-1<r<0$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} (-r^3)^n$$

$$\Rightarrow \frac{3r^2}{1-r^2} = \frac{-7r^3}{1-(-r^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1-r} = \frac{-7r}{1-r+r^2}$$

$$\Rightarrow -7r+7r^2 = 3-3r+3r^2$$

$$\Rightarrow 4r^2-4r-3=0$$

$$\Rightarrow (2r+1)(2r-3)=0$$

$$\Rightarrow r=-\frac{1}{2} \ (\because\ -1<r<0)$$

이때, $r=-\frac{1}{2}$ 이면

$r+R=2rR \Rightarrow -\frac{1}{2}+R=-R \Rightarrow R=\frac{1}{4}$

②에 의해서 $R=\frac{1}{4}$ 이므로 $b_n = b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = \frac{b\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2} + b\left(\frac{1}{4}\right)^{3n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{60}=\frac{27}{20}=S$$

따라서 $120S=120\times\frac{27}{20}=162$ 이다.

답 162

33. 25

081

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

a, r의 부호에 따라 case분류하면

① $a>0$, $r>0$일때

$a_n>0 \Rightarrow |a_n|-a_n=0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

② $a<0$, $r>0$일때

$a_n<0 \Rightarrow |a_n|+a_n=0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

③ $a>0$, $r<0$일 때

$$|a_n|+a_n=\begin{cases}2a_n & (a_n\geq 0)\\ 0 & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\geq 0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n})=\frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3},\quad \frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$\Rightarrow r=-\frac{1}{2}$, $a=5$

④ $a<0$, $r<0$일 때

$$|a_n|+a_n=\begin{cases}2a_n & (a_n\geq 0)\\ 0 & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\geq 0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n-1})=\frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$, $\frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$

$\Rightarrow r=-2$

$r^2>1$이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$

모두 수렴하지 않는다.

①, ②, ③, ④에 의해 $a=5$, $r=-\frac{1}{2}$이므로

$a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times 5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+k-1}\right)>\frac{1}{700}$$

$$\Rightarrow 5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)>\frac{1}{700}$$

$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$에서 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$을 대입하면

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

$1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

$1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^6=-\frac{1}{64}$

⋮ ⋮

k가 홀수이면 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$ $\cdots$ 이고,

k가 짝수이면 $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{64}$ $\cdots$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}+\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{5}$$

$$5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)>\frac{1}{700}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$$

를 만족시키는 모든 자연수 m은

$m=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$이다.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$이다.

답 25

34. 109

29. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여

$a_1=\alpha\times\sin\frac{\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{\pi}{2}=\alpha$

$a_2=\alpha\times\sin\pi+\beta\times\cos\pi=-\beta$

$a_3=\alpha\times\sin\frac{3}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{3}{2}\pi=-\alpha$

$a_4=\alpha\times\sin2\pi+\beta\times\cos2\pi=\beta$

$a_5=\alpha$

⋮

이므로

수열 $\{a_n\}$은

$\alpha,\ -\beta,\ -\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \cdots$

이다.
따라서
$a_{4n-2}=-\beta,\ a_{4n-3}=\alpha$
이고
$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=\alpha^2\beta^2=4$
에서
$\alpha\beta=-2$ 또는 $\alpha\beta=2$
그런데 $\alpha,\ \beta(\alpha>\beta)$는 정수이므로
$\alpha=2,\ \beta=1$ 또는 $\alpha=-1,\ \beta=-2$ 또는
$\alpha=2,\ \beta=-1$ 또는 $\alpha=1,\ \beta=-2$
이다.
이때, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=6$$

$$-\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=6 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이고 ㉠을 만족시키기 위해서는
$-1<r<1$
이어야 한다.
따라서

$$-\beta\times\frac{b_1}{1-r}=\alpha\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

(ⅰ) $\alpha=2,\ \beta=1$일 때

$$-\frac{b_1}{1-r}=6$$

에서 $1-r>0$이므로
$b_1<0$
이것은 $b_1>0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=-1,\ \beta=-2$일 때

$$2\times\frac{b_1}{1-r}=-\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$2=\frac{-r}{1+r},\ 2+2r=-r$$

$$r=-\frac{2}{3}$$

따라서

$$\frac{2b_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2b_1}{\frac{5}{3}}=\frac{6b_1}{5}=6$$

에서
$b_1=5$
이므로

$$b_3=b_1r^2=5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

(ⅲ) $\alpha=2,\ \beta=-1$일 때

$$\frac{b_1}{1-r}=2\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$1=\frac{2r}{1+r},\ 1+r=2r,\ r=1$$

이것은 $-1<r<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\alpha=1,\ \beta=-2$일 때

$$2\times\frac{b_1}{1-r}=\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$2=\frac{r}{1+r},\ 2+2r=r,\ r=-2$$

이것은 $-1<r<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$$b_1=5,\ b_3=\frac{20}{9}$$

이므로

$$b_1\times b_3=5\times\frac{20}{9}=\frac{100}{9}$$

따라서 $p=9,\ q=100$ 이므로
$p+q=109$

정답 109

35. 686

29. [출제의도] 등비급수를 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$은 첫째항이 $(a+ar)$, 공비가 r인 등비급수이고 그 합이 5이므로 $-1<r<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\frac{a(1+r)}{1-r}=5 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에서 $a>0$이다.

(i) $r=0$인 경우

$n \geq 2$이면 $a_n=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}| \times \sin\frac{n\pi}{2}\right)=0$$

(ii) $r>0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=ar^{n-1}>0$이므로

$a_{n+1}+a_{n+2}>0$이다.

수열 $\left\{|a_{n+1}+a_{n+2}| \times \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$의 항을 첫째항부터

차례로 나열하면 (a_2+a_3), 0, $-(a_4+a_5)$, 0, $\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}| \times \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_{2n}+a_{2n+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}ar(1+r)(-r^2)^{n-1}=\frac{ar(1+r)}{1+r^2}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{2}{5}=\frac{r(1-r)}{1+r^2}$, $7r^2-5r+2=0$이고

이차방정식 $7r^2-5r+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times7\times2=-31<0$이므로

$r>0$인 실수 r은 존재하지 않는다.

(iii) $r<0$인 경우

$-1<r<0$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n}+a_{2n+1}=ar^{2n-1}+ar^{2n}=ar^{2n-1}(1+r)<0$

수열 $\left\{|a_{n+1}+a_{n+2}| \times \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$의 항을 첫째항부터

차례로 나열하면 $-(a_2+a_3)$, 0, (a_4+a_5), 0, $\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}| \times \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(a_{2n}+a_{2n+1})$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}ar(1+r)(-r^2)^{n-1}=-\frac{ar(1+r)}{1+r^2}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉢에서 $-\frac{2}{5}=\frac{r(1-r)}{1+r^2}$, $3r^2-5r-2=0$

$r=-\frac{1}{3}$ 또는 $r=2$, $-1<r<0$이므로 $r=-\frac{1}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $r=-\frac{1}{3}$이고 ㉠에서 $a=10$

수열 $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 $a_3=ar^2=\frac{10}{9}$이고

공비가 $r^3=-\frac{1}{27}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(100a_n-ma_{3n})=100\times\frac{10}{1+\frac{1}{3}}-m\times\frac{\frac{10}{9}}{1+\frac{1}{27}}$$

$$=15\times\frac{700-m}{14}$$

14와 15는 서로소이므로 $15\times\frac{700-m}{14}$의 값이 자연수

가 되려면 자연수 $k\,(k<50)$에 대하여 $m=700-14k$

따라서 자연수 m의 최댓값은 $k=1$일 때 686

36. 24

29. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을

모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} |a_n| & (|a_n|\leq 6) \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & (|a_n|>6) \end{cases}$$

r

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5=6$ $a_n\geq0 \Rightarrow 0$
(나) $\sum_{n=5}^{\infty}(a_n-\lvert a_n\rvert)=-8$ $a_n<0 \Rightarrow 2a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=S$일 때, $-20\times S$의 값을 구하시오. [4점]

24

$\Rightarrow |a_5|=6 \Rightarrow a_5=6$ or $a_5=-6$

$|r|>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 수렴 X

$r=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 수렴 X

$r=-1 \Rightarrow$ (나) 충족 X

$\therefore |r|<1$

① $a_5=6$

$0<r<1 \Rightarrow$ $a_n-|a_n|=0$ X

$-1<r<0 \Rightarrow \frac{2\times6r}{1-r^2}=-8$, $r=-\frac{1}{2}$

② $a_5=-6$

$0<r<1 \Rightarrow \frac{-12}{1-r}=-8$ X

$-1<r<0 \Rightarrow \frac{-12}{1-r^2}=-8$ X

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	6	$\lvert a_6\rvert$	$\lvert a_7\rvert$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
96	-48	24	-12	6	-3	$\frac{3}{2}$

$\Rightarrow -48+24-12+6 \quad 36 \quad -9 \quad \frac{9}{4}$

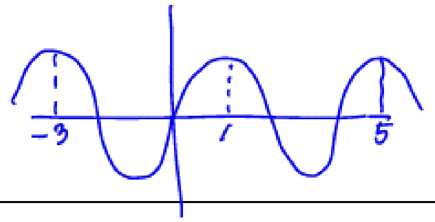
$-24 \quad -30$

$-30+\frac{36}{1+\frac{1}{4}}=-30+\frac{36}{\frac{5}{4}}$

$-30+\frac{144}{5}=-\frac{6}{5}$

$\therefore -20\times-\frac{6}{5}=24$

37. 31



4

단답형

… -7 -3. 1. 5. 9. …

29. [redacted]에 대하여 $x \geq$ [redacted]에서 방정식

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)}_{-\sin\frac{\pi}{2}x}+2$$

의 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 [redacted]수 [redacted]의 최솟값을 [redacted]라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - |a_n|) = \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_2}{(\underbrace{a_{n+1}-a_n}_{4})^{n-1}} = \frac{9}{2}\left(\frac{a_2}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{9}{2}\times\frac{4a_2}{3} = 6a_2$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[redacted]}{a_n a_{n+2}} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

31

$a_n - |a_n|$ $\begin{cases} a_n \geq 0 \Rightarrow 0 \\ a_n < 0 \Rightarrow 2a_n \end{cases}$

$a_2 \neq 0$.

$a_N \Rightarrow$ N개 있다고 가정.

$a_1 + (N-1)4 = -3$

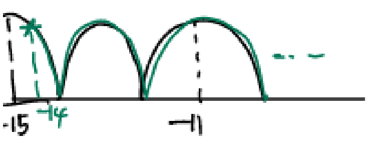
$a_1 = -4N+1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n - |a_n| = 2 \times \frac{N(a_1+a_N)}{2} = 2\times\frac{N(-4N-2)}{2} = N(-4N-2)$

$N(-4N-2) = 6\underbrace{a_2}_{-4N+5} \Rightarrow -2N^2-N = -12N+15$.

$2N^2-11N+15=0$

$N=3$



m의 최솟값 $= -14$

2. 미분법

Theme 13 무리수 e의 정의

38. ③

069

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\times\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

답 ③

39. ②

080

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(-\cos x))^{\frac{1}{-\cos x}\times(-1)}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

답 ②

Theme 14 지수함수와 로그함수의 극한

40. ②

009

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{2x\,e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{2}{e^{x}}\right)$$

$$= 1\times 2 = 2$$

답 ②

41. ①

010

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{2x}=12$$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로
분자는 0으로 가야 한다.

$$\lim_{x\to 0}\ln\{1+f(x)\}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{2x}\right)=1\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=12$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=24$$

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{x}{f(x)}\times 4\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}\times 4\right)$$

$$=1\times\frac{1}{24}\times 4=\frac{1}{6}$$

이다.

답 ①

42. 24

013

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b}{\ln(2x+1)}=\ln 5\ (a>0,\ a\neq 1)$$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로
분자는 0으로 가야 한다.

$$\lim_{x\to 0}(a^x+b)=0 \Rightarrow b=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\ln(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^x-1}{x}}{\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times 2}$$

$$=\frac{\ln a}{2}=\ln 5$$

$$\Rightarrow \ln a=2\ln 5=\ln 25 \Rightarrow a=25$$

따라서 $a+b=25-1=24$이다.

답 24

43. ①

25. 출제의도 : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$

$2^b=8$

$b=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$

$=\frac{8a}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$

$=\frac{8a}{3}\times\frac{\ln 2}{\ln 2}$

$=\frac{8a}{3}$

이므로

$\frac{8a}{3}=16$에서

$a=6$

따라서

$a+b=6+3=9$

정답 ①

44. ①

112

$a>0,\ b>0,\ c>0$

$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$

$\lim_{x\to\infty} x^a=\infty$인데 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to\infty} \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=0 \Rightarrow b=1$

$$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)}{\frac{c}{x^2}}\times\frac{cx^a}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)}{\frac{c}{x^2}}\times\frac{2x^2}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)}{\frac{c}{x^2}}\times 2\right)$$

$$=1\times2=2$$

이므로 $c=2,\ a=2$이다.

따라서 $a+b+c=2+1+2=5$이다.

답 ①

Theme 15 지수함수와 로그함수의 극한 활용

45. ④

25. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)$, $\mathrm{Q}(f(t),\ 0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로

$\{f(t)-t\}^2+(e^{2t}-1)^2=\{f(t)\}^2$에서

$f(t)=\frac{t}{2}+\frac{(e^{2t}-1)^2}{2t}$

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times2\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1\times2)^2=\frac{5}{2}$$

46. ②

26. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 로그로 나타내고, 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표를 a라 하면

$e^{a^2}-1=t$

이므로

$a^2=\ln(1+t)$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{\ln(1+t)}$

또, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$e^{b^2}-1=5t$

이므로

$b^2=\ln(1+5t)$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{\ln(1+5t)}$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times5t\times\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$

따라서

$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{5t\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)}{2t\sqrt{t}}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{5}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$

$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

정답 ②

Theme 16 삼각함수의 덧셈정리

47. ②

098

$2\cos\alpha = 3\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{2}{3}+\tan\beta = 1-\dfrac{2}{3}\tan\beta$

$\Rightarrow \dfrac{5}{3}\tan\beta = \dfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; \tan\beta = \dfrac{1}{5}$

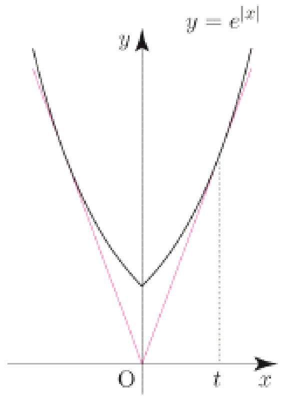
따라서 $\tan\beta = \dfrac{1}{5}$이다.

답 ②

48. ④

105

$x>0$에서 $y=e^{|x|}=e^x$, $y'=e^x$
원점에서 곡선 $y=e^x$에 접선을 그을 때,
접점의 x좌표를 t라 하자.



접선의 방정식을 구하면 $y=e^t(x-t)+e^t$이고,
원점을 지나므로 $0=e^t(-t)+e^t \Rightarrow 0=e^t(-t+1) \Rightarrow t=1$

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이므로
정의역이 음수일 때 접점의 x좌표는 -1이다.

$x=t$에서 접선의 기울기는 e^t이므로
두 접선의 기울기는 e, $-e$이다.

따라서 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,
$\tan\theta = \left|\dfrac{e-(-e)}{1-e^2}\right| = \left|\dfrac{2e}{1-e^2}\right| = \dfrac{2e}{e^2-1}$이다.

답 ④

49. ④

101

$x-y-1=0,\; ax-y+1=0$

$\Rightarrow y=x-1,\; y=ax+1$

$\tan\theta = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1-a}{1+a}\right| = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{1}{6}$ $(\because\; a>1)$

$\Rightarrow 6a-6=a+1 \Rightarrow 5a=7 \Rightarrow a=\dfrac{7}{5}$

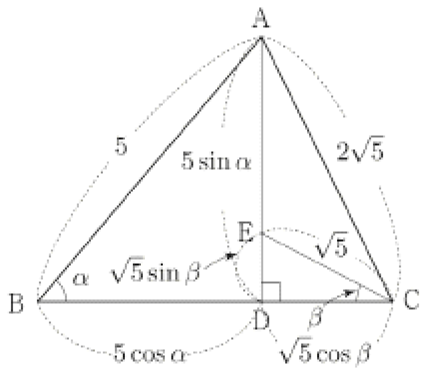
따라서 상수 $a=\dfrac{7}{5}$이다.

답 ④

50. ⑤

120

$\overline{BD}=\overline{AB}\times\cos\alpha = 5\cos\alpha$
$\overline{AD}=\overline{AB}\times\sin\alpha = 5\sin\alpha$
$\overline{CD}=\overline{CE}\times\cos\beta = \sqrt{5}\cos\beta$
$\overline{ED}=\overline{CE}\times\sin\beta = \sqrt{5}\sin\beta$



선분 AD를 3:1로 내분하는 점이 E이므로
$\overline{AD}=4\overline{ED} \Rightarrow 5\sin\alpha = 4\sqrt{5}\sin\beta$

$\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{4}\sin\alpha$

삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$(\overline{AD})^2 = (\overline{AC})^2 - (\overline{CD})^2$

$\Rightarrow 25\sin^2\alpha = 20 - 5\cos^2\beta$

$\Rightarrow 5\sin^2\alpha = 4 - (1 - \sin^2\beta)$

$\Rightarrow 5\sin^2\alpha = 4 - \left(1 - \frac{5}{16}\sin^2\alpha\right)$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{10\sqrt{5}}{25} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이다.

답 ⑤

51. ④

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\angle EAB = \alpha$, $\angle CDB = \beta$,

$\overline{BE} = x \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$ 이라 하면

$\overline{AD} = 2x$, $\overline{DB} = 1 - 2x$

$\tan\alpha = x$, $\tan\beta = \frac{1}{1-2x}$

$\tan(\angle CFE) = \tan(\beta - \alpha)$

$$= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \times \tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{1-2x} - x}{1 + \frac{1}{1-2x} \times x}$$

$$= \frac{1 - x(1-2x)}{(1-2x) + x}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x} = \frac{16}{15}$$

$15(2x^2 - x + 1) = 16(1 - x)$

$30x^2 + x - 1 = 0$

$(5x + 1)(6x - 1) = 0$

$0 < x < \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{1}{6}$

따라서 $\tan(\angle CDB) = \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

52. ④

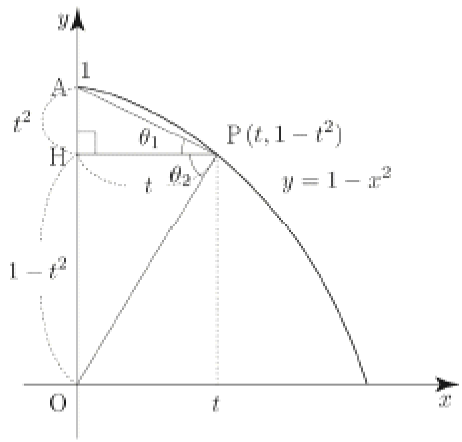
125

점 P의 x좌표를 t라 하자.

$P(t,\ 1 - t^2)$

$\overline{HP} = t$, $\overline{OH} = 1 - t^2$

$\overline{AH} = 1 - (1 - t^2) = t^2$



$\tan\theta_1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{HP}} = \frac{t^2}{t} = t = \frac{1}{2}$

$\tan\theta_2 = \frac{\overline{OH}}{\overline{HP}} = \frac{1 - t^2}{t} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

따라서 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}$

$$=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$$

이다.

답 ④

Theme 17 함수의 몫의 미분법

53. ⑤

050

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-2h)}{h}=3f'(e)=3\times\frac{-1}{e^3}=-\frac{3}{e^3}$

답 ⑤

54. ③

066

$$g(x)=\frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{f'(x)(e^x+1)^2-f(x)\times 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{f'(x)(e^x+1)-2e^x f(x)}{(e^x+1)^3}$$

$f'(0)-f(0)=2$

따라서 $g'(0)=\dfrac{2f'(0)-2f(0)}{8}=\dfrac{f'(0)-f(0)}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

이다.

답 ③

Theme 18 합성함수의 미분법

55. ①

25. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+2x)=3^{x^2-1}+1$$

을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $a\times b$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}\ln 3$ ② $\frac{6}{5}\ln 2$ ③ $\frac{8}{5}\ln 3$

④ $2\ln 3$ ⑤ $\frac{12}{5}\ln 3$

$f(3)=2.$

$(3x^2+2)f'(x^3+2x)=2x\cdot 3^{x^2-1}\ln 3$

$5f'(3)=2\ln 3$

$b=\frac{2}{5}\ln 3$

$\therefore ab=\frac{4}{5}\ln 3.$

56. ②

27. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$---㉠

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$f'(\pi)+f'(0)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1$---㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)+f'(0)\times\frac{1}{2}=1$, $\frac{3}{2}f'(0)=1$

따라서 $f'(0)=\frac{2}{3}$이므로 ㉡에 대입하면

$f'(\pi)-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=-1$

$f'(\pi)=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

정답 ②

57. 17

091

$f(x)=t(\ln x)^2-x^2$

$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=2\left(\frac{t\ln x-x^2}{x}\right)$

함수 $f(x)$이 $x=g(t)$에서 극대이므로

$f'(g(t))=0 \Rightarrow 2\left(\frac{t\ln\{g(t)\}-\{g(t)\}^2}{g(t)}\right)=0$

$\Rightarrow t\ln\{g(t)\}-\{g(t)\}^2=0$

$t\ln\{g(t)\}-\{g(t)\}^2=0$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 α를 대입하면

$\alpha\ln\{g(\alpha)\}-\{g(\alpha)\}^2=0$

$\Rightarrow 2\alpha-e^4=0$ ($\because$ $g(\alpha)=e^2$)

$\Rightarrow \alpha=\frac{e^4}{2}$

㉠의 양변을 t에 대해 미분하면

$\ln\{g(t)\}+\frac{tg'(t)}{g(t)}-2g(t)g'(t)=0$ ⋯ ㉡

㉡의 양변에 α를 대입하면

$\ln\{g(\alpha)\}+\frac{\alpha g'(\alpha)}{g(\alpha)}-2g(\alpha)g'(\alpha)=0$

$\Rightarrow 2+\frac{e^2g'(\alpha)}{2}-2e^2g'(\alpha)=0$

$\Rightarrow 2=\frac{3e^2}{2}g'(\alpha)$

$\Rightarrow g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$

이므로 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$이다.

따라서 $p+q=17$이다.

답 17

58. 5

29. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 l의 기울기는 $\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x+1$

직선 $y=(\tan\theta)x+1$이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1$과 만나는 점의 x좌표가 $f(\theta)$이므로

$\tan\theta\times f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{a}}-1$ …… ㉠

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $a+1=e-1$, $a=e-2$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\times f(\theta)+\tan\theta\times f'(\theta)=\frac{f'(\theta)}{a}e^{\frac{f(\theta)}{a}}$ 에서

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $2(e-2)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{e-2}\times e$

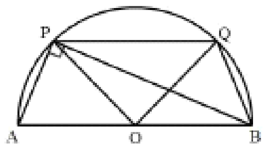
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(e-2)^2$이므로 $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=e-2$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=5$

59. ③

27. 출제의도 : 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 OPA는

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$, $\angle AOP=\pi-2\theta$

인 이등변삼각형이다. 사각형 ABQP는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BQP=\pi-\theta$이고, 선분 AB와 선분 PQ가 평행하므로 $\angle OBQ=\theta$이다.

따라서 삼각형 OBQ는

$\overline{OQ}=\overline{OB}=1$, $\angle BOQ=\pi-2\theta$

인 이등변삼각형이다.

또, 삼각형 OPQ는

$\overline{OP}=\overline{OQ}=1$,

$\angle POQ=\pi-2(\pi-2\theta)=4\theta-\pi$

인 이등변삼각형이다.

이때, 사각형 ABQP의 넓이는

$$f(\theta)=2\times\frac{1}{2}\times1\times1\times sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\times1\times1\times sin(4\theta-\pi)$$

$$=\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\sin(4\theta-\pi)$$

$$=\sin2\theta-\frac{1}{2}\sin4\theta$$

이므로

$f'(\theta)=2\cos2\theta-2\cos4\theta$

이다.

한편, $\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$일 때 삼각형 ABP는

$\angle BAP=a$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

인 직각삼각형이므로

$\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}$

이다. 이때,

$$\begin{aligned}\cos2a&=\cos(a+a)\\&=\cos a\cos a-\sin a\sin a\\&=\cos^2a-\sin^2a\\&=\cos^2a-(1-\cos^2a)\\&=2\cos^2a-1\\&=2\times\frac{1}{10}-1\\&=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

이고, 마찬가지 방법으로

$$\begin{aligned}\cos4a&=\cos(2a+2a)\\&=2\cos^22a-1\\&=2\times\frac{16}{25}-1\\&=\frac{7}{25}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(a)&=2\cos2a-2\cos4a\\&=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)-2\times\frac{7}{25}\\&=-\frac{54}{25}\end{aligned}$$

정답 ③

Theme 19 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

60. ②

24. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t} \cdots ㉠$$

(단, $1-2\sin 2t \neq 0$)

㉠의 우변에 $t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times 1}$$

$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

정답 ②

61. ①

26. 매개변수 $t\ (t>-2)$으로 나타내어진 함수

$$x=\ln(t+2)+t,\quad y=(-t-4)e^{-t}$$

$\frac{1}{t+2}+1=\frac{t+3}{t+2}$　　$-e^{-t}+(t+4)e^{-t}$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$의 최댓값은? [3점]

① e　② $2e$　③ $3e$　④ $4e$　⑤ $5e$

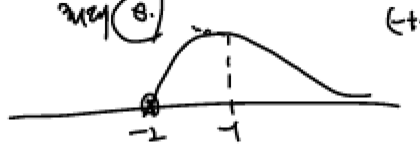
$t>-2$　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(t+3)e^{-t}}{\frac{t+3}{t+2}}=(t+2)e^{-t}$

↓ 미분

$e^{-t}+(-t-2)e^{-t}$

$(-t-1)e^{-t}$

최대 e.



62. ②

24. 매개변수 $t\ (t>0)$로 나타내어진 곡선

$$x=t+\ln\sqrt{t},\quad y=t\sqrt{t}$$

$t^{\frac{1}{2}}$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

$x=t+\frac{1}{2}\ln t$,　$y=t^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2t}$　　$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1$

63. 126

023

$x=\log_3 t,\quad y=3t+\sqrt{3t}$

$1=\log_3 t \Rightarrow t=3$

$a=9+\sqrt{9}=9+3=12$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t\ln 3},\quad \frac{dy}{dt}=3+\frac{1}{2}(3t)^{-\frac{1}{2}}\times 3=3+\frac{3}{2\sqrt{3t}}$

Tip $\{\sqrt{f(x)}\}'=\frac{1}{2}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}-1}\times f'(x)$

$=\frac{1}{2}\{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(x)$

$=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

잘 나오니 기억해두자.

ex $g(x)=\sqrt{5x+3} \Rightarrow g'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3+\frac{3}{2\sqrt{3t}}}{\frac{1}{t\ln 3}}$$

$t=3$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{3+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3\ln 3}}=\frac{21}{2}\ln 3=b$

따라서 $\frac{ab}{\ln 3}=12\times\frac{21}{2}\ln 3\times\frac{1}{\ln 3}=6\times 21=126$이다.

답 126

Theme 20 음함수의 미분법

64. 4

053

$x^3-y^3=e^{xy}$에 $(a,\ 0)$을 대입하면
$a^3=1 \Rightarrow a=1$

음함수 미분법을 이용하여 양변을 x에 대하여 미분하면
$3x^2-3y^2\times y'=(y+xy')e^{xy}$

$(1,\ 0)$을 대입하면
$3=y' \Rightarrow b=3$

따라서 $a+b=1+3=4$이다.

답 4

65. ③

24. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\sin 2y+3x=3$에서
y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\sin 2y+x\cos 2y\times 2\times\frac{dy}{dx}+3=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2y+3}{-2x\cos 2y}\ (\text{단, } x\cos 2y\neq 0)$$

따라서 점 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)+3}{-2\times 1\times cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\pi+3}{-2\cos\pi}$$

$$=\frac{3}{-(-2)}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

66. ②

$$3+\frac{dy}{dx}-\sin(xy)\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\{1-x\sin(xy)\}\frac{dy}{dx}=y\sin(xy)-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)-3}{1-x\sin(xy)}$$

(단, $1-x\sin(xy)\neq 0$)

이때 $x=0,\ y=1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{0-3}{1-0}=-3$$

이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=-3x+1$
따라서 이 접선의 x절편은
$-3x+1=0$에서
$x=\frac{1}{3}$

정답 ②

67. ①

075

원점을 지나고 곡선 $y=e^{-x}+e^{t}$에 접하는 직선에 대하여 접점의 좌표를 $(p,\ e^{-p}+e^{t})$라 하면 접선의 방정식은
$y=-e^{-p}(x-p)+e^{-p}+e^{t}=-e^{-p}x+(1+p)e^{-p}+e^{t}$이다.
이때, 접선이 원점을 지나므로 원점을 대입하면
$0=(1+p)e^{-p}+e^{t}$ ⋯ ㉠ 이고, 직선의 기울기가 $f(t)$이므로
$f(t)=-e^{-p}$ ⋯ ㉡ 이다.

$f(a)=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$이므로
㉡에 의해서 $t=a$일 때, $p=-\dfrac{3}{2}$이다.

㉡의 양변을 t에 대해 미분하면
$f'(t)=\dfrac{dp}{dt}e^{-p}$

$t=a$일 때, $\dfrac{dp}{dt}$를 구하기 위해서
㉠의 양변을 t에 대해 미분하면
$0=\dfrac{dp}{dt}e^{-p}+(1+p)\left(-\dfrac{dp}{dt}\right)e^{-p}+e^{t}$
위 식에 $t=a,\ p=-\dfrac{3}{2}$를 대입하면
$0=\dfrac{dp}{dt}e^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{dp}{dt}e^{\frac{3}{2}}+e^{a}$

$\Rightarrow 0=\dfrac{3}{2}\dfrac{dp}{dt}e^{\frac{3}{2}}+e^{a}$ ⋯ ㉢

e^{a}를 구하기 위해서 ㉠에 $t=a,\ p=-\dfrac{3}{2}$를 대입하면
$0=(1+p)e^{-p}+e^{a}\Rightarrow e^{a}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$
㉢에 이를 대입하면

$0=\dfrac{3}{2}\dfrac{dp}{dt}e^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f'(a)=\dfrac{dp}{dt}e^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$이다.

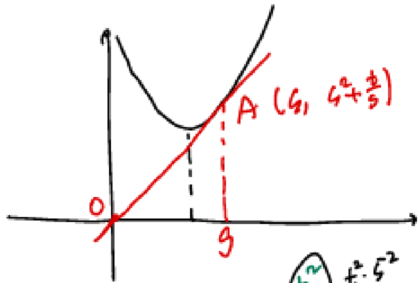
답 ①

68. ④

27. 양의 실수 t에 대하여 원점에서 곡선 $y=x^2+\dfrac{t}{x}\ (x>0)$에 그은 접점을 A라 하자. $f(t)=\overline{\mathrm{OA}}^2$라 할 때, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은? (단, 점 O는 원점이다.) [3점]

① $\dfrac{16}{3}$　② 6　③ $\dfrac{20}{3}$　④ $\dfrac{22}{3}$　⑤ 8

$y'=2x-\dfrac{t}{x^2}=\dfrac{2x^3-t}{x^2}$



$f(t)=\overline{OA}^2=s^2+s^4+2st+\dfrac{t^2}{s^2}$　$t^2\cdot s^{-2}$

$f'(t)=2s\dfrac{ds}{dt}+4s^3\dfrac{ds}{dt}+2t\dfrac{ds}{dt}+2s+2t\cdot s^{-2}+t^2(-2s^{-3})\dfrac{ds}{dt}$

$y=\left(2s-\dfrac{t}{s^2}\right)(x-s)+s^2+\dfrac{t}{s}$

$0=-s^3+\dfrac{2t}{3}$

$s^3=2t\ \to t=\dfrac{1}{2}\to s=1$

$3s^2\dfrac{ds}{dt}=2\ \to\ \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=6\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}+2+1+\dfrac{1}{4}(-2)\times\dfrac{2}{3}$

$=4+\dfrac{2}{3}+3-\dfrac{1}{3}=7+\dfrac{1}{3}=\dfrac{22}{3}$

69. 32

30. 출제의도 : 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

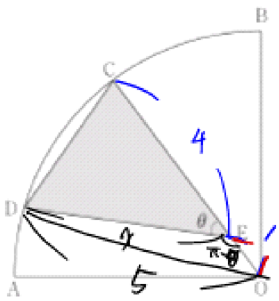
정답풀이 :
선분 AB의 중점을 O라 하면
$\overline{OP}=5$
$\overline{OC}=\overline{AO}-\overline{AC}=5-4=1$
삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면
$\overline{OP}^2=\overline{CP}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{CP}\times\overline{OC}\times\cos\theta$
$\overline{CP}=x$라 하면
$5^2=x^2+1^2-2\times x\times 1\times cos\theta$
$x^2-2x\cos\theta-24=0$ ……㉠
$\theta=\frac{\pi}{4}$ 를 ㉠에 대입하면
$x^2-\sqrt{2}x-24=0$
$x>0$이므로 $x=4\sqrt{2}$
㉠을 θ에 대하여 미분하면
$2x\frac{dx}{d\theta}-2\cos\theta\frac{dx}{d\theta}+2x\sin\theta=0$
$\frac{dx}{d\theta}=\frac{x\sin\theta}{\cos\theta-x}$
$\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $\frac{dx}{d\theta}$ 의 값은
$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-4\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$
선분 PQ의 중심을 M이라 하면
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CM}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2x\sin\theta\times x\cos\theta$$
$$=x^2\sin\theta\cos\theta$$
이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면
$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$$
$$=2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta+x^2\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta$$
이 식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면
$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\times 4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$+(4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4}-(4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$$
$$=-\frac{32}{7}$$
따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-7\times\left(-\frac{32}{7}\right)=32$

정답 32

70. 55

30. 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 선분 OC 위의 점 E를 $\overline{CE} = 4$가 되도록 잡고, 호 AB 위의 점 D를 $\angle CED = \theta$가 되도록 잡을 때, 삼각형 CED의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$f'(\theta) = 2\frac{dx}{d\theta}\sin\theta + 2x\cos\theta$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\frac{dx}{d\theta} + 6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}\frac{dx}{d\theta} + 6$

$= \frac{6}{7} + 6 = \frac{48}{7}$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\times x\times 4\times\sin\theta = 2x\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta) = \frac{1+x^2-25}{2x}$ $-\cos\theta = \frac{x^2-24}{2x}$

$-\cos\theta = \left(\frac{x}{2} - \frac{12}{x}\right)$

θ에 대해 미분

$\sin\theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{12}{x^2}\right)\frac{dx}{d\theta}$

$-\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x^2-24}{2x}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\sqrt{2}x = x^2 - 24$

$x^2 + \sqrt{2}x - 24 = 0$

$(x+4\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) = 0$

$x = 3\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{7}{6}\right)\frac{dx}{d\theta}$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$

55

Theme 21 역함수의 미분법

71. 5

088

함수 $g\left(\frac{x+8}{10}\right)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right) = x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{1}{10}g'\left(\frac{x+8}{10}\right)f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right) = 1$

$g'\left(\frac{x+8}{10}\right) = \dfrac{10}{f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)}$의 양변에 $x=2$을 대입하면

$$g'(1) = \frac{10}{f'(g(1))}$$

$g(1) = 0$이고

$f'(x) = 2xe^{-x} + (-x^2-2)e^{-x} = (-x^2+2x-2)e^{-x}$

$f'(0) = -2$

이므로

$$g'(1) = \frac{10}{f'(g(1))} = \frac{10}{f'(0)} = \frac{10}{-2} = -5$$

따라서 $|g'(1)| = 5$이다.

답 5

72. ⑤

068

$f(x)=e^{2x}+e^{x}-1$
$f'(x)=2e^{2x}+e^{x}$

$g(5f(x))$을 x에 대해 미분하면
$\{g(5f(x))\}'=5f'(x)g'(5f(x))$

$f'(0)=3,\ f(0)=1$이므로
$5f'(0)g'(5f(0))=15g'(5)$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$
양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)f'(g(x))=1$
$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$의 양변에 $x=5$을 대입하면
$g'(5)=\dfrac{1}{f'(g(5))}$

$f(g(x))=x$의 양변에 $x=5$을 대입하면 $f(g(5))=5$이고,
$e^{2x}+e^{x}-1=5 \Rightarrow e^{2x}+e^{x}-6=0$
$\Rightarrow (e^{x}+3)(e^{x}-2)=0 \Rightarrow e^{x}=2\ (\because\ e^{x}>0)$
$\Rightarrow x=\ln 2$
이므로 $g(5)=\ln 2$

$f'(x)=2e^{2x}+e^{x}$
$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}+e^{\ln 2}=8+2=10$
$g'(5)=\dfrac{1}{f'(g(5))}=\dfrac{1}{f'(\ln 2)}=\dfrac{1}{10}$

따라서 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는

$15g'(5)=15\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{2}$이다.

답 ⑤

73. ③

089

$f(x)=\ln\left(\dfrac{\sec x+\tan x}{a}\right)\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)}{x+2}=b$
분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로
분자는 0으로 가야 한다.

$\lim\limits_{x\to -2}g(x)=0 \Rightarrow g(-2)=0 \Rightarrow f(0)=-2$
$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)=b$

$f(0)=\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-2 \Rightarrow a=e^{2}$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$
양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)f'(g(x))=1$
$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$의 양변에 $x=-2$을 대입하면
$g'(-2)=\dfrac{1}{f'(g(-2))}$

$g(-2)=0$이고
$f'(x)=\dfrac{\sec x\tan x+\sec^{2}x}{\sec x+\tan x}$
$f'(0)=1$
이므로
$g'(-2)=\dfrac{1}{f'(g(-2))}=\dfrac{1}{f'(0)}=1=b$
따라서 $ab=e^{2}\times 1=e^{2}$이다.

답 ③

74. ②

26. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}$이므로

$g'(a)=\dfrac{1}{8}$

에서

$f'(g(a))=8$

이때

$f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}$

에서

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}$

이고

$g(a)=b$

라 하면

$f'(g(a))=f'(b)$

$=3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}$

이고

$f'(g(a))=8$

이므로

$3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}=8$

$3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}-8=0$

$(e^{b}-2)(3e^{2b}+4)=0$

$e^{b}>0$이므로 $e^{b}=2$

즉, $b=\ln 2$

$g(a)=b$

에서

$a=f(b)$

이므로

$a=f(\ln 2)$

$=e^{3\ln 2}-3e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}$

$=e^{\ln 8}-3e^{\ln 4}+4e^{\ln 2}$

$=8-3\times 4+4\times 2$

$=4$

따라서

$a+f'(g(a))=4+8=12$

정답 ②

75. ①

27. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 함숫값과 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x^3+x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

모든 실수 x에 대하여

$g(f(x^3+x))=x$ …… ㉠

가 성립한다.

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=0$

$(x-1)(x^2+x+2)=0$ …… ㉡

이때,

$x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$

이므로 ㉡에서

$x=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(f(2))=1$

이고, $f(2)=1$이므로

$g(1)=1$

한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x^3+x))\times f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=1$

위 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(2))\times f'(2)\times 4=1$

$f(2)=1$이므로

$4g'(1)\times f'(2)=1$ …… ㉢

$f'(2)=8g'(1)-1$을 ㉢에 대입하면

$4g'(1)(8g'(1)-1)=1$

$32(g'(1))^2-4g'(1)-1=0$

$(4g'(1)-1)(8g'(1)+1)=0$

$g'(1)=\dfrac{1}{4}$ 또는 $g'(1)=-\dfrac{1}{8}$

(ⅰ) $g'(1)=\frac{1}{4}$일 때,

$f'(2)=8g'(1)-1$

$=8\times\frac{1}{4}-1$

$=1>0$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)>0$이라는 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $g'(1)=-\frac{1}{8}$일 때,

$f'(2)=8g'(1)-1$

$=8\times\left(-\frac{1}{8}\right)-1$

$=-2<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)>0$이라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g'(1)=\frac{1}{4}$이므로

$g(1)+g'(1)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

정답 ①

76. ④

27. 상수 a $(a>0)$에 대하여 정의역이 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}\pi < x < \frac{a}{2}\pi\right\}$인 함수 $f(x)=3\tan\frac{x}{a}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(3)=\frac{2}{3}$일 때, $g'(6)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$f(g(x))=x \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

$g'(3)=\frac{1}{f'(\underbrace{g(3)}_{k})}=\frac{1}{f'(k)}=\frac{2}{3}$

$f'(k)=\frac{3}{2}$

$f'(x)=\frac{3}{a}\sec^2\frac{x}{a}$

$f'(k)=\frac{3}{a}\sec^2\frac{k}{a}=\frac{3}{2}$

$g(3)=k \Rightarrow f(k)=3$

$3\tan\frac{k}{a}=3 \Rightarrow \tan\frac{k}{a}=1$

$\tan^2\frac{k}{a}=1 \quad \sec^2\frac{k}{a}=\frac{a}{2}$

$1+\tan^2\frac{k}{a}=\sec^2\frac{k}{a}$

$1+1=\frac{a}{2}$

$a=4$

$f(x)=3\tan\frac{x}{4}$

$g'(6)=\frac{1}{f'(\underbrace{g(6)}_{p})}=\frac{1}{f'(p)}=\frac{1}{\frac{3}{4}\sec^2\frac{p}{4}}=\frac{4}{15}$

$f(p)=6$

$3\tan\frac{p}{4}=6 \Rightarrow \tan\frac{p}{4}=2 \Rightarrow 1+4=\sec^2\frac{p}{4}=5$

28.

$g(x)=$

77. ④

25. 함수 $f(x)=e^{\sec x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^2,\ g(e^2))$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{5\sqrt{3}}{12e^2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3e^2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4e^2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6e^2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{12e^2}$

$f(g(e^2))=e^2 \Rightarrow g(e^2)=\frac{\pi}{3}$

$f'(x)=\sec x\tan x\, e^{\sec x}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\sqrt{3}\times e^2=2\sqrt{3}e^2$

$g'(e^2)=\frac{1}{f'(g(e^2))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}e^2}=\frac{\sqrt{3}}{6e^2}$

78. ④

096

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로

$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\{f'(t)-g'(t)\}$

$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$

곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$과 직선 $y=5$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표가 $(f(5),\ 5)$ 가장 작은 점의 좌표가 $(g(5),\ 5)$이므로

$x^3+2x^2-15x+5=5 \Rightarrow x^3+2x^2-15x=0$

$\Rightarrow x(x+5)(x-3)=0 \Rightarrow f(5)=3,\ g(5)=-5$

$f(5)$와 $g(5)$의 값은 쉽게 구했는데 $f'(5)$, $g'(5)$의 값은 어떻게 구할 수 있을까?

두 점 $(f(t),\ t)$, $(g(t),\ t)$는 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$ 위의 점이므로 대입하면 다음이 성립한다.

$t=\{f(t)\}^3+2\{f(t)\}^2-15\{f(t)\}+5$ ⋯ ㉠

$t=\{g(t)\}^3+2\{g(t)\}^2-15\{g(t)\}+5$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=3f'(t)\{f(t)\}^2+4f'(t)f(t)-15f'(t)$

양변에 $t=5$를 대입하면

$1=3f'(5)\{f(5)\}^2+4f'(5)f(5)-15f'(5)$

$f(5)=3$이므로

$1=27f'(5)+12f'(5)-15f'(5) \Rightarrow f'(5)=\frac{1}{24}$

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=3g'(t)\{g(t)\}^2+4g'(t)g(t)-15g'(t)$

양변에 $t=5$를 대입하면

$1=3g'(5)\{g(5)\}^2+4g'(5)g(5)-15g'(5)$

$g(5)=-5$이므로

$1=75g'(5)-20g'(5)-15g'(5) \Rightarrow g'(5)=\frac{1}{40}$

따라서 $h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$

$=\{3-(-5)\}+5\left\{\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right\}$

$=8+5\times\frac{1}{60}=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$

이다.

답 ④

다른 방법으로 풀어보자.

첫 번째 풀이와 같은 방법으로 $f(5)=3$, $g(5)=-5$를 얻을 수 있다.

$i(t)=t^3+2t^2-15t+5$라 하면

$i'(t)=3t^2+4t-15$이고

두 점 $(f(t),\ t)$, $(g(t),\ t)$는 곡선 $y=i(x)$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$i(f(t))=t$ ⋯ ㉠

$i(g(t))=t$ ⋯ ㉡

역함수 미분법을 이용하여 $f'(5)$, $g'(5)$의 값을 구해보자.

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)i'(f(t))=1$

$f'(t)=\frac{1}{i'(f(t))}$의 양변에 $t=5$을 대입하면

$f'(5)=\frac{1}{i'(f(5))}=\frac{1}{i'(3)}=\frac{1}{27+12-15}=\frac{1}{24}$

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)i'(g(t))=1$

$g'(x)=\frac{1}{i'(g(x))}$의 양변에 $t=5$을 대입하면

$g'(5)=\frac{1}{i'(g(5))}=\frac{1}{i'(-5)}=\frac{1}{75-20-15}=\frac{1}{40}$

Tip

〈그땐 그랬지〉

2016년 수능 B형 21번에 출제되었던 문제였고
그 당시 B형 1등급 컷이 96점이었다.
즉, 이 문항을 틀렸다면 다른 문제들을 모두 맞아야
딱 1등급 컷이었다.

사실 지금 보면 워낙 노출이 많이 되어 아무것도
아닌 문제 같지만 그 당시 이 문제를 수능장에서
처음 본 학생들이 느끼는 체감 난이도는 아주 높았다.
시험이 끝나고 난 뒤 30번보다 21번이 더
어려웠다는 학생들이 대다수였을 정도로
결코 만만치 않았던 문제였다.

문제의 접근이 막막할 때는 문제를 풀려고
노력하기보다는 '이 문제는 어떤 개념이
사용되었을까?'를 떠올려보도록 하자.

Theme 22 이계도함수

79. 10

037

$g'(1)=-e$, $g''(1)=2e$

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$g(x)=(x^2+ax+b)e^x$이므로

$g'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$g''(x)=2e^x+(2x+a)e^x+(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$g'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(1)=(2+a)e+(1+a+b)e$

$=(2a+b+3)e=-e$

$\Rightarrow 2a+b+3=-1 \Rightarrow 2a+b=-4$

$g''(x)=2e^x+(2x+a)e^x+(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g''(1)=2e+(2+a)e+(2+a)e+(1+a+b)e$

$=(3a+b+7)e=2e$

$\Rightarrow 3a+b=-5$

$2a+b=-4$, $3a+b=-5$를 연립하면

$a=-1$, $b=-2$이므로

$f(x)=x^2-x-2$

따라서 $f(4)=16-4-2=10$이다.

답 10

80. 36

038

(가) $\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$

(나) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1$

$\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{8}$를 대입하면

$\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1+\left\{f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right\}^2 \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=4$

$\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f''(x)}{2}=2f'(x)f(x)$

위 식의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{8}$을 대입하면

$$\frac{f''\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}=2f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{8}\right)=4f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)=4\times4\times1=16$$

$g(x)=e^{f'(x)f(x)}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\{f''(x)f(x)+f'(x)f'(x)\}e^{f'(x)f(x)}$

위 식의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{8}$을 대입하면

$$g'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left\{f''\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f'\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}e^{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=(16+16)e^4=32e^4=ae^b$$

따라서 $a+b=32+4=36$이다.

답 36

81. ②

039

$g(x)=f(x)\sin 2x$

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\times\sin 2x\right)=0$$

$f(x)$는 다항함수이므로 최고차항을 $ax^n\ (a\neq 0)$라 하자.
이때, $n\geq 2$이면 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 일차함수 또는 상수함수이어야 하므로
$f(x)=ax+b$라고 식을 세울 수 있다.

$g(x)=(ax+b)\sin 2x$

$g'(x)=a\sin 2x+2(ax+b)\cos 2x$

(나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{x}=8$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로
분자는 0으로 가야 한다.

$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=0 \Rightarrow g'(0)=0 \Rightarrow b=0$

$g'(x)=a\sin 2x+2ax\cos 2x$

$g''(x)=2a\cos 2x+2a\cos 2x-4ax\sin 2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=g''(0)=8$$

$\Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=2x$

$g(x)=2x\sin 2x,\ g'(x)=2\sin 2x+4x\cos 2x$

$h(x)=\ln|g(x)|$

$h'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

따라서 $h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{4}{\pi}$이다.

답 ②

Theme 23 접선의 방정식

82. ②

012

$f(x)=3\ln(x^2+2)$라 하면 $f'(x)=\dfrac{6x}{x^2+2}$

접점의 좌표를 t라 하면

$f'(t)=2 \Rightarrow \dfrac{6t}{t^2+2}=2 \Rightarrow 3t=t^2+2 \Rightarrow t^2-3t+2=0$

$\Rightarrow (t-2)(t-1)=0 \Rightarrow t=1$ or $t=2$

① $t=1$일 때
$f(1)=3\ln3$, $f'(1)=2$이므로
접선의 방정식은 $y=2(x-1)+3\ln3=2x-2+3\ln3$

② $t=2$일 때
$f(2)=3\ln6$, $f'(2)=2$이므로
접선의 방정식은 $y=2(x-2)+3\ln6=2x-4+3\ln6$

따라서 $y_1+y_2=-2+3\ln3-4+3\ln6=3\ln18-6$이다.

답 ②

83. ①

065

$y=ke^x+1$, $y=x^2-3x+4$ $(k>0)$
$y'=ke^x$, $y'=2x-3$

점 P의 x좌표를 t라 하면
$ke^t+1=t^2-3t+4$

$ke^t\times(2t-3)=-1$
이므로 연립하면

$(t^2-3t+3)\times(2t-3)=-1 \Rightarrow 2t^3-9t^2+15t-8=0$

$\Rightarrow (t-1)(2t^2-7t+8)=0 \Rightarrow t=1$

$t=1$을 $ke^t\times(2t-3)=-1$에 대입하면
$ke\times(-1)=-1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{e}$

따라서 $k=\dfrac{1}{e}$이다.

답 ①

84. 10

074

$g(x)=\sin x$
$h(x)=g(f(x))$라 하면
$h'(x)=f'(x)g'(f(x))$
$x=1$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(1)\cos(f(1))(x-1)+\sin(f(1))$
원점을 지나므로 $(0,\ 0)$을 대입하면
$0=-f'(1)\cos(f(1))+\sin(f(1))$

$\Rightarrow f'(1)\cos(f(1))=\sin(f(1))$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로
분자도 0으로 가야한다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\left(f(x)-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Rightarrow f(1)=\frac{\pi}{6}$
($\because$ $f(x)$는 미분가능한 함수)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=k$$

$f(1)=\dfrac{\pi}{6}$, $f'(1)=k$을
$f'(1)\cos(f(1))=\sin(f(1))$에 대입하면
$\dfrac{\sqrt3}{2}k=\dfrac{1}{2} \Rightarrow k=\dfrac{1}{\sqrt3}$

따라서 $30k^2=30\times\dfrac{1}{3}=10$이다.

답 10

Theme 24 함수의 증가와 감소

85. ②

019

$f(x)=-\ln(\cos x)-ax^2$

$f'(x)=-\dfrac{-\sin x}{\cos x}-2ax=\tan x-2ax$

열린구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 증가해야 하므로

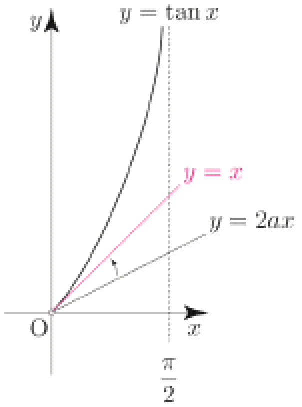
$f'(x)\ge 0 \Rightarrow \tan x-2ax\ge 0 \Rightarrow \tan x \ge 2ax\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=y$를 붙여 함수의 그래프로 해석해보자.

$y=\tan x$ 의 그래프가 $y=2ax$의 그래프보다 같거나
위에 존재해야 한다.

$g(x)=\tan x$라 하면 $g'(x)=\sec^2 x \Rightarrow g'(0)=1$
함수 $g(x)$는 원점에서의 접선의 기울기가 1이므로
부등식 $\tan x \ge 2ax\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$이 성립하려면

$1\ge 2a \Rightarrow a\le \dfrac{1}{2}$



따라서 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 ②

86. 1

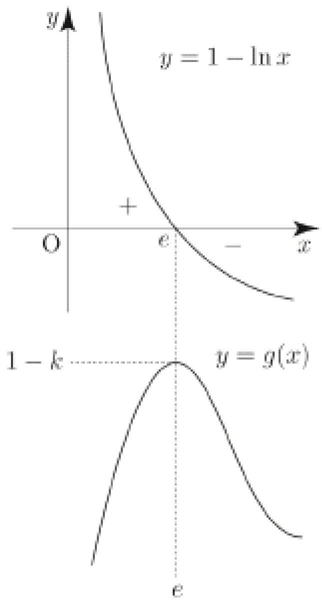
021

$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2+k}{x}\ (x>0)$의 역함수가 존재하려면
$f(x)$가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.
즉, $f'(x)\le 0$ or $f'(x)\ge 0$

$f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2-k}{x^2}=\dfrac{-(\ln x)^2+2\ln x-k}{x^2}$이므로
Semi 도함수 $f'(x)=-(\ln x)^2+2\ln x-k$

$g(x)=-(\ln x)^2+2\ln x-k$라 하면
$g'(x)=-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$이므로

Semi 도함수 $g'(x)=1-\ln x$
$\lim_{x\to 0+} g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$
이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



즉, $g(e)=1-k\le 0 \Rightarrow g(x)\le 0 \Rightarrow f'(x)\le 0$
$f(x)$는 감소함수 $\Rightarrow$ 역함수 존재
이므로 역함수가 존재하려면 $1-k\le 0 \Rightarrow 1\le k$

따라서 k의 최솟값은 1이다.

답 1

87. ①

27. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가지려면 $g(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$f'(x)=3e^{3x}-a$, $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>k) \\ -f'(x) & (x<k) \end{cases}$ 에서

$a \le 0$이면 모든 실수 x에 대해 $f'(x)>0$이다.

$x>k$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<k$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

$a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이고

$x<\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이면 $f'(x)<0$,

$x>\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이면 $f'(x)>0$이므로 $k=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$

$g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$f(k)=-f(k)$, $f(k)=0$

$f(k)=f\left(\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\ln\frac{a}{3}=0$, $a=3e$, $k=\frac{1}{3}$

따라서 $a\times k=e$

Theme 25 함수의 극대와 극소

88. ③

026

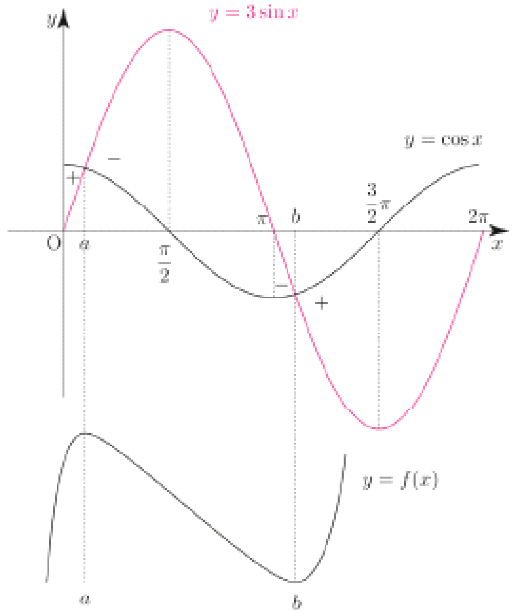
$f(x)=\frac{\sin x}{e^{3x}}=e^{-3x}\sin x$

$f'(x)=-3e^{-3x}\sin x+e^{-3x}\cos x=(\cos x-3\sin x)e^{-3x}$

Semi 도함수 $f'(x)=\cos x-3\sin x$

두 함수 $y=\cos x$, $y=3\sin x$의 그래프를 이용하여

빼기함수 Technique으로 도함수의 부호를 처리해 보자.



$\cos x-3\sin x=0 \Rightarrow \cos x=3\sin x \Rightarrow \tan x=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan a=\tan b=\frac{1}{3}$

$0<a<\frac{\pi}{2}$, $\pi<b<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos a=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin a=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos b=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin b=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

따라서 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-\frac{1}{\sqrt{10}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$=-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$

이다.

답 ③

89. ⑤

27. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}-\{f(x)+k\}f'(x)e^{f(x)}}{\{e^{f(x)}\}^2}$$
$$=\frac{f'(x)\{1-k-f(x)\}}{e^{f(x)}}$$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극대이므로 $g'(3)=0$
$f'(3)=0$ 또는 $f(3)=1-k$
함수 $f(x)$가 이차함수이므로 $f'(3)=0$이면
$k\neq 0$인 실수 k에 대하여
$f(3)\neq f(3-2k)$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $f'(3)\neq 0$이고 $f(3)=1-k$

$$g(3)=\frac{f(3)+k}{e^{f(3)}}=\frac{1}{e^{1-k}}=e^{k-1}$$

$g(3)=e$이므로 $k=2$
$f(3)=f(-1)=-1$
그러므로 $f(x)+1=(x+1)(x-3)$
$f(x)=x^2-2x-4$, $f(2)=-4$

따라서 $g(k)=g(2)=\dfrac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=-2e^4$

Theme 26 변곡점

90. ⑤

066

$$y=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$$

$f(x)=(\ln ax)^2$라 하면

$$f'(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{2\times\frac{a}{ax}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

$x=\dfrac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로

$f(x)$는 변곡점 $\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$을 갖는다.

변곡점이 $y=2x$ 위에 있으므로 $\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$을 대입하면

$1=\dfrac{2e}{a}\ \Rightarrow\ a=2e$

따라서 $a=2e$이다.

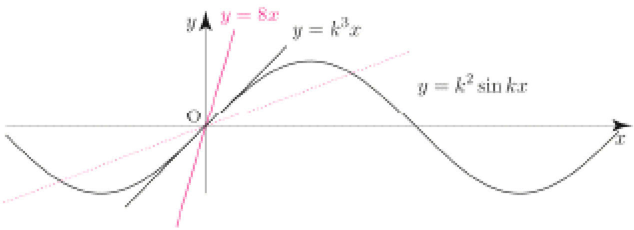
답 ⑤

91. 2

077

$f(x)=3\sin kx+4x^3$
$f'(x)=3k\cos kx+12x^2$
$f''(x)=24x-3k^2\sin kx=3(8x-k^2\sin kx)$
Semi 이계도함수 $f''(x)=8x-k^2\sin kx$
두 함수 $y=8x$, $y=k^2\sin kx$의 그래프를 이용하여
빼기함수 Technique으로 이계도함수의 부호를 처리해 보자.

실수 k의 최댓값을 구하는 것이므로 $k>0$라고 가정하고 풀어보자.
$g(x)=k^2\sin kx$라 하면
$g'(x)=k^3\cos kx$이므로 $g'(0)=k^3$
$x=0$에서의 접선의 방정식은 $y=k^3x$이다.



$k^3>8$이면 위의 접선처럼 $f''(x)$의 부호가 변하는 점이 오직 하나일 수가 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $f''(x)$의 부호가 변하는 점이 오직 하나 존재하려면
$k^3\leq 8\ \Rightarrow\ k\leq 2$ 이어야 한다.

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.
(참고로 k가 음수일 때, 항상 해당 조건을 만족하는 것은 아니다. 예를 들어 $k=-4$일 때, $y=8x$의 그래프와 $y=16\sin(-4x)$의 그래프는 서로 다른 5개의 점에서 만난다.)

답 2

92. ③

091

$f(x)=ae^{3x}+be^{x}$

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$

$f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

$x=\ln\frac{2}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로

$f(x)$는 변곡점 $\left(\ln\frac{2}{3},\ f\left(\ln\frac{2}{3}\right)\right)$을 갖는다.

$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$

$9a\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+b\times\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \frac{8a+2b}{3}=0 \Rightarrow b=-4a$

$a>0$이므로 $b<0$

(나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 역함수가 존재하려면
구간 $[k,\ \infty)$에서 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}=ae^{x}(3e^{2x}-4)$

Semi 도함수 $f'(x)=3e^{2x}-4$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^{2x}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하므로

$\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\le k \Rightarrow m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$f(x)=ae^{3x}+be^{x}=ae^{3x}-4ae^{x}$

$f(2m)=-\frac{80}{9} \Rightarrow f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=a\times\frac{64}{27}-4a\times\frac{4}{3}=-\frac{80}{9}$

$\Rightarrow -\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9} \Rightarrow a=3$

따라서 $f(0)=a-4a=-3a=-9$이다.

답 ③

93. 5

037

$f(x)=a\ln(x^2+1)$

$f'(x)=\frac{2ax}{x^2+1}$

$f''(x)=\frac{2a(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2a(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f''(1)=0,\ f''(-1)=0$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하고
$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로
$f(x)$는 변곡점 $(1,\ a\ln2)$, $(-1,\ a\ln2)$를 갖는다.

(가) 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점에서의 접선은 서로 수직이다.
$f'(1)\times f'(-1)=-1 \Rightarrow a\times(-a)=-1 \Rightarrow a=1\ (\because a>0)$

$f(x)=\ln(x^2+1)$

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

(나) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)-\frac{n}{4}x^2$은 오직 $x=b$에서만 극값을 갖는다.

$g(x)=f(x)-\frac{n}{4}x^2$라 하면

$g'(x)=f'(x)-\frac{n}{2}x=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{n}{2}x$

두 함수 $y=\frac{2x}{x^2+1}$, $y=\frac{n}{2}x$의 그래프를 이용하여

빼기함수 Technique으로 도함수의 부호를 처리해 보자.

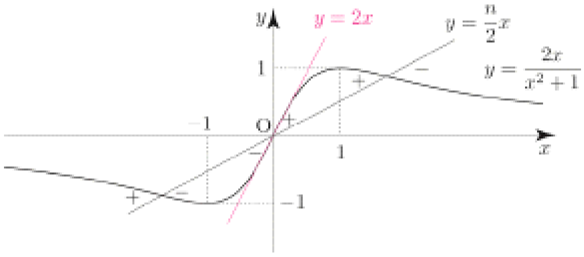
$h(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $h'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$h''(x)=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$h'(0)=2$이고 $x=0$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 변하므로
$(0,\ 0)$에서 변곡점을 갖고, 변곡접선(뚫는 접선)의 기울기는 2이다.

Tip Guide step [예제7] 해설에서도 언급했듯이
$y=\frac{kx}{x^2+1}$ 꼴의 그래프는 자주 나오는 편이니
암기하도록 하자.

만약 $\frac{n}{2}<2$라면 아래와 같이 $f'(x)-\frac{n}{2}x$의 부호가 변하는 x의 값이 3개 존재하므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.



자연수 n의 값과 관계없이 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하므로 $x=0$에서 극값을 갖는다.
즉, (나) 조건을 만족시키려면 $x=0$에서만 극값을 가져야 하므로 $b=0$이고, $\frac{n}{2}\geq 2 \Rightarrow n\geq 4$이므로 $c=4$이다.

따라서 $a+b+c=1+0+4=5$이다.

답 5

94. ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ, ㅈ

038

$f(x)=2\ln(3-x)+\frac{1}{2}x^2\ (x<3)$

$f'(x)=\frac{-2}{3-x}+x=\frac{-2+3x-x^2}{3-x}=\frac{-(x-1)(x-2)}{3-x}$

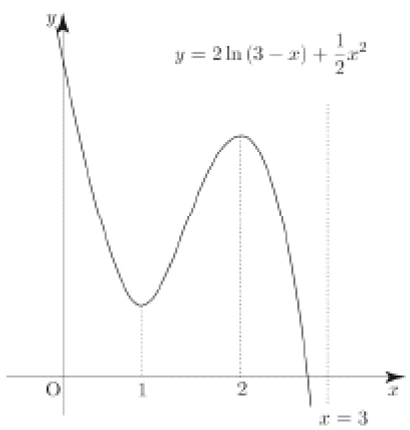
$x<3 \Rightarrow 3-x>0$이므로

Semi 도함수 $f'(x)=-(x-1)(x-2)$

$f''(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$

$\lim_{x\to 3-}f(x)=-\infty$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $-+$로 변하므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=3$을 점근선으로 갖는다.

$\lim_{x\to 3-}f(x)=-\infty$이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $x_1<x_2<2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)<f(x_1)$이다.

ㄷ은 "열린구간 $(-\infty,\ 2)$에서 $f(x)$가 감소한다."와 동치이다.
열린구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이고
열린구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로
ㄷ은 거짓이다.

ㄹ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

$$f''(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}}{(x-3)^2}\ (x<3)$$

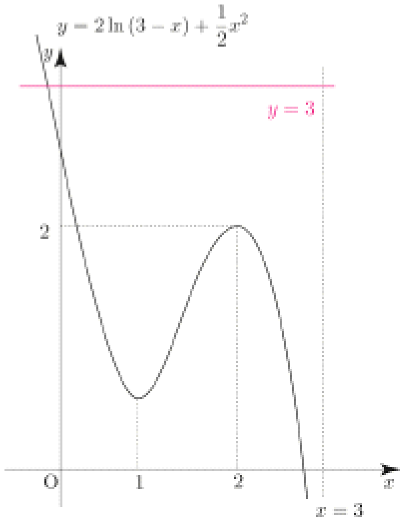
이므로 $f''(3-\sqrt{2})=0$이고, $x=3-\sqrt{2}$에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 변곡점 $(3-\sqrt{2},\ f(3-\sqrt{2}))$를 갖는다.
곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.
따라서 ㄹ은 거짓이다.

Tip 정의역이 $x<3$이므로 점 $(3+\sqrt{2},\ f(3+\sqrt{2}))$은 변곡점이 될 수 없다.

ㅁ. 곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ k)$에서 아래로 볼록하도록 하는 실수 k의 최댓값은 $3-\sqrt{2}$이다.

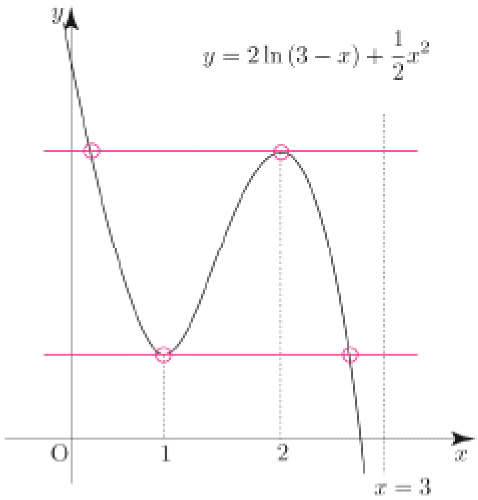
Semi 이계도함수
$f''(x)=\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}\ (x<3)$
이므로 열린구간 $(-\infty,\ 3-\sqrt{2})$에서 $f''(x)>0$이므로
열린구간 $(-\infty,\ 3-\sqrt{2})$에서 아래로 볼록하다.
따라서 ㅁ은 참이다.

ㅂ. 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



$f(2)=2$이므로 두 그래프 $y=f(x)$, $y=3$의 교점은 오직 하나 존재한다.
따라서 ㅂ은 거짓이다.

ㅅ. 방정식 $f(x)=f(a)$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 개수는 2이다.



위 그림처럼 조건을 만족시키는 실수 a의 개수는 4이다.
따라서 ㅅ은 거짓이다.

ㅇ. $\lim_{x\to b+}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}$를 만족시키는 실수 b는 오직 하나 존재한다.

ㅇ은 "함수 $|f(x)|$는 오직 한 점에서만 미분가능하지 않다."와 동치이다.

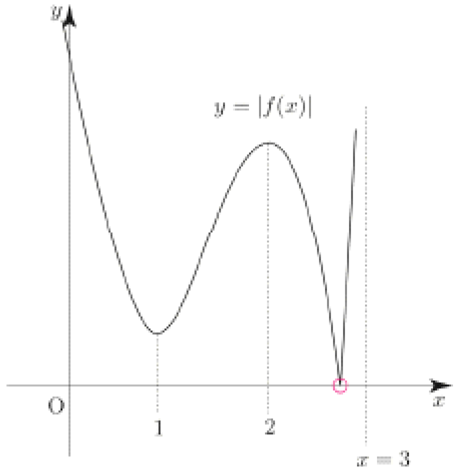
Tip 바로 이해하기 어렵다면 치환을 활용해보자.
$g(x)=|f(x)|$라 하면

$$\lim_{x\to b+}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to b+}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}$$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

$f(1)=2\ln2+\frac{1}{2}=\ln4+\frac{1}{2}>0$이므로
함수 $|f(x)|$는 오직 한 점에서 미분가능하지 않다.
따라서 ㅇ은 참이다.



ㅈ. $x_1<3-\sqrt{2}<x_2<3$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

$$f''(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}}{(x-3)^2}\quad(x<3)$$

$x=3-\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로
ㅈ은 참이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ, ㅈ

Theme 27 함수의 최대와 최소

95. ④

039

닫힌구간 $[0,\ 4]$

$f(x)=(x^2-3)e^{-x+3}$

$f'(x)=-(x^2-2x-3)e^{-x+3}=-(x+1)(x-3)e^{-x+3}$

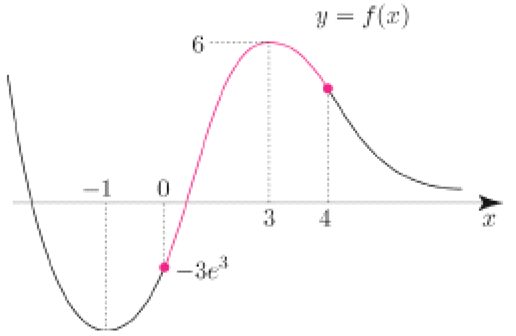
Semi 도함수 $f'(x)=-(x+1)(x-3)$

$f'(-1)=0,\ f'(3)=0 \quad \Rightarrow f(-1)=-2e^4,\ f(3)=6$

$\Rightarrow x=-1$에서 극소, $x=3$에서 극대

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $f(x)$는

$x=3$에서 최댓값 $f(3)=6=M$을 갖고,

$x=0$에서 최솟값 $f(0)=-3e^3=m$을 갖는다.

따라서 $M\times m=6\times(-3e^3)=-18e^3$이다.

답 ④

96. ②

27. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식과 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=a^x$에서 $y'=a^x\ln a$

이때 점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 접선 l의 기울기는

$a^t\ln a$

이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{1}{a^t\ln a}$

그러므로 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y-a^t=-\dfrac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-a^t=-\dfrac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

$x=t+a^{2t}\ln a$

이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t+a^{2t}\ln a,\ 0)$

한편 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$

$f(t)=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$f'(t)=\dfrac{a^{2t}\ln a-ta^{2t}\times 2(\ln a)^2}{(a^{2t}\ln a)^2}$

$=\dfrac{a^{2t}\ln a(1-2t\ln a)}{(a^{2t}\ln a)^2}$

$f'(t)=0$에서

$1-2t\ln a=0$

$t=\dfrac{1}{2\ln a}$

이고, 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{2\ln a}$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\frac{1}{2\ln a}=1$이므로

$\ln a=\frac{1}{2}$

$a=\sqrt{e}$

정답 ②

Theme 28 방정식의 실근의 개수

97. ②

074

$x^2-5x+2\ln x=t$

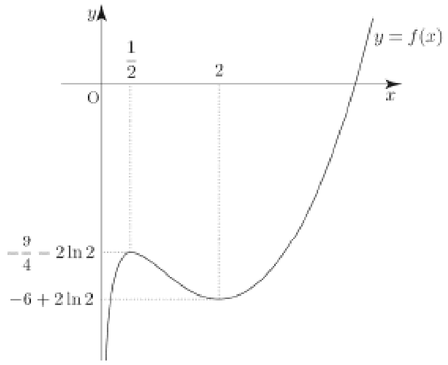
$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}-2\ln 2$, $f(2)=-6+2\ln 2$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$가 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ or $t=-6+2\ln 2$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은 $-\frac{33}{4}$이다.

답 ②

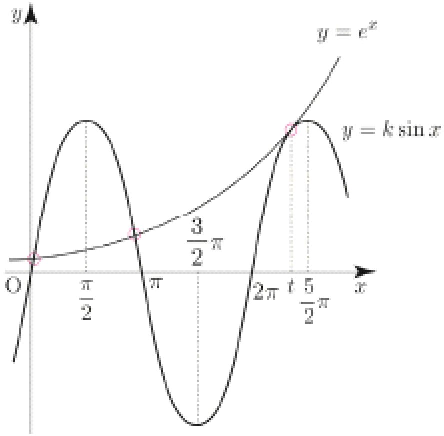
98. ④

073

$f(x)=e^x$, $g(x)=k\sin x$

$f(x)=g(x) \Rightarrow e^x=k\sin x$

방정식 $e^x=k\sin x$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이므로 $x>0$에서 곡선 $y=e^x$와 곡선 $y=k\sin x$는 아래 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



접점의 x좌표를 t라 하면

$e^t=k\sin t$

$e^t=k\cos t$

이므로 연립하면

$k\sin t=k\cos t \Rightarrow \sin t=\cos t \Rightarrow \tan t=1$

$\Rightarrow t=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9}{4}\pi \left(\because 2\pi<t<\frac{5}{2}\pi\right)$

$e^{\frac{9}{4}\pi}=k\sin\frac{9}{4}\pi \Rightarrow e^{\frac{9}{4}\pi}=k\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

따라서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$이다.

답 ④

99. ③

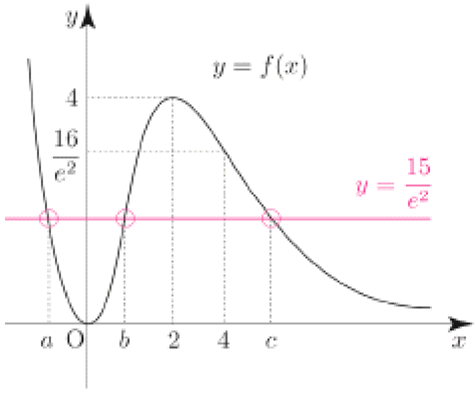
086

$f(x)=x^2e^{-x+2}$

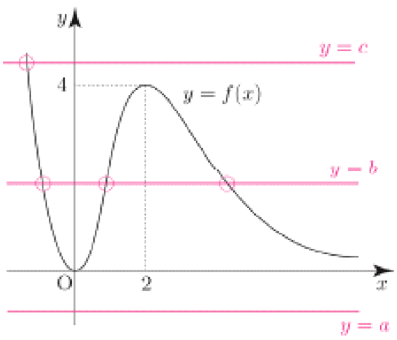
$f(4)=16e^{-2}=\dfrac{16}{e^2}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$가 만나는 세 점의

x좌표를 각각 a, b, c라 하면 $a<0$, $0<b<2$, $4<c$이다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$는 만나지 않는다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=b$는 서로 다른 세 점에서 만난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=c$는 한 점에서 만난다.



따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의

교점의 개수는 4이다.

답 ③

Tip <왜 하필 $y=\dfrac{15}{e^2}$일까?>

c가 4보다 큰지 작은지 같은지를 알아야
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=c$가 만나는 점의
개수를 파악할 수 있기 때문이다.

즉, $f(4)=16e^{-2}=\dfrac{16}{e^2}$이므로 $4<c$인 것을

알려주기 위함이다.

Theme 29 부등식의 활용

100. ①

053

$2x+1+ke^{x^2}\geq 0 \Rightarrow ke^{x^2}\geq -2x-1 \Rightarrow k\geq(-2x-1)e^{-x^2}$

$f(x)=(-2x-1)e^{-x^2}$라 하면

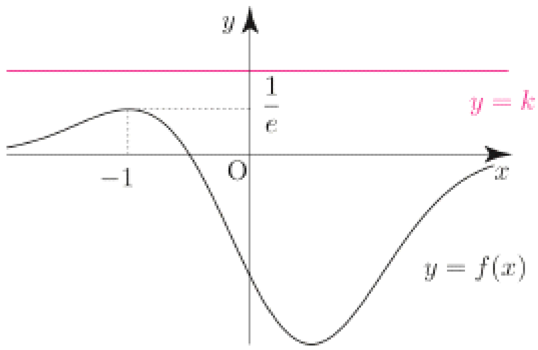
$f'(x)=-2e^{-x^2}+(4x^2+2x)e^{-x^2}=2(2x-1)(x+1)e^{-x^2}$

Semi 도함수 $f'(x)=(2x-1)(x+1)$

$f'(-1)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, $f(-1)=\dfrac{1}{e}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow x=-1$에서 극대, $x=\dfrac{1}{2}$에서 극소

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$



$k\geq(-2x-1)e^{-x^2} \Rightarrow k\geq\dfrac{1}{e}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{1}{e}$이다.

답 ①

Tip 가이드스텝에서 배운 다항함수×지수함수 빨리
그리기를 적용시켜 대략적인 그래프 개형을
파악해도 좋다.

Theme 30 속도와 가속도

101. 6

054

$x=\frac{1}{2}\cos 2t,\ y=t-\frac{1}{2}\sin 2t$

$\frac{dx}{dt}=-\sin 2t,\ \frac{dy}{dt}=1-\cos 2t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\cos 2t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=2\sin 2t$

가속도가 $(1,\ a)$이므로

$-2\cos 2t=1 \Rightarrow \cos 2t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a=2\sin 2t=\pm\sqrt{3}$

속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}=b$

따라서 $a^2+b^2=3+3=6$이다.

답 6

102. ④

056

$x=t-\frac{1}{2t},\ y=t+\frac{2}{t}$

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2t^2}=1+\frac{1}{2}t^{-2},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{2}{t^2}=1-2t^{-2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-t^{-3}=-\frac{1}{t^3},\ \frac{d^2y}{dt^2}=4t^{-3}=\frac{4}{t^3}$

따라서 시각 $t=2$일 때, 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{4}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{16}{64}}=\frac{\sqrt{17}}{8}$

이다.

답 ④

3. 적분법

Theme 31 여러 가지 함수의 적분법

103. ④

009

$x^3f'(x)=\cos x-3x^2f(x)$

$\Rightarrow\ x^3f'(x)+3x^2f(x)=\cos x$

$\{x^3f(x)\}'=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$\{x^3f(x)\}'=\cos x$

$x^3f(x)=\sin x+C$

$f(\pi)=0 \Rightarrow C=0$

$x^3f(x)=\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi^3}$

$x^3f'(x)=\cos x-3x^2f(x)$의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi^3}{8}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{4}\pi^2\times\frac{8}{\pi^3} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{48}{\pi^4}$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{48}{\pi^4}$이다.

답 ④

104. ⑤

010

$xf'(x)-f(x)=x^2\tan^2 x$

$\Rightarrow\ \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\tan^2 x$

Tip $\frac{3}{\pi}\times f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}$의 값을 구하는 것으로부터 몫의 미분법에 대한 힌트를 얻을 수 있다.

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$이므로

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\tan^2 x=\sec^2 x-1$

이므로

$\frac{f(x)}{x}=\tan x-x+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$

$\frac{f(x)}{x}=\tan x-x+\frac{\pi}{4}$

따라서 $\frac{3}{\pi}\times f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}$이다.

답 ⑤

Theme 32 치환적분법

105. ②

25. 출제의도 : 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$이므로

$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$

$=\int_1^e f'(x)f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$

$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$

$=\frac{e^2}{2}+e$

정답 ②

106. ④

24. 출제의도 : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이다.

이때,

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=0$이고

$x=\frac{3\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$

$=\int_0^1 e^t dt=\left[\,e^t\,\right]_0^1$

$=e^1-e^0=e-1$

정답 ④

107. ①

24. 함수 $f(x)=3x+e^{3x}$에 대하여 $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1+e^{3x}}{f(x)}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\ln(1+e)}{3}$ ② $\frac{\ln(3+e)}{3}$ ③ $\frac{\ln(1+3e)}{3}$ ④ $\frac{\ln(6+e)}{3}$ ⑤ $\frac{\ln(6+3e)}{3}$

$f'(x)=3+3e^{3x}$

$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$=\frac{1}{3}\left[\ln|f(x)|\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\left[\ln|3x+e^{3x}|\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\ln(1+e)$

108. ②

050

$\sqrt{x^2-1}=t$라 하면 $x^2-1=t^2$, $2x=2t\dfrac{dt}{dx} \Rightarrow x=t\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때, $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때, $t=1$

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-1}\times x^2\times x\,dx$$
$$=\int_0^1 t\times(t^2+1)\times t\,dt$$
$$=\int_0^1 (t^4+t^2)dt$$
$$=\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$$

답 ②

109 ①

020

$\{f(x)\}^2f'(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

$\{f(x)^3\}'=3\{f(x)\}^2f'(x) \Rightarrow \dfrac{1}{3}\{f(x)^3\}'=\{f(x)\}^2f'(x)$

이므로

$\dfrac{1}{3}\{f(x)^3\}'=\dfrac{3x}{x^2+1} \Rightarrow \{f(x)^3\}'=\dfrac{9x}{x^2+1}$

$\{f(x)^3\}'=\dfrac{9x}{x^2+1}=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\{f(x)\}^3=\dfrac{9}{2}\ln|x^2+1|+C=\dfrac{9}{2}\ln(x^2+1)+C$

$f(0)=0 \Rightarrow C=0$이므로 $\{f(x)\}^3=\dfrac{9}{2}\ln(x^2+1)$

$\displaystyle\int_0^2 x\{f(x)\}^3dx=\frac{9}{2}\int_0^2 x\ln(x^2+1)\,dx$

$x^2+1=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때, $t=1$, $x=2$일 때, $t=5$

$$\frac{9}{2}\int_0^2 x\ln(x^2+1)\,dx=\frac{9}{4}\int_1^5 \ln t\,dt$$
$$=\frac{9}{4}[t\ln t-t]_1^5$$
$$=\frac{9}{4}(5\ln 5-4)$$

답 ①

110. ④

062

$g(x)$와 $f(x)$는 서로 역함수 관계이므로

$g(f(x))=x$이고, 양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)g'(f(x))=1 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}$

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx=\int_1^a\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$
$$=[\ln|f(x)|]_1^a=\ln|f(a)|-\ln|f(1)|$$

이고, $f(1)=8$이므로

$\ln|f(a)|-\ln 8=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$

$\Rightarrow \ln|f(a)|=\ln 4a^2(a+1)$

$f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $a>0$일 때, $f(a)=4a^2(a+1)$ or $f(a)=-4a^2(a+1)$

이때, $f(1)=8$이므로 $f(a)=4a^2(a+1)$ $(a>0)$이다.

따라서 $f(2)=4\times4\times3=48$이다.

답 ④

111. 26

093

$-x=t$라 하면 (가) 조건에 의해서

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{ae^{-2t}+be^{-t}+c+6}{e^{-t}}=1$

$\displaystyle\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{ae^{-t}+b+(c+6)e^t}{1}=1$

$\Rightarrow b=1,\ c=-6$

$f(x)=ae^{2x}+e^x-6$이므로 (나) 조건에 의해서

$f(\ln 2)=0 \Rightarrow ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=0 \Rightarrow 4a+2-6=0$

$\Rightarrow a=1$

$f(x)=e^{2x}+e^x-6$

$f'(x)=2e^{2x}+e^x>0$

이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$x=f(s)$라 하면 $f(\ln 2)=0$, $f(\ln 4)=14$이고,

$1=f'(s)\dfrac{ds}{dx}$이므로

$$\int_0^{14} g(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} g(f(s))f'(s)ds$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} s f'(s)ds$$

$$= \Big[s f(s)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(s)ds$$

$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2s} + e^s - 6)ds$$

$$= 28\ln 2 - \left[\frac{1}{2}e^{2s} + e^s - 6s\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

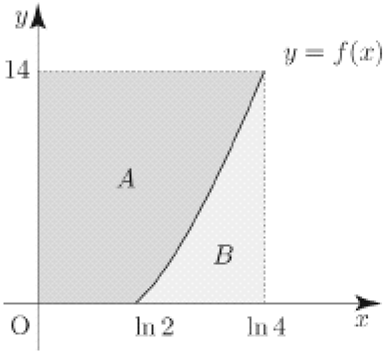
$$= 28\ln 2 - (8 - 6\ln 2) = -8 + 34\ln 2$$

따라서 $p+q = -8+34 = 26$이다.

답 26

다르게 풀어보자.

$f(x)$는 증가함수이므로 다음과 같다.



2025 규토 라이트 수2 정적분의 활용 Guide step
개념파악하기 - (5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이는 어떻게 구할까? 에서 배운 technique을 사용하면

$\int_0^{14} g(x)dx = A$, $\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)dx = B$

$A+B = 14\ln 4$ (직사각형의 넓이)

이므로 $A = 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)dx = -8+34\ln 2$이다.

Theme 33 부분적분법

112. 2

052

$$\int_0^{\pi} x\cos(\pi - x)dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)dx$$

$f(x)=x$, $g'(x) = -\cos x$라 하면
$f'(x)=1$, $g(x) = -\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi} x(-\cos x)dx = [x(-\sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin x dx$$

$$= -[\cos x]_0^{\pi} = -(-1-1) = 2$$

답 2

113. ④

061

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2$$

$\frac{x}{2} = t$라 하면 $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때, $t=\frac{1}{2}$, $x=2$일 때, $t=1$

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)f'(t)dt$$

$$= 2\Big[(2t-1)f(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} - 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$$

$$= 2f(1) - 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = 2$$

$f(1)=4$이므로

$$8 - 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = 2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = \frac{3}{2}$$

따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \frac{3}{2}$이다.

답 ④

114. ②

072

$f(x)g(x)=x^4-1$이므로
$f(1)g(1)=f(-1)g(-1)=0$

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx$$

$$=\Big[\{f(x)\}^2 g(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2f'(x)f(x)g(x)dx$$

$$=\{f(1)\}^2 g(1)-\{f(-1)\}^2 g(-1)-\int_{-1}^{1}2f'(x)f(x)g(x)dx$$

$$=-2\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx$$

$$=120$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=-60$$

$$\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=\Big[(x^4-1)f(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}4x^3 f(x)dx$$

$$=-4\int_{-1}^{1}x^3 f(x)dx$$

$$=-60$$

따라서 $\int_{-1}^{1}x^3 f(x)dx=15$이다.

답 ②

115. ①

081

$$g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}dt$$

$$g(1)=0,\ g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$$

$$g(2)=3$$

$$\int_1^2 xg(x)dx=\int_1^2 g(x)x\,dx$$

$$=\Big[g(x)\frac{x^2}{2}\Big]_1^2-\int_1^2 g'(x)\frac{x^2}{2}dx$$

$$=2g(2)-\int_1^2\frac{f(x^2+1)}{x}\times\frac{x^2}{2}dx$$

$$=6-\int_1^2\frac{f(x^2+1)}{4}\times 2x\,dx$$

$x^2+1=t$라 하면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=1$일 때, $t=2$, $x=2$일 때, $t=5$이므로

$$\int_1^2\frac{f(x^2+1)}{4}\times 2x\,dx=\frac{1}{4}\int_2^5 f(t)dt$$

$$=4\quad(\because(\text{나}))$$

따라서 $\int_1^2 xg(x)dx=6-\int_1^2\frac{f(x^2+1)}{4}\times 2x\,dx$

$$=6-4=2$$

이다.

답 ①

116. ①

098

$y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로
$f(-x)=-f(x)$

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt=\frac{\pi}{2}\{F(x+1)-F(1)\}$
양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1) \Rightarrow f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

$$\begin{aligned}\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx &= \pi^2\int_0^1 x\times\frac{2}{\pi}f'(x)dx\\ &=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx\\ &=2\pi\Big[xf(x)\Big]_0^1-2\pi\int_0^1 f(x)dx\\ &=2\pi f(1)-2\pi\int_0^1 f(x)dx\\ &=2\pi-2\pi\int_0^1 f(x)dx \ \ (\because \ f(1)=1)\end{aligned}$$

$\int_0^1 f(x)dx$를 구하려면 어떻게 해야할까?
아직 사용하지 않은 원점 대칭 조건을 사용해보자.

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$ 의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)dt$

$f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(-1)=-f(1)=-1$이므로
$f(-1)=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)dt=-1$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt=\frac{2}{\pi}$

따라서 $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi-2\pi\int_0^1 f(x)dx$
$=2\pi-4=2(\pi-2)$
이다.

답 ①

117. ③

099

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$

$g^{-1}(x)=h(x)$라 하면 $g(h(x))=x$이고,
$g(0)=0,\ g(1)=1$

$x=g(t)$라 하면 $dx=g'(t)dt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^{-1}(x)dx&=\int_0^1 h(x)dx\\ &=\int_0^1 h(g(t))g'(t)dt\\ &=\int_0^1 tg'(t)dt\\ &=\Big[tg(t)\Big]_0^1-\int_0^1 g(t)dt\\ &=1-\int_0^1 g(t)dt=1-\int_0^1 g(x)dx\end{aligned}$$

이므로
$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$
$\Rightarrow 1-\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x+x\}dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$
$\Rightarrow \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$

$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$
$2x=s$라 하면 $dx=\frac{1}{2}ds$

$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f'(s)\sin\frac{\pi}{2}s\,ds=\frac{1}{12}$
$\Rightarrow \int_0^2 f'(s)\sin\frac{\pi}{2}s\,ds=\frac{1}{6}$
$\Rightarrow \int_0^2\left(\sin\frac{\pi}{2}s\right)f'(s)\,ds=\frac{1}{6}$
$\Rightarrow \left[\left(\sin\frac{\pi}{2}s\right)\times f(s)\right]_0^2-\int_0^2\left\{\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}s\right)\times f(s)\right\}ds=\frac{1}{6}$
$\Rightarrow \int_0^2 f(s)\cos\frac{\pi}{2}s\,ds=-\frac{1}{6}\times\frac{2}{\pi}=-\frac{1}{3\pi}$

따라서 $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=-\frac{1}{3\pi}$이다.

답 ③

118. 31

30. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)=4\ln 2=\ln 16$에서

$e^{f(1)}=16$

또

$f(x)=\ln\left(\dfrac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$에서

$e^{f(x)}=\dfrac{g(x)}{1+xf'(x)}$

$g(x)=e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}$

이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 e^{f(x)}dx+\int_1^2 xf'(x)e^{f(x)}dx$$

$$=\int_1^2 e^{f(x)}dx+\left[xe^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 e^{f(x)}dx$$

$$=2e^{f(2)}-e^{f(1)}$$

$$=2e^{f(2)}-16$$

$$=34$$

이므로

$e^{f(2)}=25$

따라서

$$\int_1^2 xg(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}dx+\int_1^2 x^2f'(x)e^{f(x)}dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}dx+\left[x^2e^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 2xe^{f(x)}dx$$

$$=4e^{f(2)}-e^{f(1)}-\int_1^2 xe^{f(x)}dx$$

$$=100-16-\int_1^2 xe^{f(x)}dx$$

$$=53$$

에서

$$\int_1^2 xe^{f(x)}dx=84-53=31$$

정답 31

119. 80

29. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 모든 양의 실수 x에 대하여

$$g(x) = x\int_1^x \frac{tf(t^2)}{e^{t^2}}dt$$

를 만족시킨다.

$$\int_1^2 g(x)e^{x^2}dx = 19,\ \int_1^4 f(x)dx = 4$$

일 때, $e^4 \times g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(1)=0$.

$\Rightarrow \frac{g(x)}{x} = \int_1^x \frac{tf(t^2)}{e^{t^2}}dt$

$\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{xf(x^2)}{e^{x^2}}$

$\int_1^2 \frac{g(x)}{x} \cdot xe^{x^2}dx$

$\left[\frac{g(x)}{x} \cdot \frac{e^{x^2}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x \cdot f(x^2)}{e^{x^2}} \cdot \frac{e^{x^2}}{2}dx = 19$

$\frac{g(2)}{4}e^4 - \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2)dx = 19$

$\frac{g(2)}{4}e^4 - \frac{1}{4}\int_1^2 2xf(x^2)dx = 19$

$x^2=t \quad 2xdx=dt$

$\frac{g(2)e^4}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^4 f(t)dt}_{4} = 19$

-1

$\therefore e^4 \times g(2) = 80$

Theme 34 정적분으로 표시된 함수의 극한

120. ⑤

066

$f(x) = a\cos(\pi x^2)$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x^2+1)\times\lim_{x\to 0}\frac{F(1+x)-F(1)}{x}$$

$$= 1\times F'(1) = f(1) = 3$$

$f(1) = a\cos(\pi) = -a = 3 \Rightarrow a = -3$ 이므로

$f(x) = a\cos(\pi x^2) = -3\cos(\pi x^2)$

따라서 $f(a) = f(-3) = -3\cos(9\pi) = 3$이다.

답 ⑤

Theme 35 정적분을 포함한 등식

121. ②

032

$f(x) = (\ln x)^2 - \int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$의 양변에 $\frac{1}{x}$을 곱하면

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{1}{x}\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$$

이때 $\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt = a$라 하면

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx - a\int_1^e \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow a = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx - a\left[\ln|x|\right]_1^e$$

$$\Rightarrow a = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx - a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$$

$\ln x = s$라 하면 $\frac{1}{x} = \frac{ds}{dx}$

$x=1$일 때, $s=0$, $x=e$일 때, $s=1$

$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int_0^1 s^2 ds = \left[\frac{1}{3}s^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$이므로

$a = \frac{1}{6}$이다.

따라서 $\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt = \frac{1}{6}$이다.

답 ②

122. 16

035

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = e^{2x-2} + ax^2 + bx + 3$$

$$x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = e^{2x-2} + ax^2 + bx + 3$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = 1 + a + b + 3 \Rightarrow a + b = -4$

$$x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = e^{2x-2} + ax^2 + bx + 3$$

양변을 x에 대해 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 2e^{2x-2} + 2ax + b$$

$$\int_1^x f(t)dt = 2e^{2x-2} + 2ax + b$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = 2 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2$

$a+b=-4,\ 2a+b=-2 \Rightarrow a=2,\ b=-6$

$$\int_1^x f(t)dt = 2e^{2x-2} + 4x - 6$$

양변을 x에 대해 미분하면

$f(x) = 4e^{2x-2} + 4$

$f(1) = 8$

따라서 $a - b + f(1) = 2 - (-6) + 8 = 16$이다.

답 16

123. ③

036

$$f(x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{x-t}dt = \sin 3x$$

$$f(x) + e^x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{-t}dt = \sin 3x$$

양변에 $x = \frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$$

> **Tip** 정적분으로 정의된 함수 $\int_a^x f(t)dt$를 x에 대해 미분할 때는 $f(t)$ 안의 식에 x가 포함되어 있는지 주의해야 한다. 만약 문자 x가 포함된 경우에는 x를 $\int$ 앞에 위치시키고 곱의 미분법을 이용하여 미분한다.
>
> cf 2024 규토 라이트 N제 수2 문제편 p256

$$f(x) + e^x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{-t}dt = \sin 3x$$

양변을 x에 대해 미분하면

$$f'(x) + e^x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{-t}dt + e^x \times f(x)e^{-x} = 3\cos 3x$$

$$\Rightarrow f'(x) + e^x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{-t}dt + f(x) = 3\cos 3x$$

이때, $f(x) + e^x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{-t}dt = \sin 3x$이므로

$f'(x) = 3\cos 3x - \sin 3x$

$f(x) = \sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow -1 + C = -1 \Rightarrow C = 0$

$f(x) = \sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x\right)dx$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{18} - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}+3}{9}$$

이다.

답 ③

124. ④

037

$tx+1 = s$ 라 하면 $x = \frac{s-1}{t}$, $t = \frac{ds}{dx}$

$x=0$일 때, $s=1$, $x=2$일 때, $s=2t+1$

$$\int_0^2 x f(tx+1)dx = \int_1^{2t+1} \frac{s-1}{t} f(s) \times \frac{1}{t} ds$$

$$= \frac{1}{t^2}\int_1^{2t+1}(s-1)f(s)ds$$

$$= 4te^t$$

$$\Rightarrow \int_1^{2t+1}(s-1)f(s)ds = 4t^3e^t$$

$g(s) = (s-1)f(s)$라 하면

$\int_1^{2t+1} g(s)\,ds = 4t^3e^t$

$G(2t+1) - G(1) = 4t^3e^t$

양변을 t에 대하여 미분하면

$2g(2t+1) = 12t^2e^t + 4t^3e^t$

$\Rightarrow g(2t+1) = (6t^2+2t^3)e^t$

$\Rightarrow 2t f(2t+1) = (6t^2+2t^3)e^t$

$\therefore f(2t+1) = (3t+t^2)e^t$

$2t+1 = 5 \Rightarrow t=2$

$2t+1 = -3 \Rightarrow t = -2$

이므로

$f(5) = (6+4)e^2 = 10e^2$

$f(-3) = (-6+4)e^{-2} = -2e^{-2}$

따라서 $f(5)\times f(-3) = 10e^2 \times (-2e^{-2}) = -20$이다.

답 ④

Theme 36 정적분으로 정의된 함수 (New함수)

125. 325

070

$f(x) = \int_1^x \frac{n-\ln t}{t}dt$

$f'(x) = \frac{n-\ln x}{x}$

Semi 도함수 $f'(x) = n - \ln x$

$f'(e^n) = 0 \Rightarrow x = e^n$에서 극대이자 최대

$f(e^n) = g(n) = \int_1^{e^n} \frac{n-\ln t}{t}dt$

$\ln t = s$라 하면 $\frac{1}{t} = \frac{ds}{dt}$

$t=1$일 때, $s=0$, $t=e^n$일 때, $s=n$

$$g(n) = \int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$$

$$= \int_0^n (n-s)ds = \left[ns - \frac{1}{2}s^2\right]_0^n = n^2 - \frac{n^2}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{12} g(n) = \sum_{n=1}^{12}\frac{n^2}{2} = \frac{12\times13\times25}{12} = 13\times25 = 325$

이다.

답 325

126. ①

092

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x<0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0\le x\le \frac{7}{2}\pi\right)\end{cases}$$

$-\frac{7}{2}\pi \le x<0$에서

$\sin x \ge 0$일 때, $|\sin x|-\sin x=0$

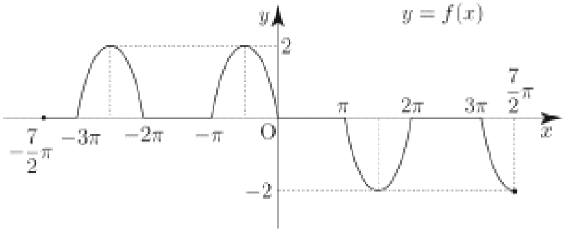
$\sin x<0$일 때, $|\sin x|-\sin x=-2\sin x$

$0\le x\le \frac{7}{2}\pi$에서

$\sin x\ge 0$일 때, $\sin x-|\sin x|=0$

$\sin x<0$일 때, $\sin x-|\sin x|=2\sin x$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.

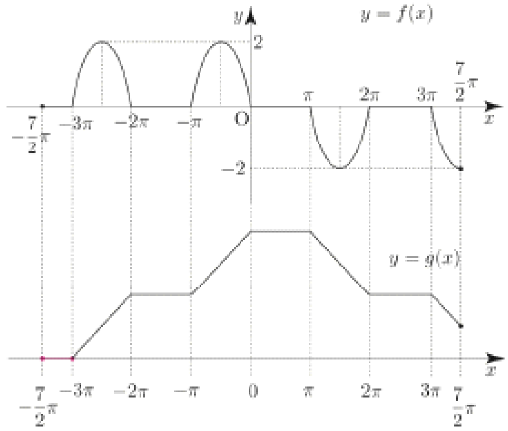


$g(x)=\int_a^x f(t)dt$라 하자.

(New 함수 Technique)

$g'(x)=f(x)$, $g(a)=0$(x축 설정)

$f(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 범위는 $-\frac{7}{2}\pi \le a\le -3\pi$이므로 최솟값은 $\alpha=-\frac{7}{2}\pi$이고, 최댓값은 $\beta=-3\pi$이다.

따라서 $\beta-\alpha=-3\pi+\frac{7}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$이다.

답 ①

127. ②

28. 함수 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$와 양수 t에 대하여 함수 $F(x)$는

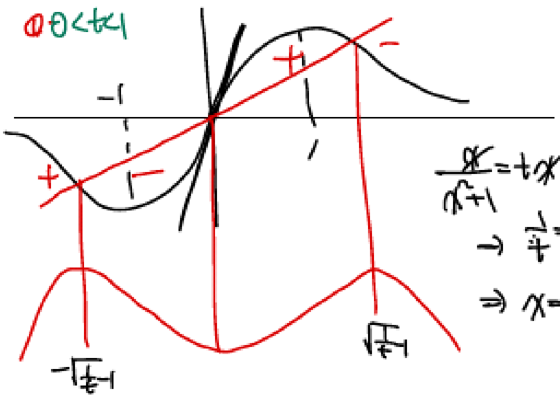
$$F(x)=\int_0^x \{f(s)-ts\}ds$$ $\Rightarrow F'(x)=f(x)-tx$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\le F(\alpha)$를 만족시키는 음이 아닌 실수 α의 값을 $g(t)$라 할 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{g(t)}{t^2}dt$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ $f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, $f'(0)=1$

① $0<t<1$



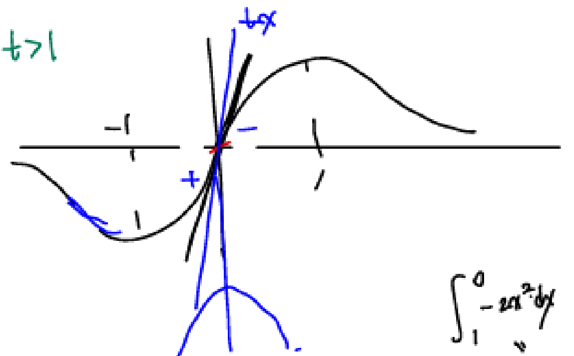
$\frac{x}{x^2+1}=tx$

$\Rightarrow \frac{1}{t}=x^2+1$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{t}-1}$

$g(t)=\sqrt{\frac{1}{t}-1}$

② $t>1$



$g(t)=0$.

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{g(t)}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{\frac{1}{t}-1}}{t^2}dt$

$\sqrt{\frac{1}{t}-1}=x \Rightarrow \frac{1}{t}-1=x^2$

$-\frac{1}{t^2}dt=2x\,dx$

$\int_1^0 -2x^2dx$

$=\int_0^1 2x^2dx$

$=\frac{2}{3}$

20

128. 9

045

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

$F(0)=0,\ F'(x)=f(x)$

$\{f(x)\}^2=f(x)f(x)=F'(x)f(x)$이므로

$\int_0^2\{f(x)\}^2dx+\int_0^2 F(x)f'(x)dx=12$

$\Rightarrow \int_0^2 F'(x)f(x)dx+\int_0^2 F(x)f'(x)dx=12$

$\Rightarrow \int_0^2\{F'(x)f(x)+F(x)f'(x)\}dx=12$

$\Rightarrow \int_0^2\{F(x)f(x)\}'dx=12$

$$\begin{aligned}\int_0^2\{F(x)f(x)\}'dx&=[F(x)f(x)]_0^2\\&=F(2)f(2)-F(0)f(0)\\&=F(2)f(2)\ (\because\ F(0)=0)\\&=12\end{aligned}$$

$\therefore\ F(2)f(2)=12\ \cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\int_0^2 xf'(x)dx&=[xf(x)]_0^2-\int_0^2 f(x)dx\\&=2f(2)-F(2)\\&=5\end{aligned}$$

$\therefore\ 2f(2)-F(2)=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2f(2)-F(2)=5 \Rightarrow \dfrac{24}{F(2)}-F(2)=5$

$\Rightarrow 24-\{F(2)\}^2=5F(2)$

$\Rightarrow \{F(2)\}^2+5F(2)-24=0$

$\Rightarrow (F(2)+8)(F(2)-3)=0$

$\Rightarrow F(2)=3\ (\because\ F(2)>0)$

$\therefore\ F(2)=3$

따라서 $\int_0^2\{F(x)\}^2f(x)dx=\left[\dfrac{\{F(x)\}^3}{3}\right]_0^2$

$$=\frac{\{F(2)\}^3}{3}-\frac{\{F(0)\}^3}{3}$$

$$=\frac{27}{3}-0=9$$

이다.

답 9

Tip 적분은 미분의 역연산임을 이용하면 굳이 치환적분을 하지 않아도 바로 적분가능하다.

$\int f(x)dx$를 어떻게 설정해야 미분하여 $f(x)$가 될까? 라는 사고가 핵심이다.

아래 식들은 잘 나오니 기억해 두자.

① $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$
$\int \{f(x)+xf'(x)\}dx=xf(x)+C$

② $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\int \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx=f(x)g(x)+C$

③ $\{\ln|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

③ $\{f(x)^2\}'=2f(x)f'(x)$
$\int 2f(x)f'(x)dx=\{f(x)\}^2+C$

④ $\{f(x)^3\}'=3\{f(x)\}^2f'(x)$
$\int 3\{f(x)\}^2f'(x)dx=\{f(x)\}^3+C$

⑤ $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$
$\int f'(g(x))g'(x)dx=f(g(x))+C$

⑥ $\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
$\int \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\dfrac{f(x)}{x}+C$

Theme 37 새롭게 정의된 함수의 정적분

129. ③

27. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$Q(t,\ 0)$, $R(0,\ 2\ln(t+1))$이므로

직사각형 OQPR의 넓이는 $f(t)=2t\ln(t+1)$

따라서

$$\begin{aligned}
&\int_1^3 f(t)dt\\
&=\int_1^3 \{2t\ln(t+1)\}dt\\
&=[t^2\ln(t+1)]_1^3-\int_1^3 \frac{t^2}{t+1}dt\\
&=[t^2\ln(t+1)]_1^3-\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt\\
&=[t^2\ln(t+1)]_1^3-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right]_1^3\\
&=(9\ln4-\ln2)-\left(\frac{9}{2}-3+\ln4-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)\\
&=-2+16\ln2
\end{aligned}$$

130. ①

085

원 C와 y축의 교점을 D라 하면

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

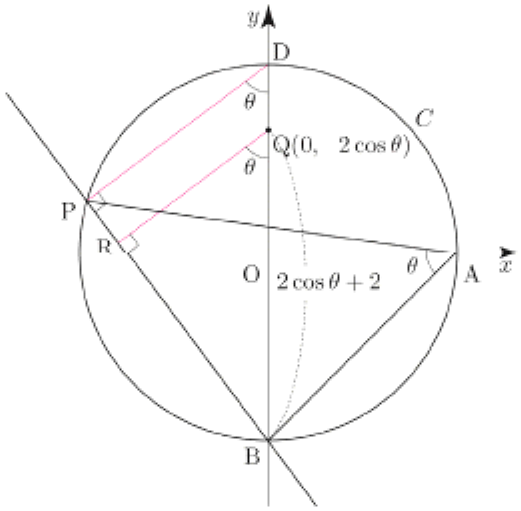
$\angle PAB=\angle PDB=\theta$이다.

$\angle PDB=\angle RQB=\theta$ (by 동위각)

구하고자 하는 값이 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$이므로

θ의 범위는 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$라 할 수 있다.

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$에서 $2\cos\theta > 0$이므로 $\overline{QB} = 2\cos\theta + 2$이다.



삼각형 PDB에서

$\overline{PB} = \overline{DB} \times \sin\theta = 4\sin\theta$

삼각형 RQB에서

$\overline{RB} = \overline{QB} \times \sin\theta = (2\cos\theta + 2)\sin\theta = 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta$

이므로

$f(\theta) = \overline{PR} = \overline{PB} - \overline{RB}$

$= 4\sin\theta - (2\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta)$

$= 2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta$

이다.

따라서 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)d\theta$

$$= \left[-2\cos\theta - \sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-1 - \frac{3}{4}\right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$

이다.

답 ①

Theme 38 정적분과 급수의 관계

131. ①

040

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}} \times \frac{1}{n}$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = 3 + \frac{k}{n}$ $\left(x_k = 3 + \frac{(4-3)k}{n} \Rightarrow a = 3,\ b = 4\right)$

라 하면 $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x}} = \sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}} \times \frac{1}{n}$$

$$= \int_3^4 f(x)dx = \sqrt{3}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \sqrt{3}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4 = 4\sqrt{3} - 6$$

답 ①

132. ③

051

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n}$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$ $\left(x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n} \Rightarrow a = 0,\ b = 1\right)$라

하면 $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|x^3+3x^2+1\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 5$$

답 ③

133. ③

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(k-3n)^2}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}-2\ln\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{2}+2\ln\frac{2}{3}$　③ $1+2\ln\frac{2}{3}$

④ $1+2\ln 2$　⑤ $2+2\ln 3$

$$\frac{\frac{2k}{n}}{(-3+\frac{k}{n})^2}\frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x-3)^2}dx$$

$x-3=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int_{-3}^{-2}\frac{2(t+3)}{t^2}dt=\int_{-3}^{-2}\left(\frac{2}{t}+\frac{6}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[2\ln|t|-\frac{6}{t}\right]_{-3}^{-2}$$

$$=2\ln2+3-(2\ln3+2)$$

$$=2\ln\frac{2}{3}+1$$

134. ⑤

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(n+k)-n\ln n}{(n+k)^2}$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$　② $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{\ln 2}{2}$

④ $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$

분모 분자를 n^2로 나누기

$$\frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{(1+\frac{k}{n})^2}\frac{1}{n}$$

$1+\frac{k}{n}=x$　$dx=\frac{1}{n}$

$$\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$=\left[\ln x\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^2-\int_1^2-\frac{1}{x^2}dx$$

$-\frac{\ln2}{2}$　　$-\left[\frac{1}{x}\right]_1^2$

$\frac{1}{2}-1$

$$=-\frac{\ln2}{2}+\frac{1}{2}$$

Theme 39 정적분과 급수의 관계 활용

135. ③

069

$x_k = 1+\frac{k}{n}$이므로

$A_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$

$\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = 1+\frac{k}{n}$ $\left(x_k = 1+\frac{(2-1)k}{n} \Rightarrow a=1,\ b=2\right)$

이고 $f(x) = \frac{1}{2}xe^x$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2\frac{1}{2}xe^x dx = \left[\frac{1}{2}xe^x\right]_1^2 - \int_1^2\frac{1}{2}e^x dx$$

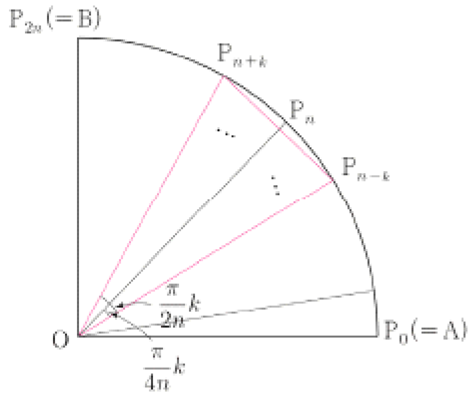
$$=e^2-\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e^2$$

답 ③

136. ①

068

$\angle P_kOP_{k-1} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2n} = \frac{\pi}{4n}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)$



$\angle P_nOP_{n-k} = \angle P_nOP_{n+k} = \frac{\pi}{4n}k$

$\Rightarrow \angle P_{n+k}OP_{n-k} = \frac{\pi}{2n}k$

$\therefore\ S_k = \frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{\pi k}{2n}$

$\Delta x = \frac{\pi}{2n}$, $x_k = \frac{\pi k}{2n}$ $\left(x_k = 0+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)k}{n} \Rightarrow a=0,\ b=\frac{\pi}{2}\right)$

이고 $f(x) = \frac{1}{\pi}\sin x$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}$$

답 ①

137. 14

080

$x_k = \frac{k}{n}$ 이므로 $A_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$

$A_1 = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{a}{n} + b\right)$,

$A_n = \frac{1}{n} f(1) = \frac{1}{n}(1+a+b)$

이므로

$A_1 + A_n = \frac{7n^2+1}{n^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{a}{n} + b\right) + \frac{1}{n}(1+a+b) = \frac{7n^2+1}{n^3}$

$\Rightarrow 1 + an + (1+a+2b)n^2 = 7n^2 + 1$

$\Rightarrow a=0,\ 1+a+2b=7 \ \Rightarrow a=0,\ b=3$

$\therefore\ f(x) = x^2 + 3$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} A_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\Delta x = \frac{1}{n},\ x_k = \frac{k}{n}\ \left(x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n} \Rightarrow a=0,\ b=1\right)$

이므로 $g(x) = 8xf(x)$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} A_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 8xf(x)dx$

$= \int_0^1 (8x^3 + 24x)dx$

$= \left[2x^4 + 12x^2\right]_0^1 = 14$

이다.

답 14

Theme 40 넓이

138. ①

정답풀이 :

$1 = \frac{3}{x-1}$ 에서 $x=4$ 이므로

$A(4, 1)$

$3 = \frac{3}{x-1}$ 에서 $x=2$ 이므로

$B(2, 3)$

직선 AB의 방정식은

$y - 1 = \frac{3-1}{2-4}(x-4)$

$y = -x + 5$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_2^4 \left(-x + 5 - \frac{3}{x-1}\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3\ln|x-1|\right]_2^4$

$= (-8 + 20 - 3\ln 3) - (-2 + 10 - 3\ln 1)$

$= 4 - 3\ln 3$

정답 ①

[다른 풀이]

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 사각형 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 = 4$

따라서 구하는 넓이는

$4 - \int_2^4 \frac{3}{x-1}dx = 4 - \left[3\ln|x-1|\right]_2^4$

$= 4 - 3\ln 3$

139. ②

045

둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^1\left\{\sin\frac{\pi}{2}x-(2^x-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-2^x+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2^x}{\ln2}+x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{\ln2}+1-\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln2}+1$$

답 ②

Theme 40 입체도형의 부피

140. ②

050

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left(\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}\right)^2=\frac{3x+1}{x^2}$$

구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_1^2 S(x)dx=\int_1^2\frac{3x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[3\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_1^2=3\ln2-\frac{1}{2}-(0-1)$$

$$=\frac{1}{2}+3\ln2$$

답 ②

141. ④

052

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left(\sqrt{\sec^2x+\tan x}\right)^2=\sec^2x+\tan x$$

구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}S(x)dx=\int_1^2(\sec^2x+\tan x)dx$$

$$=\Big[\tan x-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln2$$

답 ④

142. ③

065

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left(\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}\right)^2=\frac{x+1}{x(x+\ln x)}$$

입체도형의 부피 V는

$$V=\int_1^e S(x)dx=\int_1^e\frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx$$

$$=\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x+\ln x}dx$$

$x+\ln x=t$라 하면 $\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=dt$

따라서 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x+\ln x}dx$$

$$=\int_1^{e+1}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^{e+1}=\ln(e+1)$$

이다.

답 ③

143. ③

26. 출제의도 : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sqrt{\frac{\pi}{6}} \le t \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} S(t)dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\pi}{2}t^3\sin t^2 dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin t^2 dt$$

이때 $t^2=u$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $u=\frac{\pi}{6}$이고

$2t=\frac{du}{dt}$이므로

$$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin t^2 dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u\sin u du$$

$$=\frac{\pi}{4}\left([-u\cos u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u du\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+[\sin u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$$

정답 ③

Theme 42 움직인 거리

144. ②

028

$$\begin{cases} x=2\cos t-2\sin t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin t-2\cos t)^2+(2\sin t\cos t)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4+8\sin t\cos t+4\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(\sin t\cos t+1)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2|\sin t\cos t+1|dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t\cos t+2)dt=\left[\sin^2 t+2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\pi$$

답 ②

145. ①

062

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하자.

방정식 $x^2=t^2x-\dfrac{\ln t}{8} \Rightarrow x^2-t^2x+\dfrac{\ln t}{8}=0$의 두 실근은 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=t^2$이다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$이 만나는 두 점의 중점은 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$ 위의 점이므로 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ t^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-\dfrac{\ln t}{8}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{t^2}{2},\ \dfrac{t^4}{2}-\dfrac{\ln t}{8}\right)$이다.

이므로 점 P의 시각 t에서의 위치는 다음과 같다.

$x=\dfrac{t^2}{2}$, $y=\dfrac{t^4}{2}-\dfrac{\ln t}{8}$

이때 $\dfrac{dx}{dt}=t$, $\dfrac{dy}{dt}=2t^3-\dfrac{1}{8t}$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$
$$=\sqrt{4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$
$$=\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}$$
$$=\left|2t^3+\frac{1}{8t}\right|$$
$$=2t^3+\frac{1}{8t}\quad(\because\ t>0)$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}+0\right)$$
$$=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

이다.

답 ①

146. ③

27. 실수 t에 대하여 $x\le t$에서 함수 $f(x)=\dfrac{1}{8}e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x=t \\ y=g(t) \end{cases}$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\dfrac{12\ln 2+1}{8}$　② $\dfrac{6\ln 2+1}{4}$　③ $\dfrac{12\ln 2+3}{8}$　④ $\dfrac{3\ln 2+1}{2}$　⑤ $\dfrac{12\ln 2+5}{8}$

$f'(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}=\dfrac{e^{-2x}}{4}(e^{4x}-4)$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

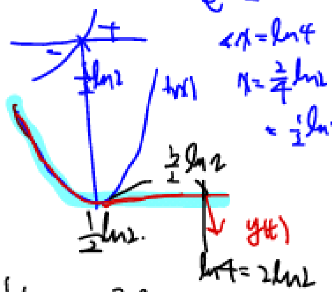
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

$e^{4x}=4$

$4x=\ln 4$

$x=\frac{2}{4}\ln 2$

$=\frac{1}{2}\ln 2$



$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2t}-e^{-2t}\right)^2}\,dt+\frac{3}{2}\ln 2.$

$\frac{1}{4}e^{2t}+e^{-2t}$

$\left[\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\frac{1}{2}\ln 2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

$\therefore\ \frac{3}{8}+\frac{3}{2}\ln 2=\dfrac{12\ln 2+3}{8}$

Theme 43 곡선의 길이

147. 78

053

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x=x\sqrt{x^2+2}$

구하고자 하는 곡선의 길이 l은

$l=\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_0^6\sqrt{1+x^2(x^2+2)}dx$

$=\int_0^6\sqrt{(x^2+1)^2}dx=\int_0^6|x^2+1|dx=\int_0^6(x^2+1)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^6=72+6=78$

답 78

148. ⑤

032

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$

$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$이므로

$x=1$에서 $x=e$까지 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}$ 의 길이는

$\int_1^e\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$

$=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}dx$

$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$

$=\int_1^e\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right|dx=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^e$

$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

답 ⑤

149. ①

055

$f(x)=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\ge 0)\\ \frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2) & (x<0)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x\ge 0)\\ \frac{1}{2}(-e^x+e^{-x}) & (x<0)\end{cases}$$

구하고자 하는 곡선의 길이 l은

$l=\int_{-\ln 4}^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

$=\int_{-\ln 4}^0\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx+\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

$=\int_{-\ln 4}^0\sqrt{1+\frac{1}{4}(-e^x+e^{-x})^2}+\int_0^1 1dx$

$=\int_{-\ln 4}^0\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx+1$

$=\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_{-\ln 4}^0+1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-4\right)+1=\frac{23}{8}$

답 ①