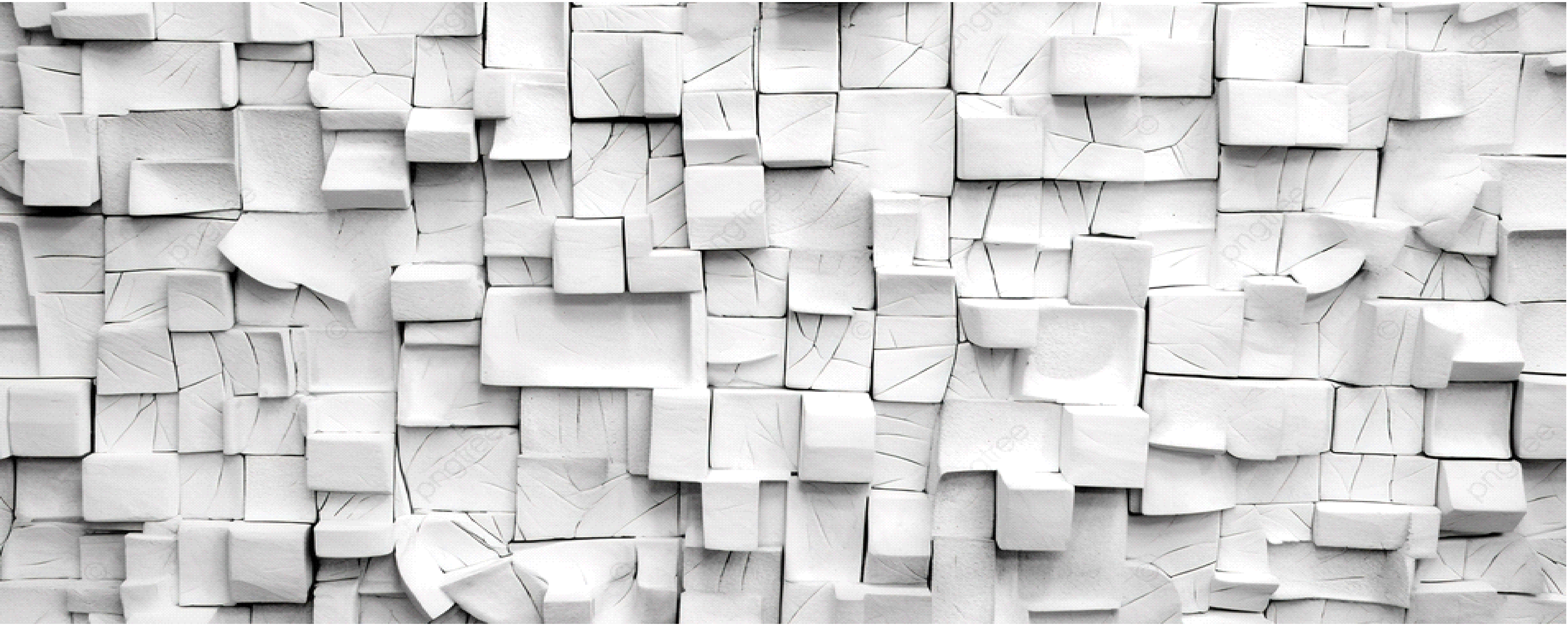
2026 규토 N제 시리즈 보충프린트 - 20일의 기적

이것만은 제발

ver. 2026 수능대비 수학2



유성민T

대치명인학원

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.수학2 문제지

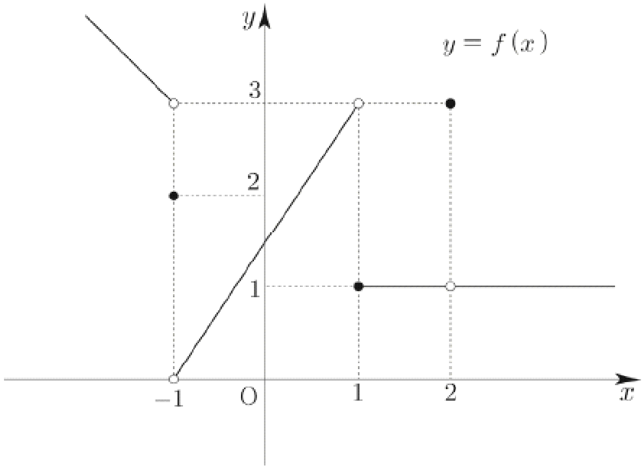
1. 함수의 극한과 연속

Theme 1 함수의 극한

001

057 | 2022학년도 수능 공통

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

002

066 | 2015학년도 고3 6월 평가원 A형

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

003

067 | 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

004 2026 규토 모의평가 5월 공통

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=2$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x+1)-2\}(x-1)}{f(x)-x}=-2$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

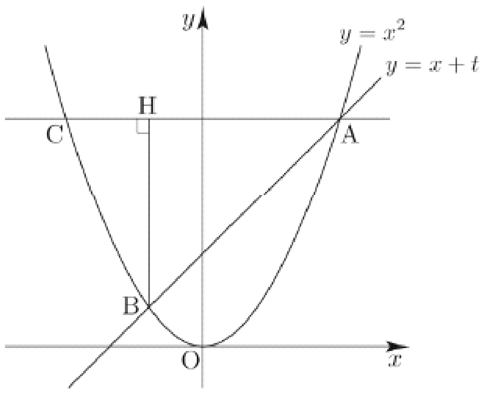
Theme 2 함수의 극한의 활용

005

076 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

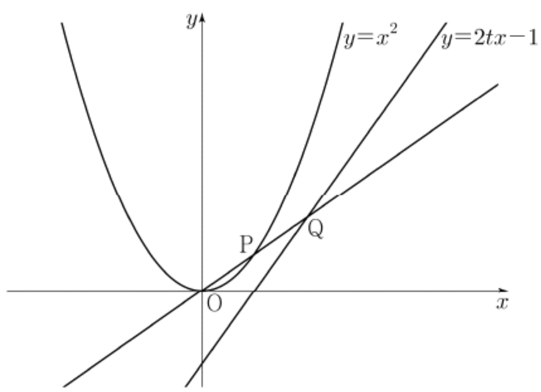
$\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

006 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

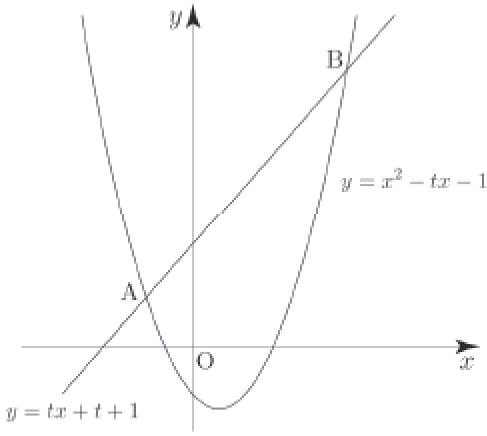


① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

007

082 2023년 고3 10월 교육청 공통

실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$

④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

Theme 3 모든 실수 a에 대하여 극한값 존재

008

087 2025학년도 수능 공통

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 α에 대하여
> $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

009 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

010 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

13. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x \to a} \frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

011 2026 규토 모의평가 파이널 공통

13. 함수 $f(x)=x^2+4x+k$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x \to a} \frac{g(x)-f(x)}{|\{f(x)\}^2-kf(x)|}$의 값이 존재한다.
> (나) $g(1) \le 40$

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

012 2026 규토 모의평가 9월 공통

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1)=-1$, $f(2)=-3$
(나) 모든 실수 a에 대하여
$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x)+2x-1|}{f(x)+x^2}$$
의 값이 존재한다.
(다) $f(0)$은 정수이다.

Theme 4 함수의 연속

013

005

함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{ax^2+ax+2}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

014

036 | 2018학년도 고3 6월 평가원 나형

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x \neq 3) \\ b & (x=3) \end{cases}$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

015

037 | 2021학년도 수능 나형

함수 $f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x\le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1) \end{cases}$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

016

038 | 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ x & (-1\le x<3) \\ bx-2 & (x\ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

017

041 | 2020년 고3 3월 교육청 가형

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

018

044 | 2018학년도 고3 9월 평가원 나형

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

019

010

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2ax+b & (-2\le x<0) \\ ax+3 & (0\le x<2) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

020

057 | 2010학년도 수능 가형

실수 a에 대하여 집합

$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기

ㄱ. $\lim\limits_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim\limits_{a\to c+} f(a)\ne \lim\limits_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

021

059 • 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\ne 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

022

040 • 2022학년도 수능 공통

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

2. 미분

Theme 5 평균변화율

023

067 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

024

058 | 2021학년도 고3 6월 평가원 나형

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [4점]

Theme 6 미분계수를 이용한 극한값 계산

025

027

함수 $f(x)=x^3+2x+4$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값을 구하시오.

026

028

함수 $f(x)=4x^3-ax$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

027

029

함수 $f(x)=-x^2+6x+2$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}=6$일 때,

상수 a의 값을 구하시오.

Theme 7 함수의 곱의 미분법

028 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

029

068 | 2014학년도 고3 6월 평가원 A형

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이다. $g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오. [4점]

030

075 | 2021학년도 수능 나형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$를 만족시킨다.

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

Theme 8 함수의 미분가능성

031

057 | 2021학년도 고3 9월 평가원 나형

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x\ge1) \end{cases}$이

실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

032

026

함수 $f(x)=|x-2|(x^2+ax)+x^2$에 대하여
$f'(2)=b$일 때, $f'(b-a)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

033

048

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 0) \\ -x & (0 < x \le 1) \\ -2x+1 & (x > 1) \end{cases}$$

와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

034

049

함수 $f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<2) \\ 2x-4 & (x \ge 2) \end{cases}$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h} + k$$

상수 k의 값을 구하시오.

(해설지 2가지 풀이 모두 기억)

035

082

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x \ge 0) \\ f(x-a)+b & (x<0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t \to c+} h(t)+h(c)=\lim_{t \to c-} h(t)$이다.

$a+2b+3c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

036 2025년 고3 3월 교육청 공통

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

037 2025년 고3 3월 교육청 공통

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \leq 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $g(x)=0$은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$ ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

Theme 9 접선의 방정식
-곡선 위의 점이 주어질 때

038

009

곡선 $y=x^3-3x^2+2$ 위의 두 점 $(-1,\ -2)$, $(1,\ 0)$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 교점은 $(a,\ b)$이다. $3a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

039

012

곡선 $y=-2x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $4ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

040

016

다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 y절편이 5일 때, 곡선 $y=2x^2f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2f(1))$에서의 접선은 점 $(3,\ a)$를 지난다. 상수 a의 값을 구하시오.

041

147 2025학년도 고3 6월 평가원 공통

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

Theme 10 접선의 방정식
-기울기가 주어질 때

042

020

곡선 $y=x^4-2x^2+k$가 직선 $y=24x-3k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

043

022

곡선 $y=-x^3+5x$에 접하고 기울기가 -7인 접선 중 제 3사분면을 지나지 않는 직선의 y절편을 구하시오.

044

145 | 2010학년도 고3 6월 평가원 가형

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

Theme 11 접선의 방정식
-곡선 밖의 점이 주어질 때

045

133 | 2023학년도 수능 공통

점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

046

155 | 2022학년도 수능예비시행

원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

Theme 12 접선의 방정식 -두 곡선에 동시에 접하는 접선

047

032

두 곡선 $y=x^3+ax+b$, $y=3x^2+c$가 점 $(1,\ 0)$에서 동시에 접할 때, $a-b-c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이다.)

048

033

직선 $y=h(x)$가 두 함수 $f(x)=-x^2+4$, $g(x)=x^2-6x+9$의 그래프와 동시에 접할 때, 모든 $h(-1)$의 값의 합을 구하시오.

Theme 13 접선의 방정식 -교점에서의 접선

049

035

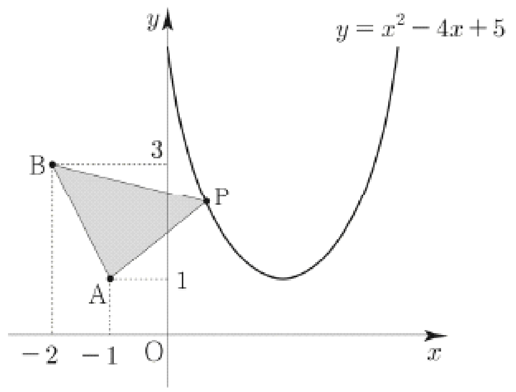
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(2,\ 3)$에서 만나고 이 점에서의 접선은 서로 수직이다. 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2)g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=8x-7$일 때, $27\{f'(2)-g'(2)\}$의 값을 구하시오.
(단, $f'(2)>g'(2)$)

Theme 14 접선의 방정식의 활용

050

037

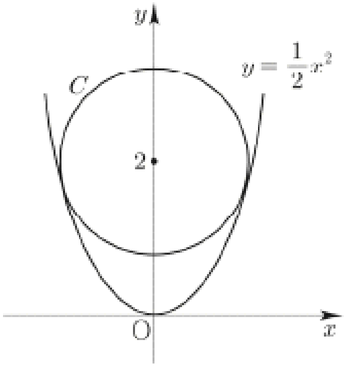
그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+5$ 위의 임의의 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-2,\ 3)$에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은 m이다. $10m$의 값을 구하시오.



051

038

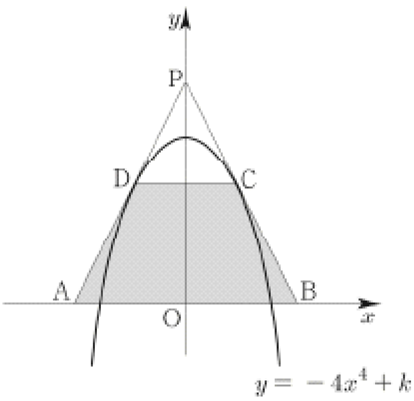
그림과 같이 중심의 좌표가 $(0,\ 2)$인 원 C가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 서로 다른 두 점에서 접할 때, 원 C의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오.



052

040

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{5}$, $\cos(\angle \mathrm{APB})=\frac{3}{5}$인 삼각형 PAB의 두 꼭짓점 A, B는 x축 위에 있고 꼭짓점 P는 y축 위에 있다. 변 PA와 변 PB가 각각 두 점 D, C에서 사차함수 $y=-4x^4+k$의 그래프에 접할 때, 사각형 ABCD의 넓이는 s이다. $20(k+s)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)



Theme 15 평균값의 정리

053

046

닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<c<4$인 모든 실수 c에 대하여 $0 \le f'(c) \le 3$이다.

Theme 16 함수의 증가, 감소

054

053

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x$가 $3<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키는 양의 실수 a의 최댓값을 구하시오.

055

129 | 2011학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오. [3점]

056

054

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2-4x+1$의 역함수가 존재하도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

057

158 | 2010년 고3 10월 교육청 가형

함수 $f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

058 2024 규토 모의평가 1회

12. 실수 a에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,x \geq 1\}$인 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재할 때, $f(2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Theme 17 함수의 극대, 극소

059

060

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$이 $x=2$에서 극솟값 1을 가질 때, $x=c$에서 극댓값 d를 갖는다.
$a+b+c+d$를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

060

075

최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $(x^2+2)f(x)$는 $x=0$에서 극값 6을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
(다) $\dfrac{12}{f'(2)}$는 자연수이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

061 2024 규토 모의평가 1회

10. 함수 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+b$는 $x=a$에서 극솟값 1을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만나고, 점 B에서의 접선이 점 B가 아닌 점 C에서 곡선과 만날 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 78 ② 81 ③ 84 ④ 87 ⑤ 90

Theme 18 함수의 최대, 최소

062 2024 규토 모의평가 1회

7. 상수 $a\ (a>0)$, b에 대하여 $f(x)=ax^4+4ax^3-b$가 닫힌구간 $[-4,\ 1]$에서 최댓값 2, 최솟값 -30을 가질 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

063

195 | 2022학년도 수능 공통

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

064

171 • 2010학년도 고3 6월 평가원 가형

좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$가 있다. $0<t<2$일 때, 원점 O와 직선 $y=2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2)$를 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교점을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [3점]

Theme 19 방정식의 실근의 개수

065 2024 규토 모의평가 1회

19. 방정식 $2x^3-12x+5=3x^2+k$가 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

066

095

방정식 $3x^4-6x^3-5x^2+12x=2x^3+x^2-12x+k$가 서로 다른 세 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

067

097

함수 $f(x)=x^3+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱이 $-a$일 때, $81a$의 값을 구하시오.

068

098

함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$x|f(x)|=\frac{k}{2}$$

의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.

069

198 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

Theme 20 접선의 개수

070

101

점 $(3,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-4$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

071

102

좌표평면 위의 점 $(0,\ k)$를 지나고 곡선 $y=x^3-6x^2+3x+3$에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{15} f(k)$의 값을 구하시오.

Theme 21 부등식의 활용

072

157 | 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

073

165 | 2020학년도 고3 6월 평가원 나형

두 함수 $f(x)=x^3+3x^2-k$, $g(x)=2x^2+3x-10$에 대하여 부등식 $f(x) \geq 3g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

Theme 22 속도와 가속도

074

115

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 x가 $x=t^3+at+b$이다. 점 P가 원점을 지날 때의 속도와 가속도가 각각 13, 12일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

075

152 | 2019학년도 고3 6월 평가원 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3+at^2+bt$ (a, b는 상수)이다.
시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸고,
시각 $t=2$에서 점 P의 가속도는 0이다.
$a+b$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

076

163 | 2020학년도 수능 나형

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가 $x_1=t^3-2t^2+3t$, $x_2=t^2+12t$이다.
두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. [4점]

Theme 23 정점 Technique

077

185 | 2017년 고3 10월 교육청 나형

함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} f(k)$의 값을 구하시오. [4점]

078

189 | 2021학년도 고3 9월 평가원 나형

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가
모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)| \leq 4x^2+5$를 만족시킨다.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때,
실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

(2번째 풀이 체화)

3. 적분

Theme 24 부정적분의 정의

079 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. $G(3)=2F(3)$일 때, $G(5)-2F(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Theme 25 부정적분과 미분의 관계의 활용

080

019

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$이고,

$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$이다.

함수 $g(x)=\int F(x)\,dx$의 극솟값이 0일 때,

$g(2)$의 값을 구하시오.

(첫 번째, 두 번째 풀이 모두 기억)

081

101 • 2020학년도 수능 나형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}\text{이다.}$$

(나) $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 26 부정적분과 함수의 연속성

082 2024 규토 모의평가 1회

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=2|x-1|+3x^2$$

이고, $f(0)=1$일 때, $f(-1)+f(2)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

083

022

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & (|x|<1) \\ 2 & (|x|>1) \end{cases}$$ 이고 $f(-2)=3$일 때,

$f(-2)f(0)f(2)$의 값을 구하시오.

Theme 27 구간에 따라 달라지는 정적분 계산

084

034

$\int_0^3 6x|x-1|\,dx$ 의 값을 구하시오.

Theme 28 정적분의 성질

085

030

연속함수 $f(x)$가

$$\int_1^3 f(x)dx=-1,\ \int_1^3 \{f(x)\}^2 dx=4$$

를 만족시킬 때, $\int_1^3 \{3f(x)-1\}^2 dx$의 값을 구하시오.

Theme 29 우함수, 기함수, 주기함수의 정적분

086

089 | 2016학년도 수능 A형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)\,dx=10$일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

087

097 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 전체에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

(실전적으로 볼 때 2번째 풀이 익히기)

Theme 30 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간이 상수인 경우

088

047

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=12x^2+\int_{0}^{1}(6x+t)f(t)\,dt$일 때,

$\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

089

086 • 2020년 고3 10월 교육청 나형

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_{0}^{1} g(t)dt$

(나) $g(0)-\int_{0}^{1} g(t)dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

Theme 31 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간에 변수가 있는 경우

090

098 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

091 2026 규토 모의평가 파이널 공통

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-1}^x xf(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+(a+1)x^2-a$$

를 만족시킬 때, $\int_{-a}^a \{f(x)\}^2dx$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

092 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt=xf(x)-2x^2-1$

(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

093 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x tf(t)dt+\int_{-1}^x tg(t)dt=3x^4+8x^3-3x^2$

(나) $f(x)=xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)dx$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

Theme 32 정적분으로 정의된 함수 -New 함수

094

056

함수 $f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt$에 대하여

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때, 접점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}^2$의 값을 구하시오.

(단, 점 O는 원점이다.)

095

095 | 2013학년도 수능 나형

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여

함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

096

103 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

097

090 • 2024학년도 수능 공통

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\ge t)\end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$

④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

098

116 | 2023학년도 수능 공통

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \le x < n$일 때, $\lvert f(x) \rvert = \lvert 6(x-n+1)(x-n) \rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^4 f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

Theme 33 함수의 추론과 정적분

099

104 | 2022학년도 수능 공통

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다. (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 34 정적분으로 정의된 함수의 빼기함수 Technique

100

107 | 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.

$f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

101

119 | 2017학년도 고3 9월 평가원 나형

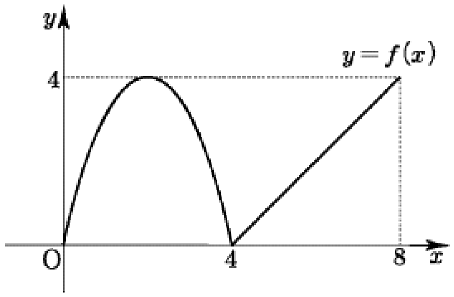
구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\int_{a}^{a+4} f(x)dx$의

최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Theme 35 곡선과 x축 사이의 넓이

102

006

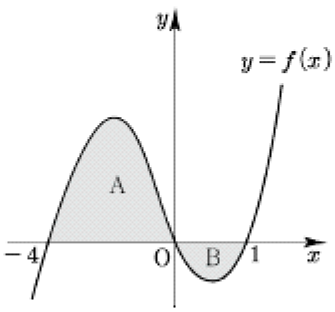
곡선 $y=(x-1)|x-2|$과 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k이다. $12k$의 값을 구하시오.

103

007

아래 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B라 하자.

$\mathrm{A}=10,\ \mathrm{B}=2$일 때, $\int_{-4}^{1}\{2f(x)+|f(x)|-3\}dx$의 값을 구하시오.



104 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

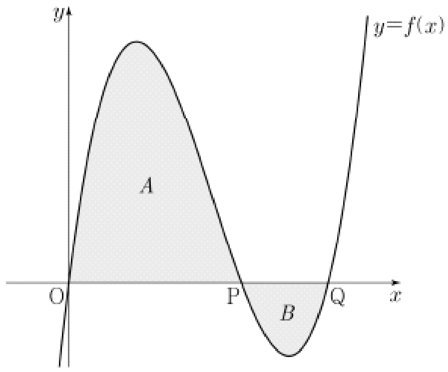
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



105 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

Theme 36 곡선과 직선 사이의 넓이

106 2026 규토 모의평가 9월 공통

19. 점 A$(0,\ a)$에서 곡선 $y=3|x|^3+1$에 그은 두 접선이 서로 수직이고, 두 접선의 접점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

107

054 | 2020학년도 수능 나형

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

108

073 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

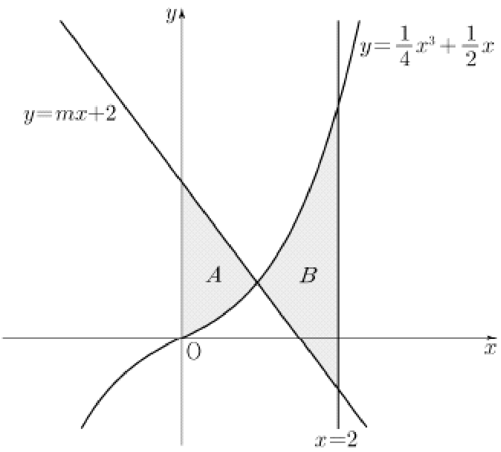
$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

109 2025학년도 고3 6월 평가원 공통

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

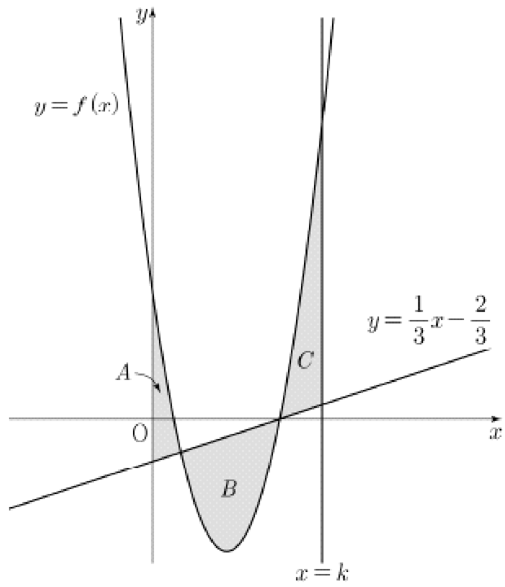


110 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k\,(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

111 2026 규토 모의평가 5월 공통

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3 & (x \ge 0) \\ -5x^2+3 & (x<0) \end{cases}$$

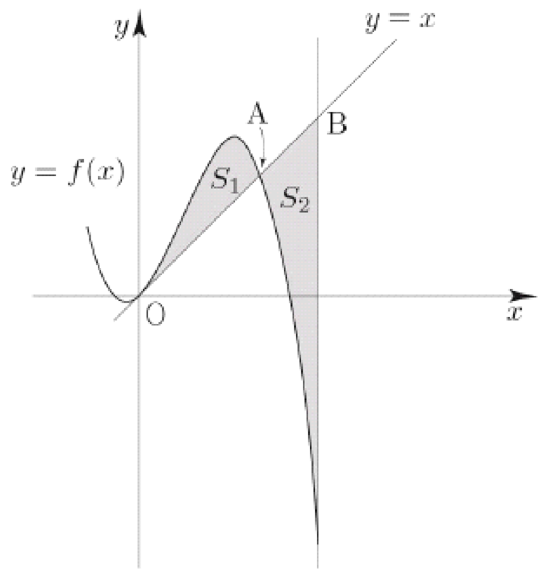
에 대하여 A$(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때, 접점을 B라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{23}{12}$ ② $\frac{25}{12}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{31}{12}$

112 2026 규토 모의평가 9월 공통

13. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 원점 O에서 접하고 x좌표가 양수인 점 A에서 만난다. 선분 OA를 $3:1$로 외분하는 점을 B라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선과 곡선 $y=f(x)$ 및 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $S_2-S_1=\frac{9}{4}$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$



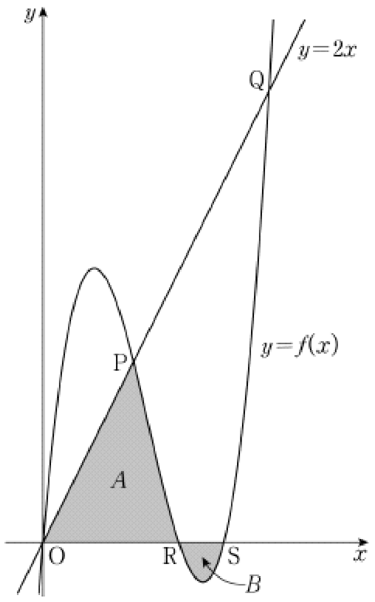
113 2025년 고3 10월 교육청 공통

13. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f(a)=f(a+1)=0$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 세 점 O, P, Q($\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$)에서 만난다. 두 점 R$(a,\,0)$, S$(a+1,\,0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OP, OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 RS로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=5\sqrt{5}$일 때, $A-B$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{61}{12}$ ② $\frac{31}{6}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{65}{12}$



Theme 37 두 곡선 사이의 넓이

114 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

115

017

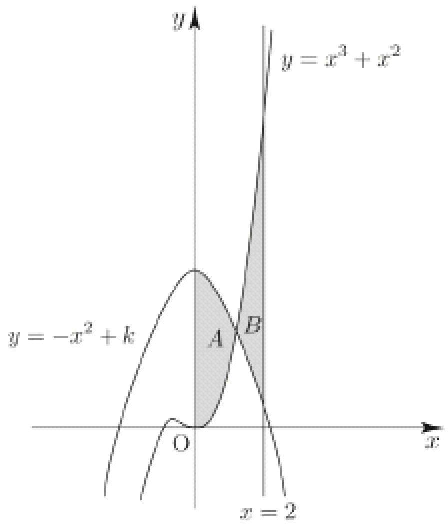
두 곡선 $y=-x^3+x$, $y=x^2-x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

116

071 | 2023학년도 수능 공통

두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]



① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

Theme 38 넓이의 분할

117

025

곡선 $y=-x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분될 때, $4(1-m)^3$의 값을 구하시오. (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.)

118

049 | 2022학년도 수능 공통

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

Theme 39 역함수의 그래프와 넓이

119

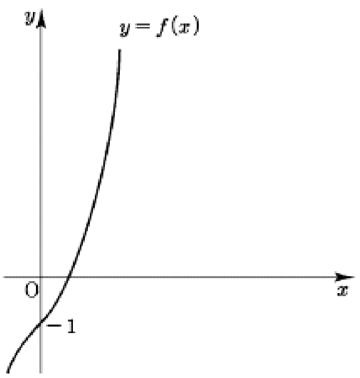
028

함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 k이다. $60k$의 값을 구하시오.

120

058 | 2012년 고3 7월 교육청 나형

함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{4}$ ② $\frac{49}{4}$ ③ $\frac{51}{4}$
④ $\frac{53}{4}$ ⑤ $\frac{55}{4}$

Theme 40 속도와 거리

121

043 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-4t+k$이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

122

050 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 $v(t)=-4t^3+12t^2$이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

123 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\quad v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10　② 14　③ 19　④ 25　⑤ 32

124 2024 규토 모의평가 1회

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(2)와 점 B(k)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2-4,\quad v_2(t)=8$$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 $t=a\;(a>0)$에서 한 번만 만나도록 하는 모든 실수 k에 대하여 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리의 최솟값은? [4점]

① $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{26\sqrt{3}}{9}$　③ $\frac{28\sqrt{3}}{9}$　④ $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

125

074 | 2023학년도 수능 공통

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le t \le 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t \ge 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

126 2025년 고3 7월 교육청 공통

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1=t^3-5t^2+10t,\quad x_2=\frac{5}{2}t^2-2t-10$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

① 8　② 11　③ 14　④ 17　⑤ 20

Theme 41 속도와 거리 ㄱㄴㄷ

127 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-t+1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

128 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-10t+7$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 3이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

129 2026 규토 모의평가 9월 공통

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가

$$v(t)=4t^3-12t^2+8t$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도는 6이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동방향이 $t=a$, $t=b$ $(a<b)$에서 바뀔 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a+b$까지 움직인 거리는 11이다.
ㄷ. $k \geq 2$인 모든 실수 k에 대하여 $\displaystyle\int_1^k \{|v(t)|-v(t)\}dt=2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

130 2026 규토 모의평가 파이널 공통

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t \ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} t^2-t & (0 \le t \le 2) \\ -2t+6 & (t>2) \end{cases}$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. 시각 $t=2$일 때 점 P의 위치는 $\frac{2}{3}$이다.

ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동방향이 $t=a$, $t=b$ $(a<b)$에서 바뀔 때, 시각 $t=a$에서 $t=a+b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\frac{5}{6}$이다.

ㄷ. 출발한 시각부터 점 P와 원점 사이의 거리가 처음으로 $\frac{5}{3}$가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

131

082 2022학년도 수능예비시행

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가 $a(t)=3t^2-12t+9$ $(t \ge 0)$이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 42 함수의 추론과 넓이

132

064 | 2016학년도 사관학교 A형

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=ax^2\,(0 \le x < 2)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

133

077 | 2021학년도 사관학교 나형

양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x)=2x^2+ax$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

134

085 • 2020년 고3 7월 교육청 나형

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
(나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다.
(다) 직선 P_nP_{n+1}의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x \ge 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 선분 P_nP_{n+1}과 일치할 때, $\int_1^{11} f(x)dx$의 값은? [4점]

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

드디어 고지가 보이네요. ㅎㅎ
여러분의 앞날에 행복이 가득하기를 기원하겠습니다.
그동안 정말 수고 많으셨습니다!!

-규토-

2026 이것만은 제발 ver.수학2 빠른 정답

1. 함수의 극한과 연속

Theme 1 함수의 극한

1. ④
2. 10
3. ③
4. 94

Theme 2 함수의 극한의 활용

5. ②
6. ③
7. ④

Theme 3 모든 실수 a에 대하여 극한값 존재

8. 16
9. 42
10. ④
11. ③
12. 57

Theme 4 함수의 연속

13. 8
14. ④
15. 6
16. ⑤
17. ①
18. ⑤
19. 5
20. ④
21. ④
22. ③

2. 미분

Theme 5 평균변화율

23. 11
24. 3

Theme 6 미분계수를 이용한 극한값 계산

25. 10
26 9
27. 2

Theme 7 함수의 곱의 미분법

28. 5
29. 28
30. ①

Theme 8 함수의 미분가능성

31. ④
32. 76
33. 48
34. 3
35. 15
36. 154
37. ①

Theme 9 접선의 방정식 -곡선 위의 점이 주어질 때

38. 3
39. 3
40. 22
41. ⑤

Theme 10 접선의 방정식
-기울기가 주어질 때

42. 10
43. 16
44. ②

Theme 11 접선의 방정식
-곡선 밖의 점이 주어질 때

45. ④
46. ②

Theme 12 접선의 방정식
-두 곡선에 동시에 접하는 접선

47. 10
48. 19

Theme 13 접선의 방정식
-교점에서의 접선

49. 90

Theme 14 접선의 방정식의 활용

50. 25
51. 3
52. 55

Theme 15 평균값의 정리

53. 15

Theme 16 함수의 증가, 감소

54. 1
55. 13
56. 9
57. ①
58. ②

Theme 17 함수의 극대, 극소

59. 2
60. 67
61. ②

Theme 18 함수의 최대, 최소

62. ⑤
63. ④
64. 11

Theme 19 방정식의 실근의 개수

65. 51
66. 42
67. 12
68. 9
69. 21

Theme 20 접선의 개수

70. 23
71. 31

Theme 21 부등식의 활용

72. ⑤
73. 3

Theme 22 속도와 가속도

74. 11
75. ①
76. 27

Theme 23 정점 Technique

77. 13
78. ②

3. 적분

Theme 24 부정적분의 정의

79. ②

Theme 25 부정적분과 미분의 관계의 활용

80. 8
81. 7

Theme 26 부정적분과 함수의 연속성

82. ③
83. 60

Theme 27 구간에 따라 달라지는 정적분 계산

84. 29

Theme 28 정적분의 성질

85. 44

Theme 29 우함수, 기함수, 주기함수의 정적분

86. ①
87. ②

Theme 30 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간이 상수인 경우

88. 4
89. ③

Theme 31 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간에 변수가 있는 경우

90. ④
91. ⑤
92. 10
93. ①

Theme 32 정적분으로 정의된 함수 -New 함수

94. 17
95. ②
96. 8
97. ③
98. ②

Theme 33 함수의 추론과 정적분

99. 110

Theme 34 정적분으로 정의된 함수의 빼기함수 Technique

100. 13
101. 43

Theme 35 곡선과 x축 사이의 넓이

102. 22
103. 13
104. ②
105. ④

Theme 36 곡선과 직선 사이의 넓이

106. 10
107. 14
108. 80
109. ③
110. ④
111. ⑤
112. ①
113. ④

Theme 37 두 곡선 사이의 넓이

114. 4
115. 49
116. ④

Theme 38 넓이의 분할

117. 2

118. ①

Theme 39 역함수의 그래프와 넓이

119. 10

120. ③

Theme 40 속도와 거리

121. 6

122. ③

123. ⑤

124. ⑤

125. 17

126. ③

Theme 41 속도와 거리 ㄱㄴㄷ

127. ⑤

128. ⑤

129. ⑤

130. ⑤

131. ④

Theme 42 함수의 추론과 넓이

132. ③

133. 17

134. ②

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.수학2 해설지

1. 함수의 극한과 연속

Theme 1 함수의 극한

1. ④

057

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 3 + 1 = 4$

답 ④

2. 10

066

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -11 \Rightarrow f(x) = x^3 - 11x^2 + ax + b$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 11x^2 + ax + b}{x-1} = -9$

$\lim_{x \to 1}(x-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1}(x^3 - 11x^2 + ax + b) = 0$

$\Rightarrow 1 - 11 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = 10$

$b = 10 - a$를 대입하면

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 11x^2 + ax + b}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 11x^2 + ax + 10 - a}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 - 10x - 10 + a)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 10x - 10 + a}{1}$

$= -19 + a = -9 \Rightarrow a = 10$

$a = 10$이면 $b = 0$이므로

$f(x) = x^3 - 11x^2 + 10x$이다.

따라서 $\lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x\left(\frac{1}{x^3} - \frac{11}{x^2} + \frac{10}{x}\right)$

$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{11}{x} + 10\right) = 10$

이다.

답 10

로피탈 정리로도 풀어보자.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 11x^2 + ax + b}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 22x + a}{1}$

$= -19 + a = -9 \Rightarrow a = 10$

Tip $f(x)$가 3차 이상일 때는 로피탈이 압도적으로 간단하다.
물론 미분계수의 정의로도 풀 수 있지만
추후에 미분계수 파트에서 설명하겠다.

3. ③

067

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x+1} = 2$

$\lim_{x \to -1}(x+1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -1}(x^3 + ax^2 + bx + c) = 0$

$\Rightarrow -1 + a - b + c = 0$

$c = 1 - a + b$를 대입하면

$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + 1 - a + b}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{x^2 + (a-1)x + 1 - a + b\}}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + (a-1)x + 1 - a + b}{1}$

$= 1 - a + 1 + 1 - a + b$

$= 3 - 2a + b = 2 \Rightarrow b = 2a - 1$

$b = 2a - 1$, $c = a$이므로

$f(x) = x^3 + ax^2 + (2a-1)x + a$

$f(1) = 1 + a + 2a - 1 + a = 4a$

$f(1) \leq 12$이므로 $4a \leq 12 \Rightarrow a \leq 3$이다.

$f(2) = 8 + 4a + 4a - 2 + a = 9a + 6$이고 $a \leq 3$이므로
$f(2)$의 최댓값은 33이다.

답 ③

로피탈 정리로도 풀어보자.

$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + 1 - a + b}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 2ax + b}{1} = 3 - 2a + b = 2 \Rightarrow b = 2a - 1$

Tip 문자가 3개인 방정식은 식이 3개여야 풀 수 있다.
다만 식이 2개면 한 문자로 다른 문자들을 나타낼 수
있다는 사실을 반드시 기억하고 있어야 한다.

ex $-1 + a - b + c = 0$, $b = 2a - 1$
문제에서 주어진 식은 2개이고 문자가 3개이므로
b와 c를 a로 나타낼 수 있다.

어느 정도 레벨에 도달하면 아래와 같은
사고과정을 느낄 수 있게 된다.

① 식이 두 개고 문자가 3개니까
a로 나머지 문자들을 표현할 수 있겠군
② $f(1) \leq 12$로 a의 범위를 알 수 있겠군
③ a의 범위를 아니까 $f(2)$의 최댓값을 구할 수 있겠군

이는 사실 문제를 만들 때,
출제자가 느끼는 사고과정과 유사하다.

① $f(x)$를 그냥 주면 너무 쉬우니까
교과개념을 사용해서 직접 구하게 만들어야겠다.
$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$
② $f(2)$의 최댓값을 구하게 하고 싶군.
그렇게 하려면 범위가 필요한데?
③ $f(1) \leq 12$ 너로 정했다!

4. 94

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=2$ → $f(2)-2=0$

(나) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\{f(x+1)-2\}(x-1)}{f(x)-x} = -2$ → $(x-1)(x-2)g(x)$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

94

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x+1)-2}{(x-2)g(x)} = -2$$

$f(x)=(x-1)(x-2)g(x)+x$

$f(x+1)=x(x-1)g(x+1)+x+1$

$f(x+1)-2=x(x-1)g(x+1)+x-1$

$=(x-1)(xg(x+1)+1)$

$$\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(xg(x+1)+1)}{(x-2)g(x)} = -2$$

$\therefore g(1)=0$, $\Rightarrow g(x)=(x-1)(x-$

$$\lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}(xg(x+1)+1)}{(x-2)\cancel{(x-1)}(x-a)} = -2$$

$ag(a+1)+1\neq0 \Rightarrow a(a)(1)$

$a^2+1\neq0$

a의 불가능

$$\frac{g(2)+1}{-1(1-a)} = \frac{3-a}{a-1} = -2$$

$3-a=-2a+2$

$1=-a$

$a=-1$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)(x-1)+x$

$f(4)=3\times2\times5\times3+4$

90

94

8

Theme 2 함수의 극한의 활용

5. ②

076

두 점 H, A의 x좌표를 각각 a, b라 하면
방정식 $x^2=x+t \Rightarrow x^2-x-t=0$의 두 실근이
a, b이므로 근과 계수의 관계에 의해
$a+b=1$, $ab=-t$이다.

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=1+4t$

$\Rightarrow |a-b|=\sqrt{4t+1}$

$\Rightarrow b-a=\sqrt{4t+1}$ ($\because b>a$)

$\overline{AH}=b-a=\sqrt{4t+1}$
대칭성에 의해서 C의 x좌표는 $-b$이므로
$\overline{CH}=a-(-b)=a+b=1$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{4t+1}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{4t+1}+1}=2$$

이다.

답 ②

6. ③

11. 출제의도 : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 (s, s^2)이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

이므로

$2s=2t$

에서

$s=t$

즉, $P(t, t^2)$

이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로

$tx=2tx-1$

에서

$x=\dfrac{1}{t}$

즉, 점 Q의 좌표는

$Q\left(\dfrac{1}{t}, 1\right)$

따라서

$$\lim_{t\to1-}\frac{\overline{PQ}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$$

$$=2\sqrt{2}$$

정답 ③

7. ④

082

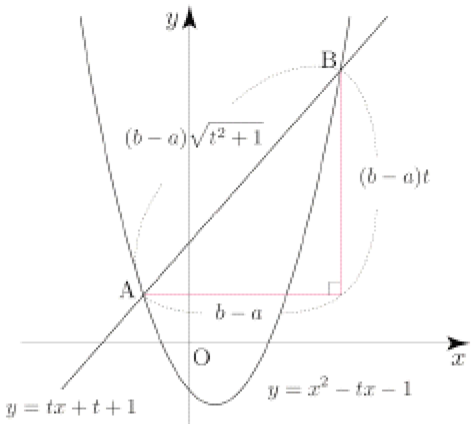
두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b $(a<b)$라 하면
a, b는 이차방정식 $x^2-tx-1=tx+t+1$의 두 실근과 같다.

$x^2-tx-1=tx+t+1$

$\Rightarrow x^2-2tx-2-t=0$

$\Rightarrow a=t-\sqrt{t^2+t+2},\ b=t+\sqrt{t^2+t+2}$

직선 AB의 기울기가 t이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=(b-a)\sqrt{t^2+1}$ 이다.



$b-a=2\sqrt{t^2+t+2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{t^2+t+2}\sqrt{t^2+1}$

따라서 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}=\dfrac{2\sqrt{t^4+t^3+3t^2+t+2}}{t^2}=2$ 이다.

답 ④

Theme 3 모든 실수 a에 대하여 극한값 존재

8. 16

087

방정식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta)=0$인 실수 β가 존재한다.

모든 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로 $\lim\limits_{x\to\beta}f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\beta}f(2x+1)=0$

즉, $f(2\beta+1)=0$

같은 방식으로
$f(2\beta+1)=0 \Rightarrow f(2(2\beta+1)+1)=0 \Rightarrow f(4\beta+3)=0$
이고,

$f(4\beta+3)=0 \Rightarrow f(2(4\beta+3)+1)=0 \Rightarrow f(8\beta+7)=0$

$\beta\neq 2\beta+1 \Rightarrow \beta\neq -1$이면
β, $2\beta+1$, $4\beta+3$, $8\beta+7$는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 실근이다.
이때 방정식 $f(x)=0$은 삼차방정식이므로 서로 다른 네 개 이상의 실근이 나올 수 없어 모순이다.

방정식 $f(x)=0$는 $x=-1$만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0 \Rightarrow -1+a-b+4=0 \Rightarrow b=a+3$
$f(x)=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}$

만약 $f(x)=(x+1)^3$이면 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$일 수 없으므로 모순이다.

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 실근은 존재하지 않아야 하므로 판별식을 사용하면

$D=(a-1)^2-16<0$

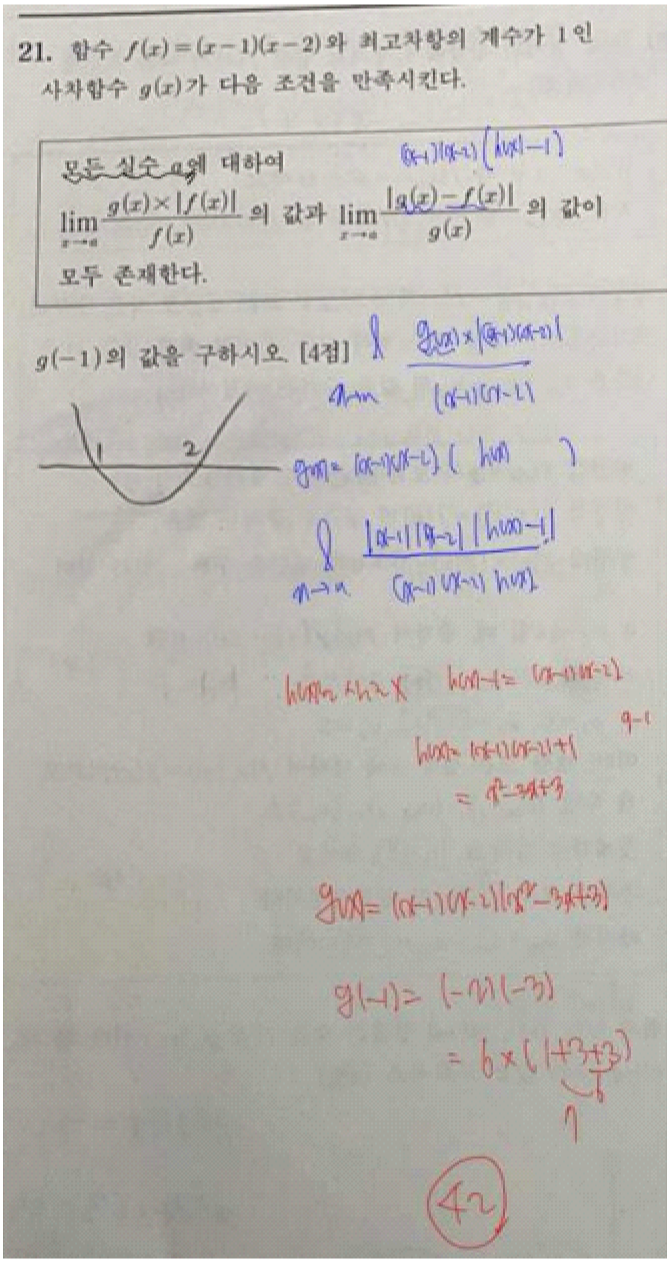
$\Rightarrow -4<a-1<4$

$\Rightarrow -3<a<5$

$f(1)=2\times(1+a-1+4)=2(a+4)=2a+8$
따라서 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때, 16이다.

답 16

9. 42



21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)=(x-1)(x-2)(h(x)-1)$

$h(x)=(x-1)(x-2)+1$

$=x^2-3x+3$

$g(x)=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

$g(-1)=(-2)(-3)$

$=6\times(1+3+3)$

42

10. ④

13. 출제의도 : 함수의 극한값이 존재하도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+6x+12=(x+3)^2+3>0$

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재하는 경우를 다음 두 가지 경우로 나누어 조사하자.

(i) 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}\neq 0$인 경우

$\lim_{x\to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}$

$=(f(a))^2-k(a+2)f(a)$

$=f(a)\{f(a)-k(a+2)\}$에서

$f(a)>0$이므로

$f(a)\neq k(a+2)$

x에 대한 방정식 $f(x)=k(x+2)$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식

$x^2+6x+12=kx+2k$

즉, $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(6-k)^2-4(12-2k)<0$

이어야 한다.

$k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$

$-2<k<6$

(ii) $\lim_{x\to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}=0$ 인 실수 a가 존재하는 경우

$\lim_{x\to a}x^2=0$이어야 하므로

$a^2=0$, $a=0$

$\lim_{x\to 0}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}$

$=(f(0))^2-2kf(0)$

$=f(0)(f(0)-2k)=0$

$f(0)>0$이므로 $f(0)=2k$

즉, $12=2k$에서

$k=6$

이때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(f(x))^2-6(x+2)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)(f(x)-6x-12)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+6x+12}=\frac{1}{12}$$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $-2<k\le 6$이므로 조건을 만족시키는 모든 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ \cdots\ ,\ 6$이고 그 개수는 8이다.

정답 ④

11. ③

13. 함수 $f(x)=x^2+4x+k$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여
>
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-f(x)}{|\{f(x)\}^2-kf(x)|}$ 의 값이 존재한다.
>
> (나) $g(1)\le 40$

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f(x)(f(x)-k)=(x^2+4x+k)(x^2+4x$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-f(x)}{|x^2+4x+k|\,|x(x+4)|}$$

$g(x)-f(x)=x^2(x+4)^2$

$g(x)=x^2(x+4)^2+x^2+4x+k$

① [illegible]. $4-k<0 \Rightarrow 4<k$.

$g(1)\le 40 \rightarrow g(1)=25+5+k$
$=30+k$

$30+k\le 40 \Rightarrow k\le 10$

$4<k\le 10 \Rightarrow k=5.6.7.8.9.10$

② $k=0$. $\frac{x^2(x+4)^2}{|x^2(x+4)^2|}=1$ 조건만족

∴ 7개

5

12. 57

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)$의 [redacted]을 구하시오. [4점]

최댓값

22

(가) $f(1) = -1$, $f(2) = -3$

(나) 모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x)+2x-1|}{f(x)+x^2}$$ 의 값이 존재한다.

(다) $f(0)$은 정수이다.

$f(1) = -1$

$\lim_{x\to 1} \frac{|f(x)+2x-1|}{f(x)+x^2}$

$f(x)+x^2 = (x-1)h(x)$

$f(x)+2x-1 = (x-1)h(x) - x^2+2x-1$
$= (x-1)h(x) - (x-1)^2$
$= (x-1)(h(x)-(x-1))$
$= (x-1)(x-1)(x^2 \cdots)$

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1||h(x)-(x-1)|}{(x-1)h(x)}$

$h(1)=0$

$\lim_{x\to 1+} \frac{|h(x)-(x-1)|}{h(x)}$

$\lim_{x\to 1-} \frac{-|h(x)-(x-1)|}{h(x)}$

$f(2)=-3 \Rightarrow (x-2)(x-p)$

$f(x)+2x-1 = (x-1)^2(x-2)(x-p)$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2|(x-2)(x-p)|}{(x-1)\{(x-1)(x-2)(x-p)+(x-1)\}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{|(x-2)(x-p)|}{(x-2)(x-p)+1}$

모든 a에 대해서 극한이 존재 ⇒ 분모≠0

$D<0$

$x^2-(2+p)x+2p+1$

$(2+p)^2-8p-4<0$

$p^2+4p+\cancel{4}-8p-\cancel{4}<0$

$p^2-4p<0$

$0<p<4$

$f(0)-1=2p$

$f(0)=2p+1$ 정수

$0<2p<8$

$1<2p+1<9$

$2p+1 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$2p=1$, $2p=2$, $2p=3$, $2p=4$, $2p=5$, $2p=6$, $2p=7$

$f(-1)-3 = 4(-3)(-1-p)$
$= 12+12p$

$f(-1) = 15+12p$ $= 15+42 = 57$

Theme 4 함수의 연속

13. 8

005

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 모든 실수 x에 대하여 분모 ax^2+ax+2가 0이 되어서는 안 된다.

<유의 사항>

최고차항의 계수 a가 0일 때,
방정식 $ax^2+ax+2=0$은 이차방정식이 아니므로 판별식을 쓸 수 없다.
즉, $a=0$, $a \neq 0$일 때로 case분류해줘야 한다.

① $a=0$

$f(x) = \frac{2x-1}{2}$이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

② $a \neq 0$

판별식 $D<0 \Rightarrow a^2-8a<0 \Rightarrow a(a-8)<0$

$\Rightarrow 0<a<8$

따라서 $0 \le a < 8$이므로 정수 a의 개수는 8이다.

답 8

Tip 라이트 N제 수학I 삼각함수의 그래프 해설 94번 tip에서도 해당 내용을 언급했는데 만약 문제를 풀 때, 기억이 났다면 Good이다.

14. ④

036

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+a}{x-3} & (x \neq 3) \\ b & (x=3) \end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+a}{x-3} = b = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3}(x-3)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 3}(x^2-5x+a)=0 \Rightarrow -6+a=0$$

$$\Rightarrow a=6$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-2) = 1 = b$$

따라서 $a+b=7$이다.

답 ④

15. 6

037

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x \le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=1$에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a=f(1)$$

$$\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}-2)=0 \Rightarrow \lim_{x\to1+}(x+b)=0 \Rightarrow 1+b=0$$

$$\Rightarrow b=-1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)=4=-3+a \Rightarrow a=7$$

따라서 $a+b=6$이다.

답 6

16. ⑤

038

함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|-1|=1$$

$$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=|-1+a|$$

$$|f(-1)|=|-1|=1$$

$$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|f(x)|=|f(-1)|$$

$$\Rightarrow |-1+a|=1 \Rightarrow a=2 \ (\because\ a>0)$$

함수 $|f(x)|$는 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to3+}|f(x)|=|3b-2|$$

$$\lim_{x\to3-}|f(x)|=|3|=3$$

$$|f(3)|=|3b-2|$$

$$\lim_{x\to3+}|f(x)|=\lim_{x\to3-}|f(x)|=|f(3)|$$

$$\Rightarrow |3b-2|=3 \Rightarrow b=\frac{5}{3} \ (\because\ b>0)$$

따라서 $a+b=2+\dfrac{5}{3}=\dfrac{11}{3}$이다.

답 ⑤

17. ①

041

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\ge1) \end{cases}$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

$$f(x)g(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3+ax+b}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{2x^3+ax+b}{2x+1} & (x\ge1) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax+b}{x-1}=\frac{2+a+b}{3}=f(1)g(1)$$

$$\lim_{x\to1-}(x-1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to1-}(2x^3+ax+b)=0 \Rightarrow 2+a+b=0$$

$$\Rightarrow b=-2-a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax-2-a}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$$

$$=6+a=0 \quad \Rightarrow a=-6,\ b=4$$

따라서 $b-a=4+6=10$이다.

답 ①

로피탈정리를 활용하여 풀어보자.

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{6x^2+a}{1}=6+a=0$$

$$\Rightarrow a=-6,\ b=4$$

18. ⑤

044

$$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)=4$$

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=8$$

위 두식을 더하면

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=12$$

$\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=6$이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)+6=12$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=6$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=2f(0)=6 \Rightarrow f(0)=3$$

답 ⑤

19\. 5

010

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$

$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$는 주기가 4이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=0$, $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(ax+3)=3$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x^2-2ax+b)=b$

$f(0)=3$

$\Rightarrow b=3$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}(-x^2-2ax+3)=-1+4a$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax+3)=2a+3$

$f(2)=f(-2)=-1+4a$

$\Rightarrow -1+4a=2a+3 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$

따라서 $a+b=5$이다.

답 5

Tip 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.

t1 010번 해설강의

https://youtu.be/oyDWrqmzzI8

20\. ④

057

집합 $\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수를 $f(a)$라 한다.

$a=0$이면 이차방정식으로 해석할 수 없으므로
a에 따라 case분류하면

① $a\neq 0$

$\frac{D}{4}>0 \Rightarrow (a-2)^2+a(a-2)=(a-2)(2a-2)>0$

$\Rightarrow (a-2)(a-1)>0 \Rightarrow a<1$ or $a>2$

$a<1$ or $a>2$와 $a\neq 0$의 교집합을 나타내면

$a<0$ or $0<a<1$ or $a>2$이므로

$f(a)=2$ $(a<0$ or $0<a<1$ or $a>2)$

(이차방정식의 서로 다른 실근의 개수 $=f(a)$)

Tip 실수 포인트 !
$a\neq 0$이라는 전제조건을 잊기 쉬우니 유의하자.

$\frac{D}{4}<0 \Rightarrow (a-2)^2+a(a-2)=(a-2)(2a-2)<0$

$f(a)=0$ $(1<a<2)$

$\frac{D}{4}=0 \Rightarrow (a-2)^2+a(a-2)=(a-2)(2a-2)=0$

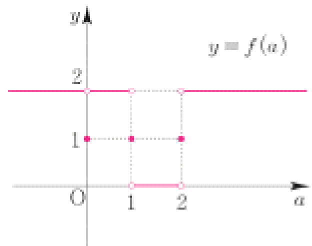
$f(1)=1$, $f(2)=1$

② $a=0$

$-4x+2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$f(0)=1$

이를 바탕으로 $y=f(a)$의 그래프를 그리면



ㄱ. $\lim_{a\to 0}f(a)=f(0)$

$x=0$에서 불연속이므로 ㄱ은 거짓이다.

ㄴ. $\lim_{a\to c+}f(a)\neq\lim_{a\to c-}f(a)$인 실수 c는 2개다.

$x=1$, $x=2$에서 극한값이 존재하지 않으므로

ㄴ은 참이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

$x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로

ㄷ은 참이다.

답 ④

21. ④

059

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

① $f(3)\neq 0$인 경우

$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\dfrac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(3)}$

$g(3)=\dfrac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(3)}$

이므로 $\lim_{x\to3} g(x)=g(3)-1$를 만족시키지 않아 모순이다.

② $f(3)=0$인 경우

$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

Tip

x가 3으로 가까이 갈 때, $g(x)=\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

를 선택하는 것이 다소 이해가 되지 않을 수 있다.

$f(x)=0$을 만족시키는 x에 한에서만 $g(x)$의 함숫값이 3으로 확정되는 것이다.

이때, $\lim_{x\to3} g(x)$는 $x=3$으로 가까이 가는 상황이지 $x=3$인 상황이 아니다.

따라서 $f(3)=0$이더라도

$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$이다.

예를 들어 $f(x)=x-2$라 했을 때

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & (f(x)\neq 0)\\ 4 & (f(x)=0)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & (x\neq 2)\\ 4 & (x=2)\end{cases}$$

와 같은 맥락으로 이해하면 된다.

$g(3)=3$이므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$

극한값이 존재하는데 $\lim_{x\to3} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0 \Rightarrow f(6)=0$

$f(3)=f(6)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x-6)(x-a)$

$\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{x(x-3)(x+3-a)\{(x-3)(x-6)(x-a)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-a)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{x(x+3-a)\{(x-3)(x-6)(x-a)+1\}}{(x-6)(x-a)}$

$=\dfrac{3(6-a)}{-3(3-a)}=\dfrac{6-a}{a-3}=2$

$\Rightarrow a=4$

즉, $f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$

$f(5)\neq 0$이므로 $g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$이다.

따라서 $g(5)=\dfrac{40\times(-1)}{-2}=20$이다.

답 ④

22. ③

040

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$

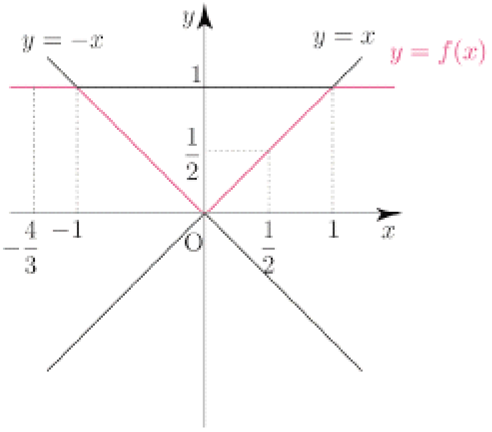
$\Rightarrow \{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$

$\Rightarrow \{f(x)-1\}[\{f(x)\}^2-x^2]=0$

$\Rightarrow \{f(x)-1\}\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}=0$

$\Rightarrow f(x)=1$ or $f(x)=x$ or $f(x)=-x$

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고, 최솟값이 0이므로 이를 만족시키도록 교차점에서 $y=1$, $y=x$, $y=-x$ 중 $f(x)$를 선택하면 다음 그림과 같다.



$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ or } x>1) \\ x & (0\le x\le 1) \\ -x & (-1\le x<0) \end{cases}$$

따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이다.

답 ③

2. 미분

Theme 5 평균변화율

23. 11

067

$f(x)=x^3-6x^2+5x$, $f'(x)=3x^2-12x+5$

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{64-96+20}{4}=\frac{-12}{4}=-3$

$3a^2-12a+5=-3 \Rightarrow 3a^2-12a+8=0$

$\frac{D}{4}=36-24=12>0$

$g(a)=3a^2-12a+8$라 하면 $g(0)>0$, $g(4)>0$이므로

방정식 $g(a)=0$의 서로 다른 두 실근은 0과 4사이에 존재한다.

근과 계수의 관계에 의해 $0<a<4$인 모든 실수 a의

곱은 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 $p+q=11$이다.

답 11

24. 3

058

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}=a^2-3a+5$

$f'(x)=3x^2-6x+5 \Rightarrow f'(2)=5$

$a^2-3a+5=5 \Rightarrow a=3\ (\because a>0)$

답 3

Theme 6 미분계수를 이용한 극한값 계산

25. 10

027

$f(x)=x^3+2x+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$

$=2f'(1)=10$

답 10

26. 9

028

$f(x)=4x^3-ax \Rightarrow f'(x)=12x^2-a$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=b$

$\lim_{h\to0}3h=0 \Rightarrow \lim_{h\to0}\{f(1+2h)-1\}=0$

$\Rightarrow \lim_{h\to0}f(1+2h)=1 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow a=3$

($\because f(x)$는 다항함수이므로 $x=1$에서 연속)

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}f'(1)=\frac{2}{3}(12-3)$

$=6=b$

따라서 $a+b=3+6=9$이다.

답 9

$\frac{0}{0}$꼴인 것을 확인 후 로피탈의 정리를 사용하면

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{2f'(1+2h)}{3}$

$=\frac{2}{3}f'(1)=b=6$

27. 2

029

$f(x)=-x^2+6x+2 \Rightarrow f'(x)=-2x+6$

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-2h)+f(a)}{h}$

$=\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}+2\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\right\}$

$=f'(a)+2f'(a)=3f'(a)=3(-2a+6)=6$

따라서 $a=2$이다.

답 2

로피탈의 정리를 사용하면

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)+2f'(a-2h)}{1}$

$=3f'(a)=6$

Theme 7 함수의 곱의 미분법

28. 5

18. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

이므로

$f'(1)=2(a+4)+2(a+2)$

$=4a+12=32$

따라서 $a=5$

정답 5

29. 28

068

$f(2)=1,\ f'(2)=2$

$g(x)=x^3f(x)$

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)=12+16=28$이다.

답 28

30. ①

075

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

① $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$

$\lim_{x\to0}x=0 \Rightarrow \lim_{x\to0}(f(x)+g(x))=0 \Rightarrow f(0)+g(0)=0$

$J(x)=f(x)+g(x)$라 하면 $J(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{J(x)-J(0)}{x-0}=J'(0)=3$

$\Rightarrow f'(0)+g'(0)=3$

② $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$

$\lim_{x\to0}xg(x)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to0}(f(x)+3)=0 \Rightarrow f(0)=-3,\ g(0)=3$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$=\frac{f'(0)}{g(0)}=\frac{f'(0)}{3}=2$$

$\Rightarrow f'(0)=6,\ g'(0)=-3$

$h(x)=f(x)g(x)$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times3+(-3)\times(-3)=27$

이다.

답 ①

Theme 8 함수의 미분가능성

31. ④

057

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x\ge1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=1$에서 미분가능하다.

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1) \Rightarrow 1+a+b=b+4 \Rightarrow a=3$

$x=1$에서 미분가능하므로

$g(x)=x^3+3x+b,\ h(x)=bx+4$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=h'(1)=b$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=g'(1)=6$

$b=6$

따라서 $a+b=9$이다.

답 ④

32. 76

026

$f(x)=|x-2|(x^2+ax)+x^2$

$$f(x)=\begin{cases} (x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x\ge2) \\ -(x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x<2) \end{cases}$$

$f'(2)=b$이므로 $x=2$에서 좌미분계수와 우미분계수가

서로 같아야 한다.

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x^2+ax)+x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}(x^2+ax)+\lim_{x\to2+}(x+2)=4+2a+4=8+2a$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)(x^2+ax)+x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\{-(x^2+ax)\}+\lim_{x\to2}(x+2)=-4-2a+4=-2a$$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

이므로 $8+2a=-2a \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4=f'(2)=b$

$f'(b-a)=f'(6)$의 값을 구하면

$x\ge2$에서 $f(x)=(x-2)(x^2-2x)+x^2$

$f'(x)=(x^2-2x)+(x-2)(2x-2)+2x$이므로

$f'(6)=(36-12)+40+12=76$이다.

답 76

★ 조금 더 실전적으로 풀어보자.

$f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}(x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x\ge 2)\\ -(x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x<2)\end{cases}$

이므로

$x\ge 2$에서 $f(x)=(x-2)(x^2+ax)+x^2$

$g(x)=(x-2)(x^2+ax)+x^2$라 하면 $y=g(x)$는
다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
즉, $x=2$에서 미분가능하다.

$x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$

결국 극한값 $\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$를
직접 구하지 않고 $g'(2)$를 구하면 된다.

$g(x)=(x-2)(x^2+ax)+x^2$

$g'(x)=(x^2+ax)+(x-2)(2x+a)+2x$

$\Rightarrow g'(2)=4+2a+4=8+2a$

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=g'(2)=8+2a$

$x<2$에서 $f(x)=-(x-2)(x^2+ax)+x^2$.
위와 마찬가지 논리로
$h(x)=-(x-2)(x^2+ax)+x^2$라 하면

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=h'(2)=-2a$

$8+2a=-2a \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$

Tip1 실전적인 풀이도 알고 있고 미분계수의 정의를 활용하는 정석적 풀이도 알고 있어야 한다.

Tip2 도함수의 극한과 미분계수의 관계에 대한 자세한 내용은 도함수의 활용 Master step 225번 해설에서 자세히 다루기로 하자.

33. 48

048

$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\le 0)\\ -x & (0<x\le 1)\\ -2x+1 & (x>1)\end{cases}$

와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$

함수 $f(x)g(x)=\begin{cases}(x+1)g(x) & (x\le 0)\\ -xg(x) & (0<x\le 1)\\ (-2x+1)g(x) & (x>1)\end{cases}$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $x=0$

$x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0) \Rightarrow g(0)=0$

$x=0$에서 미분가능하므로

$h(x)=(x+1)g(x),\ j(x)=-xg(x)$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=j'(0)=-g(0)=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=h'(0)=g(0)+g'(0)=0$

즉, $g(0)=0,\ g'(0)=0$

② $x=1$

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$x=1$에서 미분가능하므로

$j(x)=-xg(x),\ k(x)=(-2x+1)g(x)$

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=k'(1)=-2g(1)-g'(1)$

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=j'(1)=-g(1)-g'(1)$

$-2g(1)-g'(1)=-g(1)-g'(1)$

즉, $g(1)=0$

$g(0)=g'(0)=g(1)=0$이므로 $g(x)=x^2(x-1)$이다.
따라서 $g(4)=16\times 3=48$이다.

답 48

Tip $f(x)$가 다항함수일 때, $f(a)=f'(a)=0$
이면 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가져야한다.

<증명>
$f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)g(x)$
$f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$
$f'(a)=0$이므로 $g(a)=0$
즉, $g(x)=(x-a)h(x)$
따라서 $f(x)=(x-a)^2h(x)$이다.

34. 3

049

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<2) \\ 2x-4 & (x\geq 2) \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

아래와 같이 전개할 수 있을까?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}\cdots ①$$

$$=2f'(2)\cdots ②$$

①에서 ②가 되려면 $f'(2)$가 존재해야 한다.
즉, "$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하다"는 전제조건이 있어야 한다.

하지만 $f(x)$는

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2,\ \lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이므로 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h},\ \lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

은 순수하게 극한값 계산으로 봐야 한다.

$$\boxed{\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k}$$

i) $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

$2+3h=t$라 하면
$h\to 0+ \Rightarrow t\to 2+$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2+3h)=2(2+3h)-4=6h$

$2-h=t$라 하면
$h\to 0+ \Rightarrow t\to 2-$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2-h)=-(2-h)+2=h$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0+}\frac{6h-h}{2h}=\frac{5}{2}$$

ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

$2+3h=t$ 라 하면
$h\to 0- \Rightarrow t\to 2-$ (합성함수로 생각)
$f(2+3h)=-(2+3h)+2=-3h$

$2-h=t$라 하면
$h\to 0- \Rightarrow t\to 2+$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2-h)=2(2-h)-4=-2h$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-3h+2h}{2h}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+k$$

따라서 $k=3$이다.

답 3

이번에는 우미분계수와 좌미분계수로 쪼개서 보는 관점에서 풀어보자.

편의상 $f'(2+)$를 $x=2$에서의 우미분계수라 하고,
$f'(2-)$를 $x=2$에서의 좌미분계수라 하자.

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<2) \\ 2x-4 & (x\geq 2) \end{cases}$$

$f'(2+)=2,\ f'(2-)=-1$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}f'(2+)+\frac{1}{2}f'(2-)\ =3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Tip $-h=t$라 하면 $h\to 0+ \Rightarrow t\to 0-$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=\lim_{t\to 0-}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}=f'(2-)$$

마찬가지로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0-}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$

$=\frac{3}{2}f'(2-)+\frac{1}{2}f'(2+)\ =-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$

$\Rightarrow \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+k$

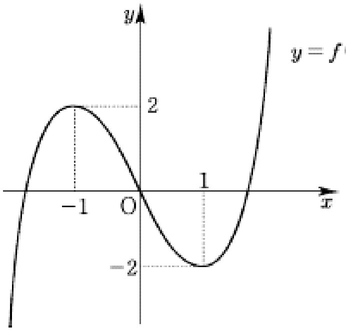
따라서 $k=3$이다.

35. 15

082

$f(x)=x^3-3x,\ f'(x)=3x^2-3$

$f(x)$의 그래프를 그리면

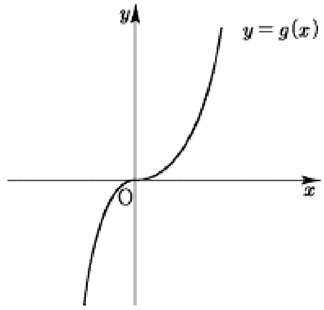


$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge0) \\ f(x-a)+b & (x<0)\end{cases}$$

$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시켜 구할 수 있다.

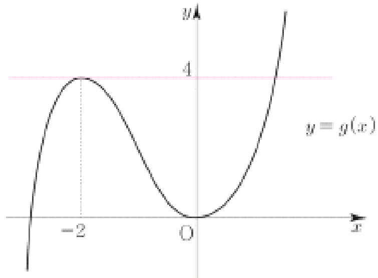
(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 좌미분계수와 우미분계수가 같고, 우미분계수가 0이므로 $g'(0)=0$이다.
따라서 좌미분계수도 0이 되어야 한다.
이를 만족시키도록 a, b를 결정하면 2가지로 case분류할 수 있다.

① $a=1,\ b=-2$
$g(x)$를 그리면

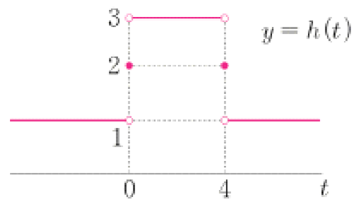


(나) 실수 t에 대하여 방정식 $g(t)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때,
$\lim_{t\to c+}h(t)+h(c)=\lim_{t\to c-}h(t)$이다.
모든 실수 t에 대하여 $h(t)=1$이므로 (나)조건을 만족시키지 않는다.

② $a=-1,\ b=2$
$g(x)$를 그리면



$g(x)$를 바탕으로 $h(t)$를 그리면



$\lim_{t\to4+}h(t)+h(4)=\lim_{t\to4-}h(t)$

$\Rightarrow 1+2=3$

이므로 $c=4$일 때, $\lim_{t\to c+}h(t)+h(c)=\lim_{t\to c-}h(t)$

따라서 $a+2b+3c=-1+4+12=15$이다.

답 15

36. 154

22. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x) = -f(0)$, $\lim_{x\to 0+} g(x) = |f(0)|-8$

$-f(0) = |f(0)|-8$

$f(0)=4$ …… ㉠

$g(0) = |f(0)|-8 = -4$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-f(0+h)+f(0)}{h}$$
$$= -f'(0)$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{|f(0+h)|+2h^2-8+4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{|f(0+h)|-f(0)}{h} + \lim_{h\to 0+}\frac{2h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} + 0 = f'(0)$$

$-f'(0) = f'(0)$

$f'(0)=0$ …… ㉡

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0-}\frac{|f(2+h)|+2(2+h)^2-8-|f(2)|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0-}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} + \lim_{h\to 0-}\frac{2h^2+8h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0-}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} + 8$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{|f(2+h)|-2(2+h)^2+8-|f(2)|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} - \lim_{h\to 0+}\frac{2h^2+8h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} - 8$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} + 8$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} - 8 \text{ …… ㉢}$$

즉 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$f(2)=0$ …… ㉣

$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} = |f'(2)|$와

$\lim_{h\to 0-}\frac{|f(2+h)|-|f(2)|}{h} = -|f'(2)|$를 ㉢에 대입하면

$|f'(2)| = 8$ …… ㉤

㉠, ㉡, ㉣, ㉤을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x) = 3x^3-7x^2+4$ 또는 $f(x) = -x^3+x^2+4$

(i) $f(x) = 3x^3-7x^2+4$인 경우

$3x^3-7x^2+4 = (3x+2)(x-1)(x-2)$이므로

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $f(x) = -x^3+x^2+4$인 경우

$-x^3+x^2+4 = -(x-2)(x^2+x+2)$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $f(x) = -x^3+x^2+4$이다.

따라서 $f(-5) = 154$

37. ①

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax+b|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2+ax+b)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 조건 (가)에 의하여 $b\le 0$

(i) $b=0$인 경우

$f(x)=x^2+ax=x(x+a)$

$$g(x)=\begin{cases} |x(x+a)|-x^2 & (x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

① $a>0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\le -a) \\ -2x^2-ax & (-a<x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x\to -a-}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$$
$$=\lim_{x\to -a-}\frac{ax-(-a^2)}{x+a}=a$$
$$\lim_{x\to -a+}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$$
$$=\lim_{x\to -a+}\frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to -a+}\frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a}=3a$$

$a>0$이므로 $a\ne 3a$

함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ x^4+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^4+x^3-0}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=ax\ne 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$$
$$\lim_{x\to 0-}g(x)=|b|=-b$$
$$\lim_{x\to 0+}g(x)=b^2$$
$$g(0)=|b|=-b$$

이므로 $-b=b^2$

$b<0$이므로 $b=-1$이고, 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax-1|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$이므로

$\alpha<0<\beta$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x\le \alpha) \\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(-2x^2-ax+1)-1}{x}$$
$$=-a$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\{(x^2+ax-1)^2+x^3\}-1}{x}$$
$$=-2a$$

에서 $-a=-2a$, $a=0$

$$g(x)=\begin{cases} |x^2-1|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2-1)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

따라서 $g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)=\frac{1}{2}+91=\frac{183}{2}$

Theme 9 접선의 방정식
-곡선 위의 점이 주어질 때

38. 3

009

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(-1)=9$, $f'(1)=-3$이므로
l_1 : $y=9(x+1)-2 \Rightarrow y=9x+7$
l_2 : $y=-3(x-1) \Rightarrow y=-3x+3$

$9x+7=-3x+3 \Rightarrow 12x=-4 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$
두 직선 l_1, l_2의 교점은 $\left(-\frac{1}{3},\ 4\right)=(a,\ b)$이므로
$3a+b=-1+4=3$이다.

답 3

39. 3

012

$f(x)=-2x^3+4x$라 하면
$f'(x)=-6x^2+4$
$f'(1)=-2$

수직 조건을 이용해서 접선과 수직인 직선의 방정식을 구하면
$y=\frac{1}{2}(x-1)+2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로 $4ab=3$이다.

답 3

40. 22

016

$y=f(x)$가 $(1,\ 3)$을 지나므로 $f(1)=3$
$(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(1)(x-1)+3 \Rightarrow y=f'(1)x-f'(1)+3$
y절편이 5이므로 $f'(1)=-2$이다.

$g(x)=2x^2f(x)$라 하면
$g'(x)=4xf(x)+2x^2f'(x)$
$g'(1)=4f(1)+2f'(1)=12-4=8$

$(1,\ 2f(1)) \Rightarrow (1,\ 6)$에서의 접선의 방정식은
$y=8(x-1)+6 \Rightarrow y=8x-2$
접선이 $(3,\ a)$를 지나므로 $a=22$이다.

답 22

41. ⑤

147

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$이고, $\lim_{x\to a}(x-a)=0$이므로
$\lim_{x\to a}\{f(x)-1\}=0 \Rightarrow f(a)=1$
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(a)(x-a)+f(a) \Rightarrow y=3(x-a)+1=3x-3a+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의
y절편이 4이므로 $-3a+1=4 \Rightarrow a=-1$

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=0$이므로
$f(x)=x^3+bx^2+cx$라 하면 $f'(x)=3x^2+2bx+c$

$f(-1)=1$, $f'(-1)=3$이므로
$-1+b-c=1 \Rightarrow b-c=2$
$3-2b+c=3 \Rightarrow c=2b$
$\therefore\ b=-2$, $c=-4$

즉, $f(x)=x^3-2x^2-4x$
따라서 $f(1)=1-2-4=-5$이다.

답 ⑤

Theme 10 접선의 방정식 -기울기가 주어질 때

42. 10

020

$f(x)=x^4-2x^2+k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4x$

$g(x)=24x-3k$라 하면

$g'(x)=24$

접점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=g'(t) \Rightarrow 4t^3-4t=24 \Rightarrow t^3-t-6=0$

$\Rightarrow (t-2)(t^2+2t+3)=0 \Rightarrow t=2$

이므로 접점의 x좌표는 2이다.

$f(2)=g(2) \Rightarrow 8+k=48-3k \Rightarrow 4k=40$

$\Rightarrow k=10$

답 10

43. 16

022

$f(x)=-x^3+5x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+5$

접점의 x좌표를 t라 하면

$-3t^2+5=-7 \Rightarrow 3t^2=12 \Rightarrow t=2$ or $t=-2$

① $t=-2$

$(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y=-7(x+2)-2 \Rightarrow y=-7x-16$

제 3사분면을 지나므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $t=2$

$(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=-7(x-2)+2 \Rightarrow y=-7x+16$

제 3사분면을 지나지 않으므로 조건을 만족한다.

따라서 직선의 y절편은 16이다.

답 16

44. ②

145

$y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y=-4(x+2)+4 \Rightarrow y=-4x-4$

직선 $y=-4x-4$가 $y=x^3+ax-2$에 접한다.

$f(x)=x^3+ax-2$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$

접점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=-4 \Rightarrow 3t^2+a=-4 \Rightarrow a=-3t^2-4$

$f(t)=-4t-4 \Rightarrow t^3+at-2=-4t-4$

$\Rightarrow at=-t^3-4t-2$

$a=-3t^2-4,\ at=-t^3-4t-2$를 연립하면

$-3t^3-4t=-t^3-4t-2 \Rightarrow 2t^3=2 \Rightarrow t=1$

$t=1$이므로 $a=-7$이다.

답 ②

training – 1step 015번 해설에서 배운
근과 계수의 관계 Technique을 적용시켜 풀어보자.

직선 $y=-4x-4$가 $y=x^3+ax-2$에 접할 때,
접점의 x좌표를 α라 하면
방정식 $-4x-4=x^3+ax-2 \Rightarrow x^3+(a+4)x+2=0$
은 α를 중근으로 갖는다. 다른 한 실근을 β라 하면

$\alpha+\alpha+\beta=2\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta=-2\alpha$

$2\alpha\beta+\alpha^2=a+4$

$\alpha^2\beta=-2$

$\beta=-2\alpha,\ \alpha^2\beta=-2$를 연립하면

$-2\alpha^3=-2 \Rightarrow \alpha=1$

$\alpha=1$이므로 $\beta=-2$

$2\alpha\beta+\alpha^2=a+4 \Rightarrow -4+1=a+4 \Rightarrow a=-7$

Tip <그 땐 그랬지>
썰을 풀자면 2010학년도 6월 평가원 가형은
1등급 컷이 69점인 역대 평가원 모의고사 중
극악 난이도의 시험이었다.
(필자가 재수 때 현장에서 쳤던 시험이기도 하다.)
당시 이 문제가 4번에 출제되어 1페이지를 빠르게
넘기지 못하게 하는 숨은 복병역할을 톡톡히 하였다.

Theme 11 접선의 방정식
-곡선 밖의 점이 주어질 때

45. ④

133

$f(x)=x^3-x+2$

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은 다음과 같다.

$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+2$

접선은 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=(3t^2-1)(-t)+t^3-t+2 \Rightarrow 2=-2t^3 \Rightarrow t=-1$

즉, 접선의 방정식은 $y=2(x+1)+2=2x+4$이다.

따라서 접선의 x절편은 -2이다.

답 ④

46. ②

155

$f(x)=-x^3-x^2+x$

$f'(x)=-3x^2-2x+1$

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은

$y=\left(-3t^2-2t+1\right)(x-t)-t^3-t^2+t$이다.

원점을 지나므로 $(0,\ 0)$을 대입하면

$0=3t^3+2t^2-t-t^3-t^2+t$

$\Rightarrow 0=2t^3+t^2=t^2(2t+1)$

$\Rightarrow t=0$ or $t=-\dfrac{1}{2}$

① $t=0$ 일 때, $f'(0)=1$

② $t=-\dfrac{1}{2}$ 일 때, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$

이므로 구하고자하는 모든 직선의 기울기의 합은 $\dfrac{9}{4}$이다.

답 ②

Theme 12 접선의 방정식
-두 곡선에 동시에 접하는 접선

47. 10

032

$f(x)=x^3+ax+b,\ g(x)=3x^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=6x$

접점이 $(1,\ 0)$이므로

$f(1)=g(1)=0 \Rightarrow 1+a+b=0,\ c=-3$

$f'(1)=g'(1) \Rightarrow 3+a=6 \Rightarrow a=3$

이므로 $1+a+b=0,\ a=3 \Rightarrow b=-4$

따라서 $a-b-c=3+4+3=10$이다.

답 10

48. 19

033

$f(x)=-x^2+4$

$g(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$

의 접점을 각각 $(a,\ f(a)),\ (b,\ g(b))$라 하자.

$f'(a)=g'(b) \Rightarrow -2a=2b-6 \Rightarrow a+b=3$

$\Rightarrow b=3-a$

$f'(a)=\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow -2a=\dfrac{(b-3)^2-(-a^2+4)}{b-a}$

$\Rightarrow -2a=\dfrac{a^2+a^2-4}{3-2a}$

$\Rightarrow 4a^2-6a=2a^2-4$

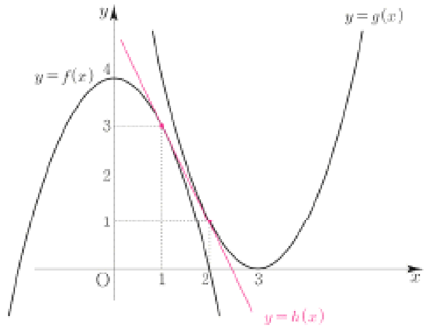
$\Rightarrow a^2-3a+2=0$

$\Rightarrow (a-1)(a-2)=0$

$\Rightarrow a=1$ or $a=2$

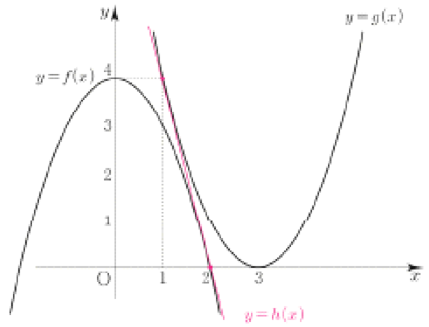
① $a=1,\ b=2$

$h(x)=-2(x-1)+3=-2x+5$



② $a=2,\ b=1$

$h(x)=-4x+8$



따라서 모든 $h(-1)$의 합은 $7+12=19$이다.

답 19

Theme 13 접선의 방정식 -교점에서의 접선

49. 90

035

$f(2)=g(2)=3$

$f'(2)\times g'(2)=-1$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2)g(2))$에서의

접선의 방정식은

$y=\{f'(2)g(2)+f(2)g'(2)\}(x-2)+f(2)g(2)$

$y=3\{f'(2)+g'(2)\}(x-2)+9=8x-7$이므로

$f'(2)+g'(2)=\dfrac{8}{3}$이다.

$$\{f'(2)-g'(2)\}^2=\{f'(2)+g'(2)\}^2-4f'(2)g'(2)$$

$$=\frac{64}{9}+4=\frac{100}{9}$$

$$\sqrt{\{f'(2)-g'(2)\}^2}=\frac{10}{3}\ \Rightarrow\ |f'(2)-g'(2)|=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow f'(2)-g'(2)=\frac{10}{3}\quad(\because f'(2)>g'(2))$$

따라서 $27\{f'(2)-g'(2)\}=90$이다.

답 90

Theme 14 접선의 방정식의 활용

50. 25

037

삼각형 ABP의 밑변을 $\overline{AB}=\sqrt{5}$라 하면

높이가 최소일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 최소이다.

직선 AB의 방정식은 $y=-2x-1$이므로

점 P에서의 접선의 기울기가 -2일 때, 높이가 최소이다.

$f(x)=x^2-4x+5$라 하면

$f'(x)=2x-4$

$2x-4=-2\ \Rightarrow\ x=1$이므로 $P(1,\ 2)$이다.

삼각형 ABP의 높이 h는 점 $P(1,\ 2)$와

직선 $y=-2x-1\ \Rightarrow\ 2x+y+1=0$ 사이의 거리와 같다.

$$h=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}=m$

이므로 $10m=25$이다.

답 25

Tip <신발끈 공식>

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표를 알면 신발끈 공식을

이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표가

$(a,\ b),\ (c,\ d),\ (e,\ f)$일 때,

삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|ad+cf+eb-(cb+ed+af)|$$

ex $A(-1,\ 1),\ B(-2,\ 3),\ P(1,\ 2)$일 때,
삼각형 ABP의 넓이 S를 구하시오.

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|-3-4+1-(-2+3-2)|$$

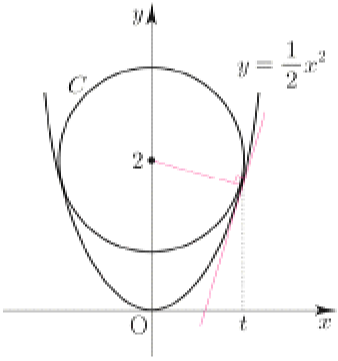
$$=\frac{1}{2}|-5|=\frac{5}{2}$$

51. 3

038

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$라 하면 $f'(x)=x$

접점의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면
두 점$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기와
$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.



$$\frac{\frac{1}{2}t^2-2}{t-0}\times t=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$$

$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow (\sqrt{2},\ 1)$

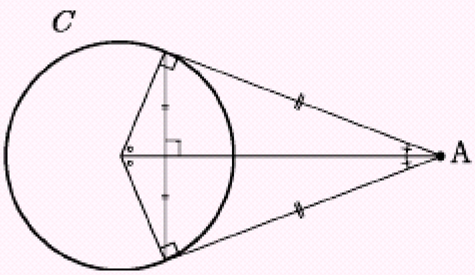
두 점 $(\sqrt{2},\ 1)$, $(0,\ 2)$사이의 거리가 원 C의
반지름 r이므로 $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(1-2)^2}=\sqrt{3}$이다.

원 C의 넓이는 3π이므로 $a=3$이다.

답 3

Tip 원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은
문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다.
즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

아래 그림과 같이 점 A에서 원 C에 접선을
그었을 때, 그어야하는 보조선은 다음과 같다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하자.

52. 55

040

$\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{5}$, $\cos(\angle APB)=\frac{3}{5}$

$\overline{AB}=x$라 하자.

삼각형 ABP에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(\angle APB)=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-x^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{10-x^2}{10} \Rightarrow 30=50-5x^2 \Rightarrow x=2\ (\because x>0)$$

$\overline{AB}=2$이고 삼각형 ABP는 이등변삼각형이므로
$A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$이다.
$\overline{OP}=\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{5-1}=2$
즉, $P(0,\ 2)$
직선 BP의 기울기는 -2이므로
점 C에서의 접선의 기울기는 -2이다.

$f(x)=-4x^4+k$라 하면
$f'(x)=-16x^3$

점 C의 x좌표를 t라 하면
$f'(t)=-2 \Rightarrow -16t^3=-2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

직선 BP의 방정식은 $y=-2x+2$이고,
점 C은 직선 BP위의 점이므로 C의 y좌표는 1이다.
$C\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$은 곡선 $y=f(x)$위의 점이기도 하므로
$f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow -\frac{1}{4}+k=1 \Rightarrow k=\frac{5}{4}$

$C\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$이므로 대칭성에 의해서 $D\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$

사각형 ABCD는 등변사다리꼴이므로
넓이 $s=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{DC})\times h=\frac{1}{2}\times(2+1)\times1=\frac{3}{2}$

따라서 $20(k+s)=20\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)=25+30=55$이다.

답 55

Theme 15 평균값의 정리

53. 15

046

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해서

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$를 만족시키는 c가

열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{f(4)-3}{3}=f'(c)$$

(나) 조건에 의해서

$$0 \le \frac{f(4)-3}{3} \le 3 \Rightarrow 3 \le f(4) \le 12$$

$f(4)$의 최솟값은 3, 최댓값은 12이므로

최솟값과 최댓값의 합은 15이다.

답 15

Theme 16 함수의 증가, 감소

54. 1

053

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x$

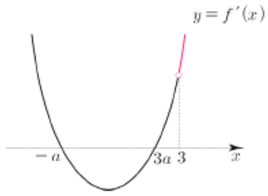
$f'(x)=x^2-2ax-3a^2=(x-3a)(x+a)$

$3<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)<f(x_2)$이므로 $x>3$에서 $f(x)$가 증가한다.

즉, $x>3$에서 $f'(x) \ge 0$

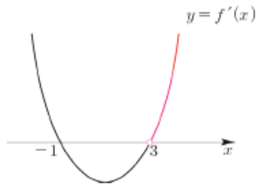
$a>0$이므로 $f'(x)$를 그리면



조건을 만족하려면 $3a<3$이어야 하므로 $a<1$이다.

위와 같은 그림은 직관적으로 당연하게 받아들일 수 있지만

만약 $3a=3$일 때에도 조건을 만족시킬 수 있을까?



$3a=3 \Rightarrow a=1$이어도 조건을 만족시킨다.

$0<a \le 1$이므로 a의 최댓값은 1이다.

답 1

Tip 항상 경계를 조심해야 한다.

a가 자연수나 정수일 때, a의 개수나 합을 물어보는 문제에서 특히 조심해야 한다.

위 문제에서는 $a=1$일 때가 경계가 되는데

$a=1$인 상황을 그려보고 특히 유의하면서 판단하면 된다.

55. 13

129

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

$(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)+t^3-(a+2)t^2+at$

이므로 $g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$이다.

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t=-6t\left(t-\dfrac{a+2}{3}\right)$

$g(t)$가 열린구간 $(0, 5)$에서 증가하므로

$\dfrac{a+2}{3}$는 양수이고 $5 \le \dfrac{a+2}{3} \Rightarrow 13 \le a$

따라서 a의 최솟값은 13이다.

답 13

56. 9

054

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{k}{2}x^2-4x+1$

$f'(x)=-x^2+kx-4$

$f(x)$의 역함수가 존재하려면 실수 전체에서 감소함수나 증가함수이어야 한다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 감소함수이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \le 0$를 만족시키면 된다.

판별식을 사용하면

$D \le 0 \Rightarrow k^2-16 \le 0 \Rightarrow (k+4)(k-4) \le 0$

$\Rightarrow -4 \le k \le 4$

따라서 정수 k의 개수는 9이다.

답 9

57. ①

158

$f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$

$$f(x)=\begin{cases} x^3+6x^2+15x-30a+3 & (x>2a) \\ x^3+6x^2-15x+30a+3 & (x \le 2a) \end{cases}$$

$x>2a$에서 $f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$이고,

모든 실수 x에 대하여

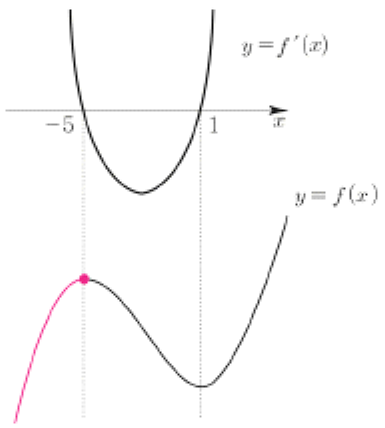
$f'(x)=3x^2+12x+15=3(x^2+4x+5)>0$이므로

$x>2a$에서 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $x \le 2a$에서 $f(x)$가 증가하면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x \le 2a$에서 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3$이고
$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$이므로

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$x \le 2a$에서 $f(x)$가 증가하려면
$2a \le -5 \Rightarrow a \le -\frac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

답 ①

Tip1 <$f(x)$는 $x = 2a$에서 미분가능해야할까?>

$x = 2a$에서 미분가능해야 $f(x)$가 증가하는 것은 아니다.

Guide step에서 배운 내용을 다시 상기시켜보자.
(개념 파악하기 - (4) 함수의 증가와 감소는 어떻게 알 수 있을까?)
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 학습하였다.

즉, 미분가능해야 증가하는 것이 아니라 위 조건만 만족시키면 그 구간에서 증가한다고 볼 수 있다.

다만 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 학습하였다.

만약 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수라면 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$ 라고 학습하였다.

Tip2 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.

T2 158번 해설강의

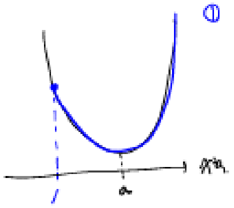
https://youtu.be/bnmiT2Gp3D8

58. ②

12. 실수 a에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 1\}$인 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재할 때, $f(2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$f'(x) = x^2-2ax+3a$



① $a \geq 1$.

$f'(a) \geq 0 \Rightarrow a^2-2a^2+3a \geq 0$

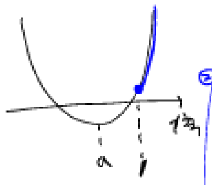
$-a^2+3a \geq 0$

$a^2-3a \leq 0$

$a(a-3) \leq 0$

$0 \leq a \leq 3$

$\therefore 1 \leq a \leq 3$



② $a<1$

$f'(1) \geq 0 \Rightarrow 1-2a+3a \geq 0$

$1+a \geq 0$

$a \geq -1$

$\therefore -1 \leq a < 1$

$-1 \leq a \leq 3$

$$f(2)=\frac{8}{3}+2a \Rightarrow -2+\frac{8}{3} \leq f(2) \leq 6+\frac{8}{3}$$

$\therefore M-m=8$

Theme 17 함수의 극대, 극소

59. 2

060

$f(x)=x^3+ax^2+bx+5$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=2$에서 극솟값 1를 가지므로

$f(2)=1 \Rightarrow 4a+2b+13=1 \Rightarrow 2a+b=-6$

$f'(2)=0 \Rightarrow 12+4a+b=0 \Rightarrow 4a+b=-12$

두 식을 연립하면 $a=-3$, $b=0$

$f(x)=x^3-3x^2+5$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x=0$에서 극대이고 극댓값 5를 가지므로 $c=0$, $d=5$이다.

따라서 $a+b+c+d=-3+0+0+5=2$이다.

답 2

60. 67

075

최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$

(가) 함수 $(x^2+2)f(x)$는 $x=0$에서 극값 6을 갖는다.

$2f(0)=6 \Rightarrow f(0)=3$

$2 \times 0 \times f(0)+(0^2+2)f'(0)=0 \Rightarrow f'(0)=0$

(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(0)=0$인데 극값을 갖지 않으려면

$f(x)=ax^3+b$ 꼴이어야 한다.

(Guide step에서 배운 삼차함수 개형 ②번 꼴)

$f(0)=3$이므로 $f(x)=ax^3+3$

(다) $\frac{12}{f'(2)}$는 자연수이다.

$\frac{12}{f'(2)}=\frac{12}{12a}=\frac{1}{a}$

a가 자연수이므로 조건을 만족시키려면 $a=1$이어야 한다.

$f(x)=x^3+3$이므로 $f(4)=67$이다.

답 67

61. ②

10. 함수 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+b$는 $x=a$에서 극솟값 1을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a,\ f(a))$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만나고, 점 B에서의 접선이 점 B가 아닌 점 C에서 곡선과 만날 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

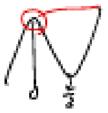
① 78 ② 81 ③ 84 ④ 87 ⑤ 90

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x$

$f'(a)=3a^2-2a^2-2a=0 \rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a=0,\ a=2$

① $a=0$

$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$



극대 → 모순.

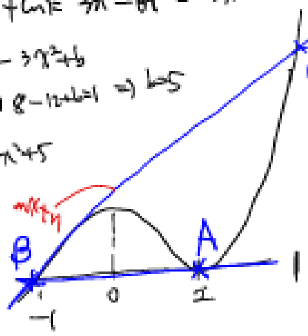
② $a=2$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(x)=x^3-3x^2+b$

$f(2)=1 \Rightarrow 8-12+b=1 \Rightarrow b=5$

$f(x)=x^3-3x^2+5$



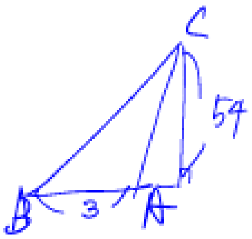
C(p,) (5, 55).

125−75+5

3차 개수의 관계 technique.

$f(x)=mx+n \Rightarrow$ 세 근의 합 3 $\Rightarrow -1-1+p=3$

$p=5$.



$\frac{\pi}{8}+\frac{b}{4}$

$-3\pi+6b$

$\frac{1}{2}\times54\times3=81$

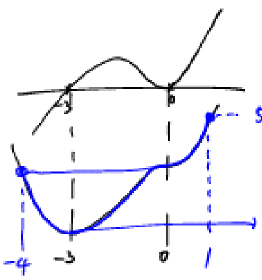
Theme 18 함수의 최대, 최소

62. ⑤

7. 상수 $a\ (a>0)$, b에 대하여 $f(x)=ax^4+4ax^3-b$가 닫힌구간 $[-4,\ 1]$에서 최댓값 2, 최솟값 -30을 가질 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

$f'(x)=4ax^3+12ax^2$
$=4ax^2(x+3)$



$5a-b=2$

$81a-108a-b$
$-27a-b=-30$

$5a-b=2$
$-27a-b=-30$
$32a=32$
$a=1$
$b=3$

$f(x)=x^4+4x^3-3$

$f(2)=16+32-3$
$=48-3=45$

63. ④

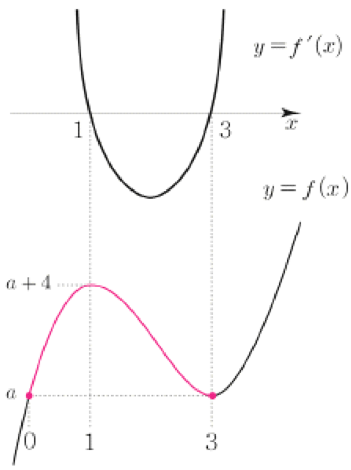
195

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f(0)=a,\ f(1)=a+4,\ f(3)=a$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=a+4$이므로 $a+4=12 \Rightarrow a=8$

따라서 $a=8$이다.

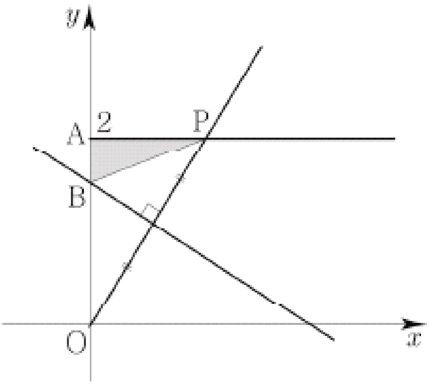
답 ④

64. 11

171

$0<t<2$

$\mathrm{A}(0,\ 2),\ \mathrm{P}(t,\ 2)$



직선 OP의 기울기는 $\frac{2}{t}$, 선분 OP의 중점은 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$

선분 OP의 수직이등분선은

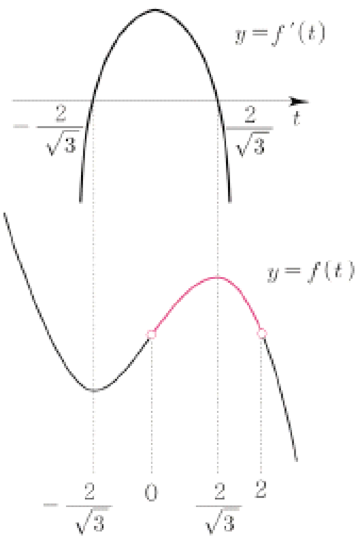
$y=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1 \Rightarrow y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$

$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{t^2}{4}+1\right)$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\times t=\frac{1}{8}(4t-t^3)$

$f'(t)=\frac{1}{8}(4-3t^2)=-\frac{3}{8}\left(t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$0<t<2$에서 $f(t)$의 최댓값은

$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{b}{a}\sqrt{3}$

따라서 $a+b=11$이다.

답 11

Tip

<만약 $t>2$이면 어떻게 될까?>

점 B의 y좌표는 $\frac{t^2}{4}+1$이므로 $t=2$일 때, 2이고

$t>2$일 때, y좌표는 2보다 크다.

B의 y좌표가 A의 y좌표보다 크기 때문에

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{t^2}{4}-1$이다.

따라서 만약 $t>0$라고 조건을 변경하면

선분 AB는 길이는 양수이므로 절댓값을 취해서

$\overline{\mathrm{AB}}=\left|1-\frac{t^2}{4}\right|$라고 해야한다.

길이는 양수이므로 절댓값을 취해줘야 한다.

이를 항상 유의하도록 하자.

Theme 19 방정식의 실근의 개수

65. 51

19. 방정식 $2x^3-12x+5=3x^2+k$가 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

51

$2x^3-3x^2-12x+5=k$

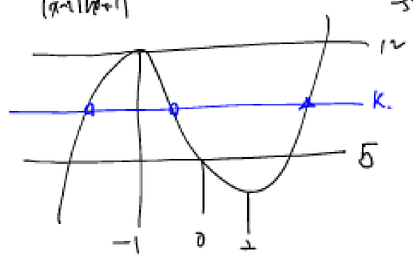
$6x^2-6x-12$

$6(x^2-x-2)$

$(x-2)(x+1)$

$-2-3+12+5$

12



$k=6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11$

13 21 30 40

51

7

66. 42

095

$3x^4-6x^3-5x^2+12x=2x^3+x^2-12x+k$

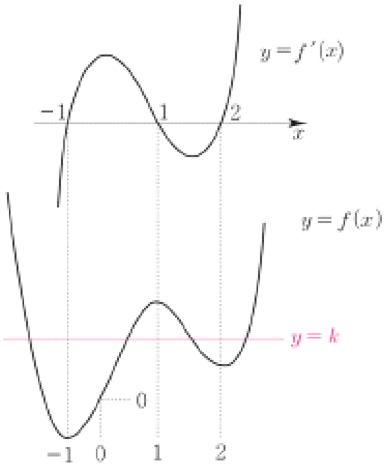
$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f(2)=8$, $f(1)=13$, $f(0)=0$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(2)<k<f(1) \Rightarrow 8<k<13$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

$9+10+11+12=42$이다.

답 42

67. 12

097

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$

$f(x)$는 증가함수이므로

$y=f(x)$와 $y=g(x)$와 만나는 점은

$y=f(x)$와 $y=x$와 만나는 점과 같다.

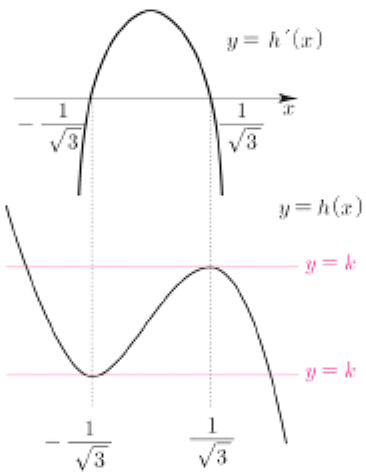
즉, 방정식 $x^3+k=x$이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$k=-x^3+x$

$h(x)=-x^3+x$라 하면

$h'(x)=-3x^2+1=-3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면



$k=h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $k=h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

이므로 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 곱은

$-\frac{4}{27}=-a \Rightarrow a=\frac{4}{27}$이다.

따라서 $81a=12$이다.

답 12

68. 9

098

$f(x)=x^2-3x=x(x-3)$

$x|f(x)|=\frac{k}{2} \Rightarrow 2x|f(x)|=k$

$g(x)=2x|f(x)|$라 하면

$x<0$ or $x>3$에서 $f(x)>0 \Rightarrow |f(x)|=f(x)$

$0 \le x \le 3$에서 $f(x) \le 0 \Rightarrow |f(x)|=-f(x)$

이므로

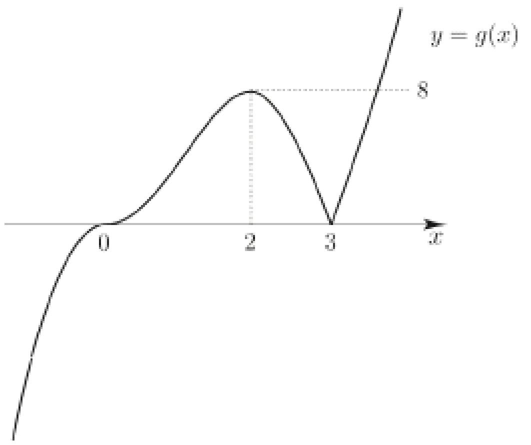
$$g(x)=\begin{cases} 2x^2(x-3) & (x<0 \text{ or } x>3) \\ -2x^2(x-3) & (0 \le x \le 3) \end{cases}$$

$h(x)=-2x^3+6x^2$라 하면

$h'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$이므로

$x=2$에서 극댓값 8을 갖는다.

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=k$의 그래프가 한 점에서 만나지 않도록 하는 k의 범위는 $0 \le k \le 8$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는 9이다.

답 9

69. 21

198

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$

$\Rightarrow f(x)+|f(x)+x|-6x=k$

절댓값을 풀기 위해서 절댓값 안의 함수 $f(x)+x$의 함숫값이 양수인 범위와 음수인 범위를 조사해 보자.

$J(x)=f(x)+x$라 하자.

$J(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x=\frac{x}{2}(x^2-9x+22)$

이차방정식 $x^2-9x+22=0$에서

판별식 $D=81-88<0$이다.

즉, 곡선 $y=J(x)$와 x축은 원점에서만 만난다. 또한

$J'(x)=\frac{3}{2}x^2-9x+11 \Rightarrow J'(0)=11>0$이므로

$x=0$의 좌우에서 $J(x)$의 부호가 $-$ $+$로 바뀐다.

$x<0 \Rightarrow J(x)<0$

$x>0 \Rightarrow J(x)>0$

$x=0 \Rightarrow J(0)=0$

① $x \ge 0$일 때, $J(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)+x \ge 0$

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$

$\Rightarrow f(x)+f(x)+x=6x+k$

$\Rightarrow 2f(x)-5x=k$

$\Rightarrow x^3-9x^2+15x=k$

② $x<0$일 때, $J(x)<0 \Rightarrow f(x)+x<0$

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$

$\Rightarrow f(x)-f(x)-x=6x+k$

$\Rightarrow -7x=k$

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하자.

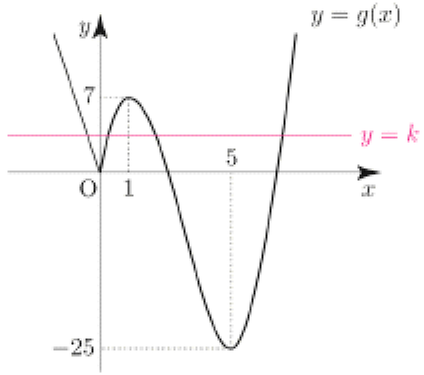
$$g(x)=\begin{cases} x^3-9x^2+15x & (x\geq 0) \\ -7x & (x<0) \end{cases}$$

$h(x)=x^3-9x^2+15x$

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$h(0)=0,\ h(1)=7,\ h(5)=-25$

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4가 되도록 하는 실수 k의 범위는 $0<k<7$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$ 이다.

답 21

Theme 20 접선의 개수

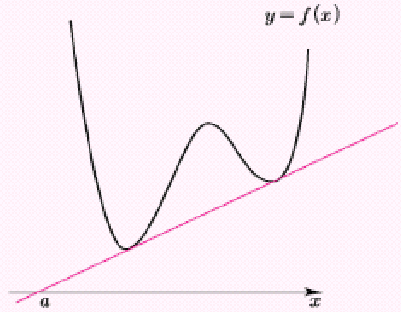
70. 23

101

삼차함수의 접선의 개수는 접점의 개수와 같으므로
서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하려면
서로 다른 두 개의 접점이 존재하면 된다.

Tip 접선의 개수 = 접점의 개수?

접선의 개수와 접점의 개수가 반드시 같은 것은 아니다. 예를 들어 $f(x)$가 사차함수일 때, 아래와 같은 경우가 가능하다.



즉, 접점이 2개여도 접선이 1개일 수 있다.

하지만 $f(x)$가 삼차함수라면 위와 같은 경우가 발생하지 않으므로 접선의 개수와 접점의 개수는 같다.
(이때, 접점의 개수는 접점의 x좌표의 개수로 판단할 수 있다.)

그렇기 때문에 보통 접선의 개수를 물어보는 문제는 $f(x)$가 삼차함수인 경우가 대부분이다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은

$y=3t^2(x-t)+t^3-4$

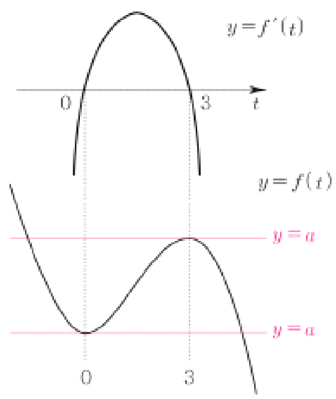
접선이 점 $(3,\ a)$을 지나므로

$a=3t^2(3-t)+t^3-4=-2t^3+9t^2-4$

$f(t)=-2t^3+9t^2-4$라 하면

$f'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$a=f(0)=-4$ or $a=f(3)=23$
a는 양수이므로 23이다.

답 23

71. 31

102

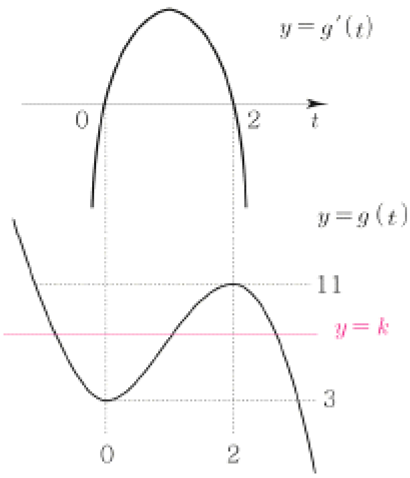
101번에서 배웠듯이 삼차함수이므로
접점의 개수와 접선의 개수는 동일하다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=(3t^2-12t+3)(x-t)+t^3-6t^2+3t+3$

접선이 $(0,\ k)$를 지나므로
$k=-2t^3+6t^2+3$

$g(t)=-2t^3+6t^2+3$라 하면
$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$
$g(0)=3,\ g(2)=11$

$g'(t)$를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$k<3$ or $k>11 \Rightarrow f(k)=1$
$f(3)=f(11)=2$
$3<k<11 \Rightarrow f(k)=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} f(k)=1\times6+2\times2+3\times7=31$이다.

답 31

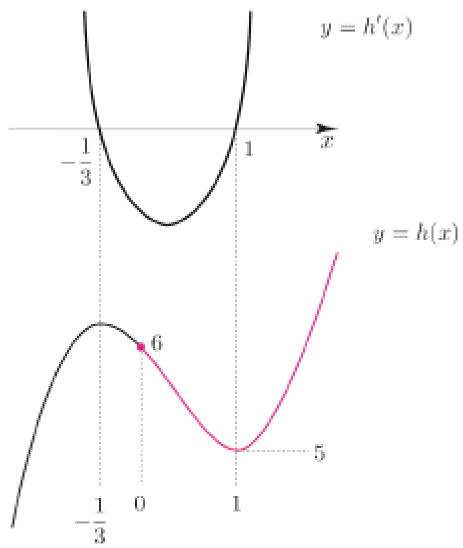
Theme 21 부등식의 활용

72. ⑤

157

$f(x)\ge g(x) \Rightarrow x^3-x+6\ge x^2+a \Rightarrow x^3-x^2-x+6\ge a$
$h(x)=x^3-x^2-x+6$라 하면
$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$
$h(0)=6,\ h(1)=5$

$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면



$x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\ge a$가
성립하려면 $a\le5$이어야 한다.

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

73. 3

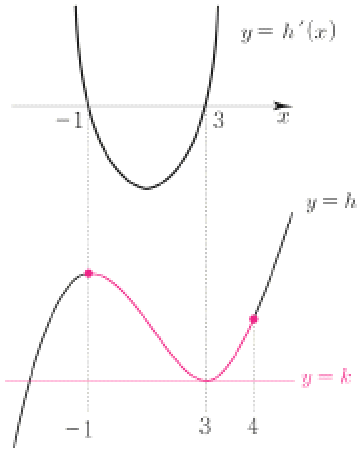
165

$f(x)=x^3+3x^2-k,\ g(x)=2x^2+3x-10$

$f(x)\ge 3g(x)$
$x^3+3x^2-k\ge 6x^2+9x-30$
$x^3-3x^2-9x+30\ge k$

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30$라 하면
$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$
$h(3)=3$

$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면



닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 부등식 $h(x) \ge k$가 항상 성립하려면 $h(3) \ge k \Rightarrow 3 \ge k$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

Theme 22 속도와 가속도

74. 11

115

$t>0$

$x(t)=t^3+at+b$

$v(t)=3t^2+a$

$v'(t)=6t$

$v'(2)=12$이므로 $t=2$에서 점 P는 원점을 지난다.

$v(2)=12+a=13 \Rightarrow a=1$

$x(2)=8+2+b=10+b=0 \Rightarrow b=-10$

따라서 $a-b=11$이다.

답 11

75. ①

152

$x(t)=t^3+at^2+bt$

$v(t)=3t^2+2at+b$

$v'(t)=6t+2a$

$v(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0$

$v'(2)=0 \Rightarrow 12+2a=0 \Rightarrow a=-6$

$a=-6$이므로 $b=9$이다. 따라서 $a+b=3$이다.

답 ①

76. 27

163

$x_1(t)=t^3-2t^2+3t,\ x_2(t)=t^2+12t$

$v_1(t)=3t^2-4t+3,\ v_2(t)=2t+12$

$v_1(t)=v_2(t) \Rightarrow 3t^2-4t+3=2t+12 \Rightarrow t^2-2t-3=0$

$\Rightarrow (t-3)(t+1)=0 \Rightarrow t=3\ (\because t \ne -1)$

P(18), Q(45)이므로 두 점 사이의 거리는 27이다.

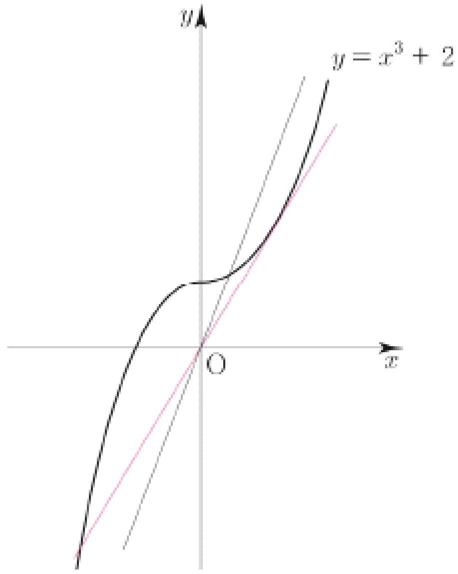
답 27

Theme 23 정점 Technique

77. 13

185

함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$



직선 $y=kx$가 함수 $y=x^3+2$의 그래프에 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하자.

$f'(t)=k \Rightarrow 3t^2=k$

$f(t)=kt \Rightarrow t^3+2=kt$

위 두 식을 연립하면

$t^3+2=(3t^2)t \Rightarrow 2=2t^3 \Rightarrow t=1$

$t=1$일 때, $k=3$이다.

$k<3$일 때, $f(k)=1$
$k=3$일 때, $f(3)=2$
$k>3$일 때, $f(k)=3$

이므로 $\sum_{k=1}^{6} f(k)=(1\times2)+2+(3\times3)=13$이다.

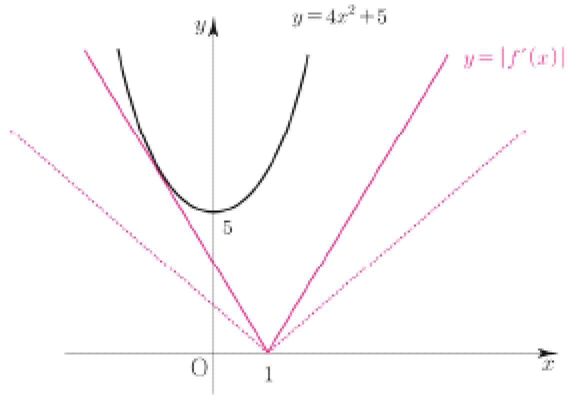
답 13

78. ②

189

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$
$y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로
$f(x)=a(x-1)^2+C$
$f'(x)=2a(x-1)$

모든 실수 x에서 $|f'(x)|\le 4x^2+5$이므로
$y=|f'(x)|$, $y=4x^2+5$의 그래프를 그리면



a의 최댓값을 구하는 것이므로 $a>0$일 때라고 가정하고 답을 구해보자.

$y=|2a(x-1)|$는 a에 관계없이 $(1,\ 0)$을 지나고
a가 커지면 커질수록 기울기가 가팔라진다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $|2a(x-1)|\le 4x^2+5$를
만족시키면서 실수 a가 최대일 때는
$y=-2a(x-1)$와 $y=4x^2+5$와 접할 때이다.

$g(x)=4x^2+5$라 하면
$g'(x)=8x$
접점의 x좌표를 t라 하면
$g'(t)=-2a \Rightarrow 8t=-2a \Rightarrow t=-\frac{1}{4}a$

$g(t)=-2a(t-1) \Rightarrow 4t^2+5=-2a(t-1)$
$\Rightarrow \frac{a^2}{4}+5=-2a\left(-\frac{1}{4}a-1\right)$
$\Rightarrow a^2+8a-20=0$
$\Rightarrow (a+10)(a-2)=0$
$\Rightarrow a=2\ (\because\ a>0)$

답 ②

조건을 만족시키는 실수 a의 범위를 구해보자.

① $a>0$일 때
$0<a\le2$이면 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a=0$일 때
$0\le 4x^2+5$이므로 마찬가지로 주어진 조건을 만족시킨다.

③ $a<0$일 때
포인트는 $a<0$일 때인데 $y=|2a(x-1)|$이므로
a의 절댓값만 같으면 $a<0$ 와 $a>0$는
서로 같은 그래프가 그려진다.

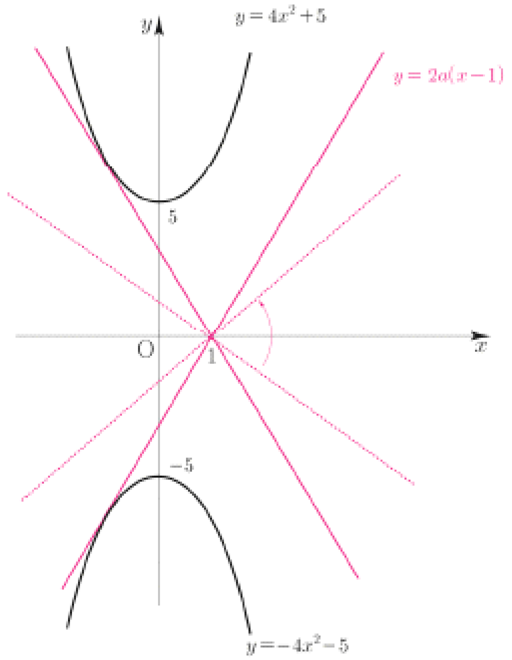
예를 들어
$a=1 \Rightarrow y=|2(x-1)|$
$a=-1 \Rightarrow y=|-2(x-1)|=|2(x-1)|$

즉, $a<0$일 때는 $-2\le a<0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 범위를 구하면
$-2\le a\le 2$이다.

다른 방법으로 구해보자.
$|f'(x)|\le 4x^2+5 \Rightarrow -4x^2-5\le f'(x)\le 4x^2+5$
$\Rightarrow -4x^2-5\le 2a(x-1)\le 4x^2+5$

직선 $y=2a(x-1)$는 a와 관계없이 항상 지나는 정점이
$(1,\ 0)$이고 기울기가 $2a$인 일차함수로 해석할 수 있다.
즉, 점 $(1,\ 0)$을 고정시켜 빙글빙글 돈다고 볼 수 있다.



a의 최대는 $a>0$일 때, $y=-4x^2-5$와 접할 때이고
a의 최소는 $a<0$일 때, $y=4x^2+5$와 접할 때이다.

첫 번째 풀이처럼 접점을 이용하여 풀어도 되고
이차함수이니 판별식으로 풀어도 된다.
이번에는 판별식으로 풀어보자.

① $a>0$일 때

$2a(x-1)=-4x^2-5$

$\Rightarrow 4x^2+2ax-2a+5=0$

$\frac{D}{4}=a^2+8a-20=0$

$\Rightarrow (a+10)(a-2)=0 \Rightarrow a=2$ ($\because$ $a>0$)

② $a<0$일 때

$2a(x-1)=4x^2+5$

$\Rightarrow 4x^2-2ax+2a+5=0$

$\frac{D}{4}=a^2-8a-20=0$

$\Rightarrow (a-10)(a+2)=0 \Rightarrow a=-2$ ($\because$ $a<0$)

따라서 조건을 만족시키는 a의 범위는 $-2 \le a \le 2$이다.

3. 적분

Theme 24 부정적분의 정의

79. ②

$F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

이고, $G(x)$가 $2f(x)+1$의 한 부정적분이므로

$G'(x)=2f(x)+1$

이때

$H(x)=G(x)-2F(x)$

라 하면

$H'(x)=G'(x)-2F'(x)$

$=2f(x)+1-2f(x)$

$=1$

이므로

$H(x)=x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, $G(3)=2F(3)$에서

$H(3)=G(3)-2F(3)=0$

이므로

$3+C=0$

즉 $C=-3$이므로

$H(x)=x-3$

따라서

$G(5)-2F(5)=H(5)$

$=5-3=2$

정답 ②

Theme 25 부정적분과 미분의 관계의 활용

80. 8

019

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$
양변을 x에 대해 미분하면
$2f(x)+xf'(x)=12x^2-6$

$f(x)=ax^n+\cdots$라 하면 좌변의 최고차항은
$(2a+na)x^n$ 이므로 $a=3,\ n=2$ 이다.

$f(x)=3x^2+bx+c$
$f'(x)=6x+b$
를 좌변에 대입하면

$2f(x)+xf'(x)=12x^2-6$
$12x^2+3bx+2c=12x^2-6$
$b=0,\ c=-3$

$f(x)=3x^2-3$
$F(x)=x^3-3x+C_1$

$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$에 $x=0$을 대입하면
$F(0)=2$이므로 $C_1=2$
$F(x)=x^3-3x+2$

이렇게 $F(x)$를 찾을 수도 있지만 Technical하게
풀어보자.

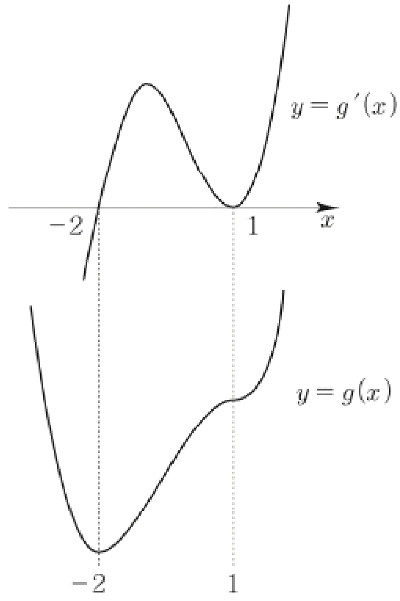
$F'(x)=f(x)$
$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$
$F(x)+xF'(x)=4x^3-6x+2$
$\{xF(x)\}'=4x^3-6x+2$
$xF(x)=x^4-3x^2+2x+C_2$
$F(x)$는 다항함수이므로 $C_2=0$이다.
$(\because xF(x)=x(ax^n+\cdots+p)=ax^{n+1}+\cdots+px)$

$xF(x)=x^4-3x^2+2x$
$F(x)=x^3-3x+2$

$g(x)=\int F(x)\,dx$
$g'(x)=F(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$

$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+C_3$

$g'(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면



$g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로
$g(-2)=0 \Rightarrow 4-6-4+C_3=0 \Rightarrow C_3=6$

$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+6$이므로
$g(2)=4-6+4+6=8$이다.

답 8

81. 7

101

다항함수 $f(x)$에 대하여

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

$$\int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$

양변을 x에 대해 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\} + \frac{x-1}{2}f'(x)$$

양변에 2를 곱하면

$$2f(x) = f(x) + f(1) + (x-1)f'(x)$$

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(x)$$

$f(x)$는 다항함수이므로

$f(x) = ax^n + \cdots$

① $n \geq 1$
$f(x) = f(1) + (x-1)f'(x)$
우변의 최고차항은 anx^n이므로
$n = 1$이다.

② $n = 0$ ($f(x)$가 상수함수)
$f(x) = a$
$a = a$이므로 (가)조건을 만족시킨다.

(나) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 5\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

만약 $f(x)$가 상수함수이면 $f(0) = 1$이므로
$f(x) = 1$이다.

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} 1dx = 2$$

$$5\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 5\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$f(x) = 1$이면 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 일차함수이므로
$f(x) = ax + b$

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2}(ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_{0}^{2}$$

$= 2a + 2b$

$$5\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 5\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)\,dx = 5\int_{-1}^{1} ax^2dx$$

$$= 10\int_{0}^{1} ax^2dx = 10\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1} = \frac{10}{3}a$$

$$2a + 2b = \frac{10}{3}a \Rightarrow b = \frac{2}{3}a$$

$$f(x) = ax + \frac{2}{3}a$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$f(x) = \frac{3}{2}x + 1$이므로 $f(4) = 7$이다.

답 7

Theme 26 부정적분과 함수의 연속성

82. ③

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = 2|x-1| + 3x^2$$

이고, $f(0) = 1$일 때, $f(-1) + f(2)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)$ $\begin{cases} (x \geq 1) & 2x-2+3x^2 \\ (x<1) & -2x+2+3x^2 \end{cases}$

$f(x)$ $\begin{cases} (x \geq 1) & x^3+x^2-2x+3 \\ (x<1) & x^3-x^2+2x+1 \end{cases}$

$f(-1) = -1-1-2+1$
$= -3$

$f(2) = 8+4-4+3$
$= 11$

83. 60

022

연속함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2 & (|x|<1)\\ 2 & (|x|>1)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2 & (x<-1)\\ -3x^2 & (-1<x<1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<-1)\\ -x^3+b & (-1\le x\le 1)\\ 2x+c & (x>1)\end{cases}$$

(등호는 어디에 붙든지 상관없다.)

$f(-2)=3 \Rightarrow -4+a=3 \Rightarrow a=7$

$x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1) \Rightarrow -2+a=1+b \Rightarrow b=4$

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow -1+b=2+c \Rightarrow c=1$

$$f(x)=\begin{cases}2x+7 & (x<-1)\\ -x^3+4 & (-1\le x\le 1)\\ 2x+1 & (x>1)\end{cases}$$

이므로 $f(-2)f(0)f(2)=3\times4\times5=60$이다.

답 60

Theme 27 구간에 따라 달라지는 정적분 계산

84. 29

034

$$\int_0^3 6x|x-1|\,dx$$

$f(x)=6x|x-1|$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}-6x^2+6x & (x<1)\\ 6x^2-6x & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$\int_0^3 6x|x-1|\,dx=\int_0^1(-6x^2+6x)dx+\int_1^3(6x^2-6x)dx$$

$=[-2x^3+3x^2]_0^1+[2x^3-3x^2]_1^3=1+27-(-1)=29$

답 29

Theme 28 정적분의 성질

85. 44

030

$\int_1^3 f(x)dx=-1$, $\int_1^3 \{f(x)\}^2dx=4$

$$\int_1^3\{3f(x)-1\}^2=\int_1^3\{9\{f(x)\}^2-6f(x)+1\}dx$$

$$=9\int_1^3\{f(x)\}^2dx-6\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 1dx$$

$=9\times4-6\times(-1)+[x]_1^3=36+6+2=44$

답 44

Theme 29 우함수, 기함수, 주기함수의 정적분

86. ①

089

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$
$h(x)=f(x)g(x)$

$f(x)$는 기함수이고 $g(x)$는 우함수이므로
$h(x)$는 기함수이다.

$h'(x)$는 우함수이므로 $xh'(x)$는 기함수이다.

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)\,dx=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$

$$=10\int_{0}^{3}h'(x)dx=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$$\Rightarrow h(3)-h(0)=1$$

$f(-x)=-f(x)$
양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0) \Rightarrow f(0)=0$

$h(0)=f(0)g(0)=0$이므로 $h(3)=1$이다.

답 ①

87. ②

097

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

$$g(x)=\begin{cases}-f(x+1)+1 & (-1<x<0)\\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이므로

$$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}f(x+1)dx+1$$
$$=-\int_{0}^{1}f(x)dx+1$$
$$=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

$g(x+2)=g(x)$이므로

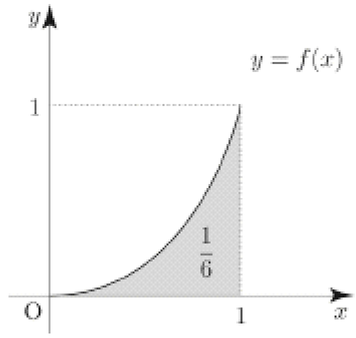
$$\int_{-3}^{2}g(x)dx=\int_{-3}^{-1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{1}^{2}g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{-1}^{0}g(x)dx$$
$$=1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

따라서 $\int_{-3}^{2}g(x)dx=\frac{17}{6}$이다.

답 ②

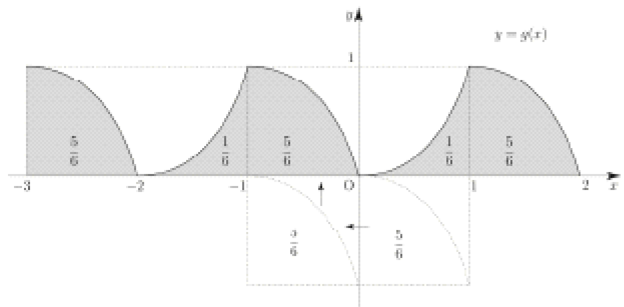
이번에는 실전적으로 풀어보자.

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$를 만족시키는 함수를 설정하면 다음과 같다.



함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

$g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 $g(x)$를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $\int_{-3}^{2}g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$이다.

Theme 30 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간이 상수인 경우

88. 4

047

$f(x)=12x^2+\int_0^1(6x+t)f(t)\,dt$

$f(x)=12x^2+6x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=a,\ \int_0^1 tf(t)dt=b$라 하면

$f(x)=12x^2+6ax+b$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(12x^2+6ax+b)dx=\left[4x^3+3ax^2+bx\right]_0^1$

$=4+3a+b$

$=a$

$\Rightarrow 2a+b=-4 \ \cdots$ ㉠

$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(12x^3+6ax^2+bx)dx$

$=\left[3x^4+2ax^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1$

$=3+2a+\frac{b}{2}$

$=b$

$\Rightarrow 4a-b=-6 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하면 $a=-\frac{5}{3},\ b=-\frac{2}{3}$

$f(x)=12x^2-10x-\frac{2}{3}$이므로

$\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^2=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=(-2)^2=4$이다.

답 4

89. ③

086

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$라 하면

(가) 조건에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$

$g(0)=C$

$\int_0^1 g(t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+at^2+Ct\right]_0^1=\frac{1}{3}+a+C=a$

$\Rightarrow C=-\frac{1}{3}$

이므로 (나) 조건에서

$g(0)-\int_0^1 g(t)dt=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)-\left\{\frac{1}{3}+a+\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow a=-1$

$g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$ 이므로 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$이다.

답 ③

Theme 31 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간에 변수가 있는 경우

90. ④

098

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt \quad \cdots \quad ㉠$$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a=2+4a$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$0=3a+\int_1^0 f(t)dt$$

$$\Rightarrow 0=3a-\int_0^1 f(t)dt \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt=3a$$

$$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$$

$\Rightarrow 2+4a=3a \Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow f(1)=\int_0^1 f(t)dt=-6,$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$\Rightarrow xf'(x)=6x^2-4x$

$\Rightarrow f'(x)=6x-4$

$f(x)=3x^2-4x+c$

$f(1)=-6$이므로 $3-4+c=-6 \Rightarrow c=-5$

$f(x)=3x^2-4x-5$

따라서 $a+f(3)=-2+(27-12-5)=8$이다.

답 ④

91. ⑤

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-1}^{x} xf(t)dt-\int_{-1}^{x} tf(t)dt=x^3+(a+1)x^2-a$$

를 만족시킬 때, $\int_{-a}^{a}\{f(x)\}^2dx$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$x\int_{-1}^{x} f(t)dt-\int_{-1}^{x} tf(t)dt=x^3+(a+1)x^2-a$

미분

$\int_{-1}^{x} f(t)dt = 3x^2+2(a+1)x$

$x=-1$ 대입 $\Rightarrow 0=3-2a-2 \rightarrow a=\frac{1}{2}$

미분 $f(x)=6x+3$

$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 36x^2+36x+9\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} 36x^2+9\,dx$

$=2\left[12x^3+9x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=2\left(\frac{12}{8}+\frac{9}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\right)=12.$

$\frac{12}{2}$

3 / 20

92. 10

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에 $x=1$을 대입하면
$0=f(1)-3$
이므로
$f(1)=3$ $\cdots\cdots$ ㉠
조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$
이고, $f(x)$는 다항함수이므로
$f'(x)=4$
즉,
$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)
로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서
$f(1)=3$
이므로
$f(1)=4+C_1=3$
$C_1=-1$
즉, $f(x)=4x-1$이므로
$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)
한편, 조건 (나)에서
$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면
$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분상수)
로 놓을 수 있다.
이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.
$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)
로 놓으면
$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)$
$\quad=2x^4+x^3+x+C_3$
양변의 x^3의 계수를 비교하면
$2a-1=1$
즉, $a=1$이므로
$G(x)=x^2+x+b$
따라서
$$\int_1^3 g(x)dx=\Big[G(x)\Big]_1^3$$
$$=G(3)-G(1)$$
$$=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)$$
$$=10$$

정답 10

93. ①

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :
조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면
$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$
$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로
㉠에 대입하면
$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$
$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$
$$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$$
$$=4x^3+12x^2-6x+C$$
(단, C는 적분상수)
이때 $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$
즉 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로
$g(x)=4x^2+12x-6$
따라서
$$\int_0^3 g(x)dx$$
$$=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$
$$=36+54-18$$
$$=72$$

정답 ①

Theme 32 정적분으로 정의된 함수 -New 함수

94. 17

056

$f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt$

양변에 $x=\sqrt{2}$을 대입하면

$f(\sqrt{2})=0$

양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)=3|x|-x$

$$f'(x)=\begin{cases}-4x & (x<0)\\ 2x & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+a & (x<0)\\ x^2+b & (x\geq 0)\end{cases}$$

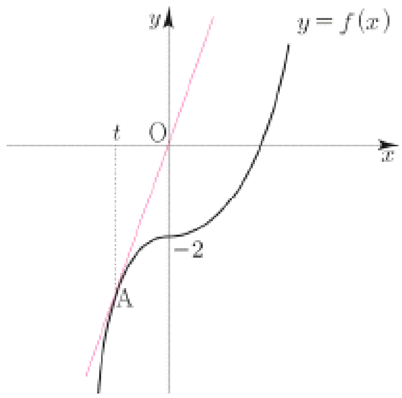
$f(\sqrt{2})=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0) \Rightarrow a=b \Rightarrow a=-2$

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2-2 & (x<0)\\ x^2-2 & (x\geq 0)\end{cases}$$



원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때,

접점을 A라고 하자.

접점의 x좌표를 $t\,(t<0)$라 하면 접선의 방정식은

$y=-4t(x-t)-2t^2-2$

접선이 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=2t^2-2 \Rightarrow t=-1\ (\because t<0)$

$\mathrm{A}(-1,\ -4)$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}^2=1+16=17$이다.

답 17

이번에는 범위를 나누어서 직접 정적분의 값을 구해보자.

$g(t)=3|t|-t$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}-4t & (t<0)\\ 2t & (t\geq 0)\end{cases}$$

$f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt=\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt$의 값을 구하기 위해서

x의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $x\geq 0$일 때

$$\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt=\int_{\sqrt{2}}^{x}2t\,dt=x^2-2$$

② $x<0$일 때

$$\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt=\int_{\sqrt{2}}^{0}2t\,dt+\int_{0}^{x}(-4t)\,dt$$

$$=-2+(-2x^2)=-2x^2-2$$

①, ②에 의하여 $f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt=\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt$는

다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2-2 & (x<0) \\ x^2-2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

Tip 첫 번째 풀이와 같이 $f'(x)$를 구한 후 부정적분과 연속 조건을 이용하여 $f(x)$를 구하는 방법도 있고, 두 번째 풀이와 같이 범위를 구분하여 직접 정적분의 값을 구하는 방법도 있다.
후자의 경우 범위에 따라 적분해야 하는 함수가 바뀌기 때문에 실수하기 쉽다는 단점이 있다.
특히, ② $x<0$인 경우와 같이 적분구간 안에 적분해야 하는 함수가 달라지는 경우에는 구간을 나누어 적분해야 하기에 실수하기 더욱 쉽다.
따라서 첫 번째 풀이처럼 미분한 뒤 $f'(x)$로 부터 $f(x)$를 구하는 방식이 효율적이다.

95. ②

095

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여

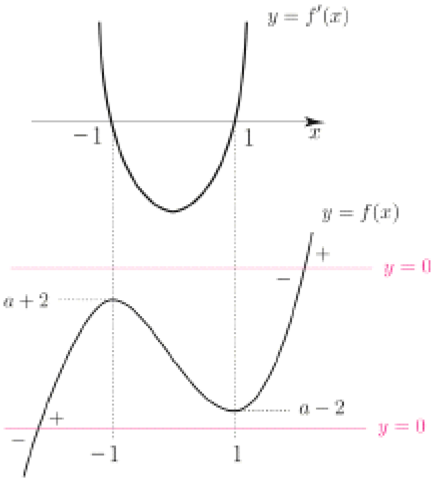
$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

$F(0)=0,\ F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면
$f(x)$의 부호변화가 오직 한 번만 존재해야 한다.

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$
$f(-1)=a+2,\ f(1)=a-2$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(x)$의 부호변화가 오직 한 번만 존재해야 하므로
$a+2\le 0$ or $a-2\ge 0 \Rightarrow a\le -2$ or $a\ge 2$
따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

Tip 만약 문제에서 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 것이 아니라 극댓값을 갖도록 하는 것이라면 $f(x)$의 $+\ -$로 부호변화가 존재해야 하므로 $a-2<0<a+2 \Rightarrow -2<a<2$이다.
단순히 극값이 아니라 극댓값 또는 극솟값을 물어볼 경우 $-\ +$인지 또는 $+\ -$인지 도함수의 부호변화에 유의해서 판단해야 한다.

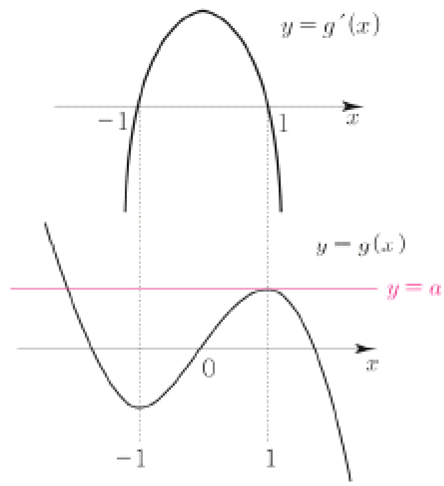
이번에는 사차함수의 성질을 바탕으로 풀어보자.

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면
방정식 $F'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지지 않아야 한다. (Guide step 도함수의 활용 - 사차함수 심화특강 참고하도록 하자. 머릿속에서 사차함수 개형이 떠올라야 한다.)

$F'(x)=0$
$x^3-3x+a=0$
$a=-x^3+3x$

방정식 $a=-x^3+3x$이 서로 다른 세 실근을 가지지 않아야 하므로 곡선 $y=-x^3+3x$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나지 않아야 한다.
$g(x)=-x^3+3x$라 하면
$g'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$
$g(-1)=-2,\ g(0)=0,\ g(1)=2$

$g'(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면



따라서 양수 a의 최솟값은 $g(1)=2$이다.

96. 8

103

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

의 양변을 미분하면

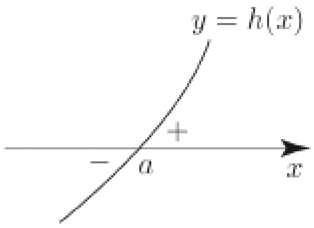
$$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(t)\}^5-\{f(t)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$

$h(x)=\int_a^x\{f(t)\}^4dt$ 라 하면

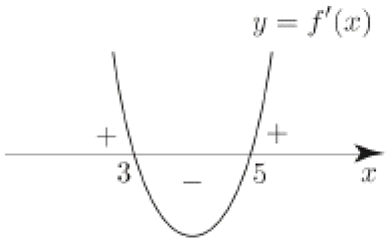
$h(a)=0,\quad h'(x)=\{f(x)\}^4\ \geq 0$

$h(x)$는 증가함수이므로 아래 그림과 같다.



$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x^2-8x+15)$

$=3(x-3)(x-5)$



$g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$g'(x)=f'(x)h(x)$의 부호변화가 한 번만 있어야 하므로

$a=3$ or $a=5$이어야 한다.

따라서 모든 a의 값의 합은 8이다.

답 8

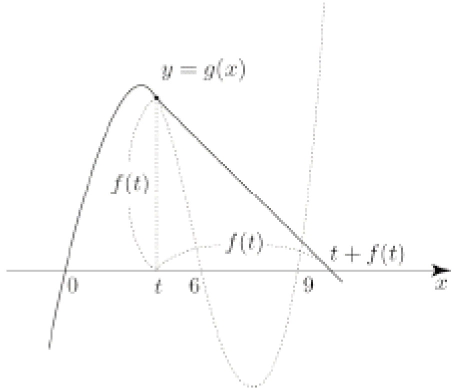
Tip 비주얼 때문에 쫄지 말자! 한 번 해본다는 마인드로 문제를 풀어보자!

97. ③

090

함수 $g(x)$는 $x\geq t$일 때, 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이고, x절편은 $t+f(t)$이다.

$(0<t<6$에서 $f(t)>0$이므로 $t+f(t)>0)$



함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$S'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{1+f'(t)\}$

$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$0<t<6$에서 $f(t)>0$이므로

semi $S'(t)=1+f'(t)$이다.

$$1+f'(t)=1+\frac{1}{9}(3t^2-30t+54)=\frac{1}{3}(t-3)(t-7)$$

이므로 $S(t)$는 $0<t<6$에서 $t=3$에서 최댓값을 갖는다.

$$S(3)=\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)dx+18$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$$

$$=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은 $\frac{129}{4}$이다.

답 ③

98. ②

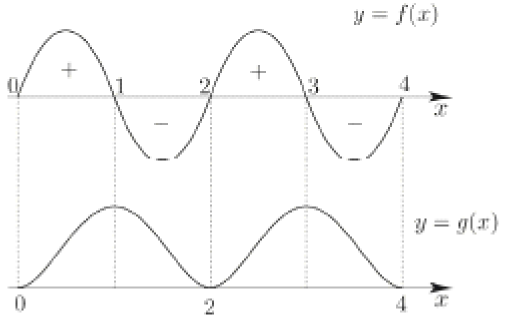
116

$n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이므로
$n-1 \le x < n$일 때, $f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$ 또는
$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$ 이다.

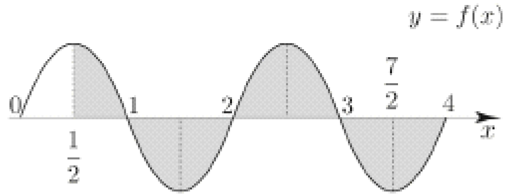
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt$$
$$= F(x) - f(0) - F(4) + F(x)$$
$$= 2F(x) - F(0) - F(4)$$

이므로 $g'(x) = 2f(x)$이다.

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수이므로
$x=2$에서 최솟값 0을 가지려면 $x=2$에서 극솟값 0을
가져야 하므로
$g'(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 0$
$g(2) = 0 \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$
조건을 만족시키려면 $f(x)$가 다음과 같아야 한다.



넓이의 관점에서 대칭성을 활용해보자.



따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx = \int_{\frac{7}{2}}^4 f(x)dx$$
$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$
$$= -\frac{|6|}{6}(1-0)^3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

이다.

답 ②

Theme 33 함수의 추론과 정적분

99. 110

104

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) = x$
$\Rightarrow f(0) = 0,\ f(1) = 1$

(나) 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$

$f(x+1) = xf(x) + ax + b$
양변에 0을 대입하면
$f(1) = b \Rightarrow b = 1$

$x+1 = t$라 하면
$f(t) = (t-1)f(t-1) + a(t-1) + 1 \ (1 \le t \le 2)$
$t-1$은 $0 \le t-1 \le 1$이므로 (가) 조건에 의해
$1 \le t \le 2$에서
$f(t) = (t-1)(t-1) + a(t-1) + 1$
$$= t^2 - 2t + 1 + at - a + 1$$
$$= t^2 + (a-2)t - a + 2$$

이를 바탕으로 $0 \le x \le 2$에서 $f(x)$를 구하면

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le 1) \\ x^2 + (a-2)x - a + 2 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x=1$에서 미분가능해야 한다.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1,\ \lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2 + a - 2 = a$$
$\Rightarrow a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le 1) \\ x^2 - x + 1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

이므로

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2-x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}-2+2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$$

따라서 $60\times\int_1^2 f(x)dx = 60\times\frac{11}{6}=110$이다.

답 110

Theme 34 정적분으로 정의된 함수의 빼기함수 Technique

100. 13

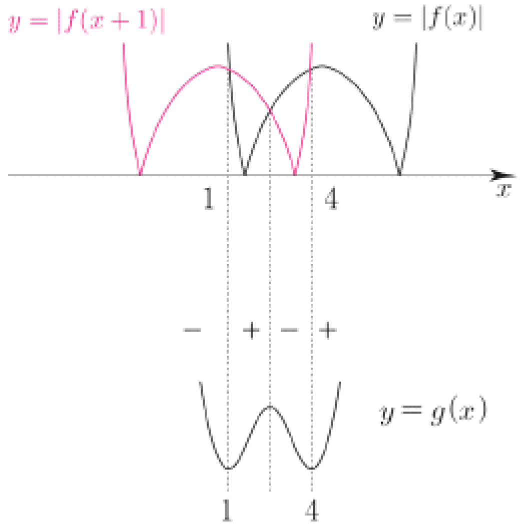
107

빼기함수 Technique을 활용하여 구해보자.

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt \Rightarrow g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

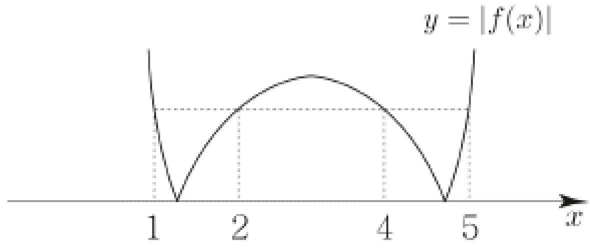
$y=|f(x+1)|$의 그래프는 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시켜 그릴 수 있다.

함수 $g(x)$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이므로 다음 그림과 같다.



$g'(1)=0 \Rightarrow |f(2)|=|f(1)| \Rightarrow f(1)=-f(2)$

$g'(4)=0 \Rightarrow |f(5)|=|f(4)| \Rightarrow -f(4)=f(5)$



$f(x)=2x^2+ax+b$라 하면

$f(1)=-f(2) \Rightarrow 2+a+b=-8-2a-b$

$\Rightarrow 3a+2b=-10 \cdots$ ㉠

$-f(4)=f(5) \Rightarrow -32-4a-b=50+5a+b$

$\Rightarrow -9a-2b=82 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a=-12$, $b=13$이므로

$f(x)=2x^2-12x+13$이다.

따라서 $f(0)=13$이다.

답 13

101. 43

119

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0\le x<4) \\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$$

$g(a)=\int_a^{a+4} f(x)dx$라 하면

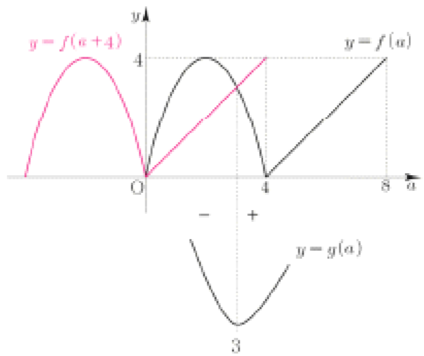
$g(a)=F(a+4)-F(a)$

양변을 a에 대해 미분하면

$g'(a)=f(a+4)-f(a)$

$y=f(a+4)$의 그래프는 $y=f(a)$의 그래프를 a축 방향으로 -4만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

빼기함수 Technique을 사용하여 $g(a)$를 그려보자.



두 곡선 $y=f(a+4)$, $y=f(a)$는 $a=3$에서 만난다.
$(\because a=-a(a-4) \Rightarrow a=0 \text{ or } a=3)$
$0 \le a \le 4$에서 $g(a)$는 $a=3$에서 최솟값을 가지므로

$$g(3)=\int_3^7 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$

$$=\int_3^4(-x^2+4x)dx+\int_4^7(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^7=\frac{37}{6}$$

따라서 $p+q=43$이다.

답 43

직접 $\int_a^{a+4} f(x)dx$를 구해서 풀어보자.

$$\int_a^{a+4} f(x)dx=\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4} f(x)dx$$

$$=\int_a^4(-x^2+4x)dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$라 하면
$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$이므로
$0 \le a \le 4$일 때, $g(a)$는 $a=3$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $g(3)=\frac{37}{6}$이다.

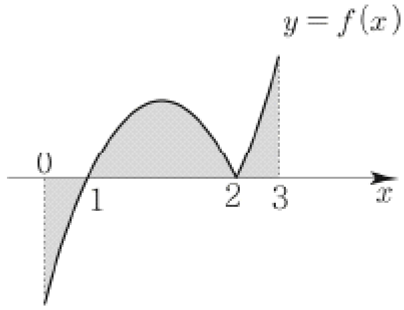
Theme 35 곡선과 x축 사이의 넓이

102. 22

006

$f(x)=(x-1)|x-2|$

$$f(x)=\begin{cases} -(x-1)(x-2) & (x<2) \\ (x-1)(x-2) & (x \ge 2) \end{cases}$$



$$\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$

대칭성에 의해서 $\int_0^1 -f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx$이므로

$$\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+2\int_2^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 -(x-1)(x-2)dx+2\int_2^3 (x-1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2-1)^3+2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{10}{6}=\frac{11}{6}=k$$

따라서 $12k=22$이다.

답 22

103. 13

007

$$\int_{-4}^1\{2f(x)+|f(x)|-3\}dx$$

$$=2\int_{-4}^1 f(x)dx+\int_{-4}^1|f(x)|dx-\int_{-4}^1 3dx$$

$$=2(\mathrm{A}-\mathrm{B})+(\mathrm{A}+\mathrm{B})-15$$

$$=2(10-2)+(10+2)-15$$

$$=16+12-15=13$$

답 13

104. ②

054

(A의 넓이) − (B의 넓이) = 3이므로

$\int_0^3 f(x)dx = 3$ 이어야 한다.

(위 풀이가 이해가 잘되지 않는다면 Guide Step에서 개념 파악하기 (4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?를 참고하도록 하자.)

$f(x) = kx(x-2)(x-3) = k(x^3 - 5x^2 + 6x)$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 k(x^3 - 5x^2 + 6x)dx$$

$$= k\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3$$

$$= k\left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right) = \frac{9}{4}k = 3$$

따라서 $k = \frac{4}{3}$이다.

답 ②

105. ④

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :
함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y = f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.
이때 $A = 2B$이므로

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6)dx = 0$$

이어야 한다. 즉,

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_0^k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6) = 0$$

$k > 4$이므로 $k = 6$

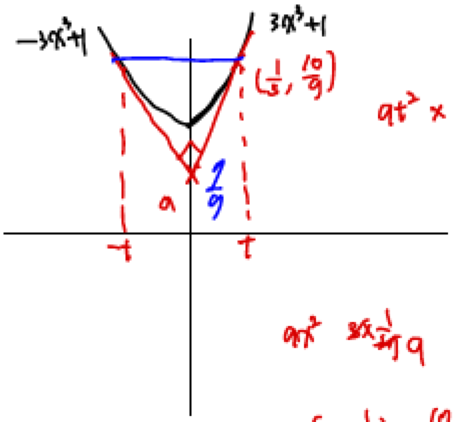
정답 ④

Theme 36 곡선과 직선 사이의 넓이

106. 10

19. 점 A(0, a)에서 곡선 $y = 3|x|^3 + 1$에 그은 두 접선이 서로 수직이고, 두 접선의 접점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

10



$9t^2 \times -9t^2 = -1$

$t^4 = \frac{1}{81}$

$t = \frac{1}{3}$

$y = \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{10}{9} = x + \frac{7}{9}$

$a = \frac{7}{9}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$

N

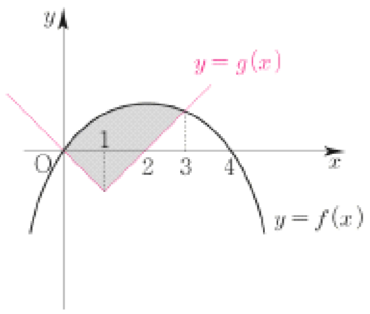
$\therefore$ 10

107. 14

054

$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2 \Rightarrow x=3\ (\because x>2)$



$$S=\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(-x)\right\}dx$$

$$+\int_1^3\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(x-2)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3=\frac{7}{2}$$

따라서 $4S=14$이다.

답 14

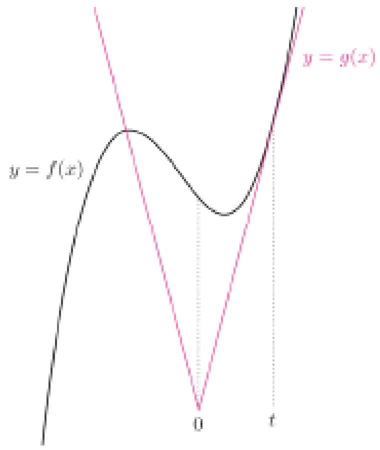
108. 80

073

$f(x)=x^3+x^2-x$

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이므로 다음 그림과 같아야 한다.



직선 $y=4x+k$이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때,

접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=4t+k \Rightarrow t^3+t^2-t=4t+k$

$\Rightarrow t^3+t^2-5t=k$ ⋯ ㉠

$f'(t)=4 \Rightarrow 3t^2+2t-1=4 \Rightarrow (3t+5)(t-1)=0$

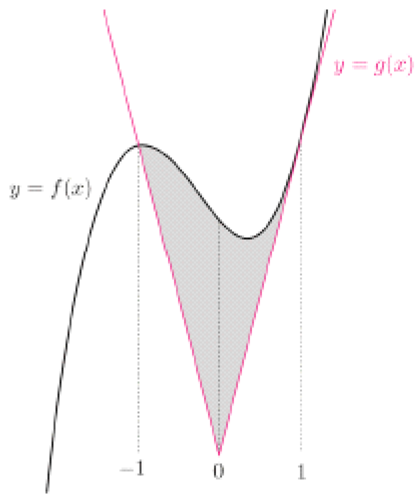
$\Rightarrow t=1\ (\because\ t>0)$

㉠에 $t=1$을 대입하면 $1+1-5=k \Rightarrow k=-3$이다.

$-4x-3=x^3+x^2-x \Rightarrow x^3+x^2+3x+3=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2+3)=0 \Rightarrow x=-1$

이므로 직선 $y=-4x-3$과 곡선 $y=f(x)$는 $(-1,\ f(-1))$에서 교점을 가진다.



$$S=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{x^3+x^2-x-(-4x-3)\}dx$$

$$+\int_{0}^{1}\{x^3+x^2-x-(4x-3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+3+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3$$

$$=\frac{8}{3}$$

따라서 $30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$이다.

답 80

109. ③

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$라 하고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$A=\int_{0}^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$B=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

따라서

$B-A$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_{0}^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_{0}^{2}$$

$$=1+1-2m-4$$

$$=-2m-2=\frac{2}{3}$$

따라서 $m=-\frac{4}{3}$

정답 ③

110. ④

13. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에서

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)

가 성립해야 하므로

$$\int_{0}^{k}\left\{(3x^2-7x+2)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\right\}dx=0$$

$$\int_{0}^{k}\left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx=0$$

$$\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_{0}^{k}=0$$

$$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$$

$$3k^3-11k^2+8k=0$$

$$k(k-1)(3k-8)=0$$

이때 $k>2$ 이므로 $k=\frac{8}{3}$

정답 ④

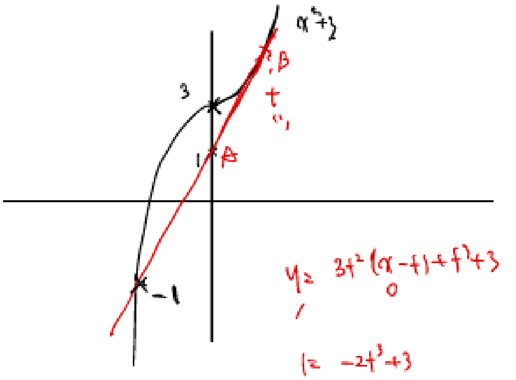
111. ⑤

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3 & (x \ge 0) \\ -5x^2+3 & (x<0) \end{cases}$$

에 대하여 A(0, 1)에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때, 접점을 B라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{23}{12}$ ② $\frac{25}{12}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{31}{12}$



$y=3t^2(x-t)+t^3+3$

$1=-2t^3+3$

$-2=-2t^3$

$t=1$

$y=3(x-1)+4$

$y=3x+1$

$-5x^2+3=3x+1$

$5x^2+3x-2=0$

$5x \quad -2$

$x \quad +1$

$x=-1$

$$\int_{-1}^{0} -5x^2+3-(3x+1)\,dx+\int_0^1 x^3+3-(3x+1)\,dx$$

$-5x^2-3x+2$ $\qquad$ x^3-3x+2

$\left[-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}$ $\qquad$ $\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1$

$-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-2\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)$

$-\frac{5}{3}+\cancel{\frac{3}{2}}+2+\frac{1}{4}-\cancel{\frac{3}{2}}+2$

$\frac{-20+3}{12}+4=\frac{-17+48}{12}=\frac{31}{12}$

4 / 20

12. 모

조건

(가

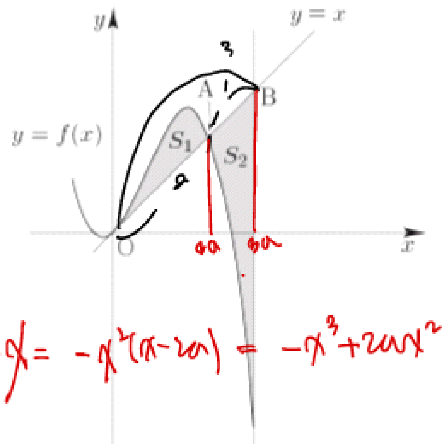
(나

①

112. ①

13. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 원점 O에서 접하고 x좌표가 양수인 점 A에서 만난다. 선분 OA를 $3:1$로 외분하는 점을 B라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선과 곡선 $y=f(x)$ 및 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $S_2-S_1=\frac{9}{4}$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$



$f(x)-x=-x^2(x-2a)=-x^3+2ax^2$

$$\int_0^{3a} f(x)-x\,dx=S_1-S_2=-\frac{9}{4}$$

$$\int_0^{3a} x^3-2ax^2\,dx=\frac{9}{4}$$

$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2ax^3}{3}\right]_0^{3a}$

$\frac{81a^4}{4}-\frac{2a}{3}\times 27a^3$

$\frac{81}{4}a^4-\frac{54}{3}a^4=\frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}a^4-\frac{6}{3}a^4=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}a^4=\frac{1}{4}$

$a^4=1$

$a=1$

$\therefore f(x)=-x^3+2x^2+x$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{8}$

5 / 20

113. ④

13. [출제의도] 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x(x-a)(x-a-1)$ 이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표는

$x(x-a)(x-a-1)=2x$ 에서

$x(x-a+1)(x-a-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=a-1$ 또는 $x=a+2$

$a>1$, $\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$ 이므로 점 P의 좌표는 $(a-1,\ 2a-2)$

점 Q의 좌표는 $(a+2,\ 2a+4)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{5(a+2)^2}=5\sqrt{5}$ 이므로 $a=3$

$\mathrm{P}(2,\ 4)$, $\mathrm{Q}(5,\ 10)$이고 $f(x)=x^3-7x^2+12x$

$$A=\int_0^2 2x\,dx+\int_2^3 (x^3-7x^2+12x)\,dx$$

$$B=\int_3^4 \{-(x^3-7x^2+12x)\}\,dx$$

$$A-B=\int_0^2 2x\,dx+\int_2^4 (x^3-7x^2+12x)\,dx$$

$$=\Big[x^2\Big]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_2^4=\frac{16}{3}$$

Theme 37 두 곡선 사이의 넓이

114. 4

19. 출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

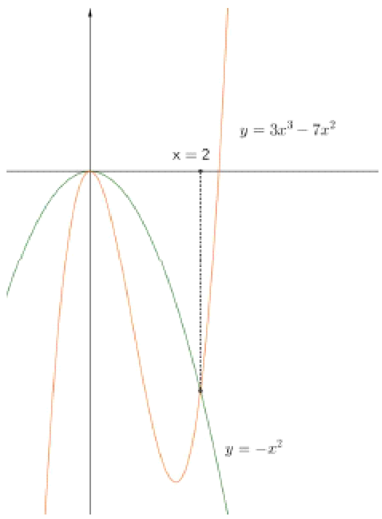
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$

$=(-12+16)-0$

$=4$

정답 4

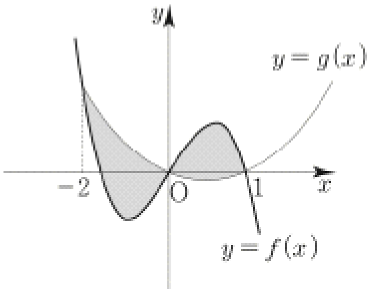
115. 49

017

$f(x) = -x^3 + x$, $g(x) = x^2 - x$

$-x^3 + x = x^2 - x \Rightarrow x(x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -2$ or $x = 0$ or $x = 1$



둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{-2}^{0} \{g(x) - f(x)\}dx + \int_{0}^{1} \{f(x) - g(x)\}dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \{(x^2 - x) - (-x^3 + x)\}dx$$

$$+ \int_{0}^{1} \{(-x^3 + x) - (x^2 - x)\}dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{37}{12} = \frac{q}{p}$$

따라서 $p + q = 49$이다.

답 49

116. ④

071

두 곡선 $y = x^3 + x^2$, $y = -x^2 + k$와 $x = 2$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하면

$$\int_{0}^{2} (-x^2 + k)dx = A + C, \int_{0}^{2} (x^3 + x^2)dx = B + C$$

이고, $A = B$이므로 두 식을 빼면

$$\int_{0}^{2} (-x^2 + k - x^3 - x^2)dx = 0 \Rightarrow \int_{0}^{2} (-x^3 - 2x^2 + k)dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + kx\right]_{0}^{2} = 0 \Rightarrow 2k = \frac{28}{3} \Rightarrow k = \frac{14}{3}$$

따라서 상수 $k = \frac{14}{3}$이다.

답 ④

Theme 38 넓이의 분할

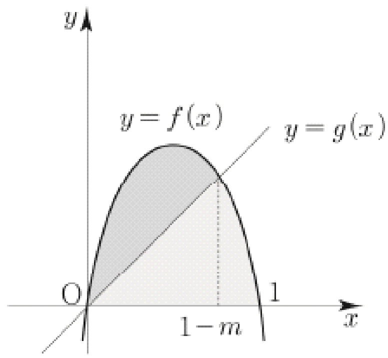
117. 2

025

$f(x) = -x^2 + x = -x(x-1)$, $g(x) = mx$

$-x^2 + x = mx \Rightarrow x(x+m-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ or $x = 1 - m$



$$\int_{0}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1-m} \{f(x) - g(x)\}dx$$

$$\frac{1}{6}(1-0)^3 = 2 \times \frac{1}{6}(1-m-0)^3$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}(1-m)^3$$

$$\frac{1}{2} = (1-m)^3$$

따라서 $4(1-m)^3 = 2$이다.

답 2

118. ①

049

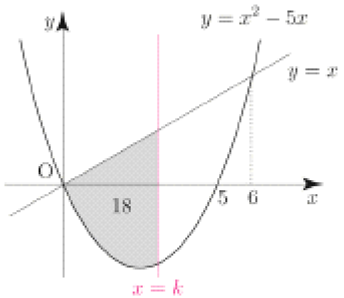
$x^2-5x=x \Rightarrow x(x-6)=0 \Rightarrow x=0$ or $x=6$이므로

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 0, 6

이므로 둘러싸인 부분의 넓이는 넓이공식에 의해

$\frac{|1|}{6}(6-0)^3=36$이다.

(물론 $\int_0^6\{x-(x^2-5x)\}dx$로 구해도 된다.)



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를

직선 $x=k$가 이등분하므로

$$\int_0^k\{x-(x^2-5x)\}dx=18$$

$$\Rightarrow \int_0^k(-x^2+6x)dx=18$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^k=-\frac{1}{3}k^3+3k^2=18$$

$\Rightarrow k^3-9k^2+54=0$

$\Rightarrow (k-3)(k^2-6k-18)=0$

$\Rightarrow k=3$ or $k=3\pm3\sqrt{3}$

$\Rightarrow k=3$ ($\because$ $0<k<5$)

따라서 상수 $k=3$이다.

답 ①

Theme 39 역함수의 그래프와 넓이

119. 10

028

$f(x)=x^3-2x^2+2x$

$f'(x)=3x^2-4x+2 \geq 0$

$f(x)$는 증가함수이므로 $f(x)$와 역함수 $g(x)$의

그래프의 교점은 반드시 $y=x$선상에 존재한다.

(함수의 연속 Master step 64번 해설 tip 참고)

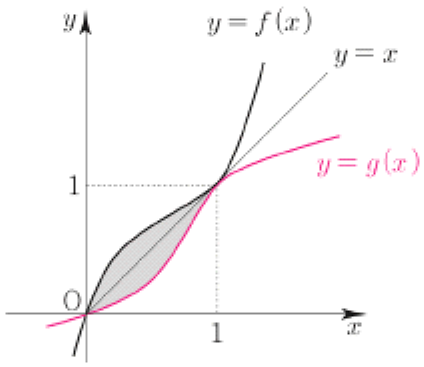
$x^3-2x^2+2x=x \Rightarrow x(x-1)^2=0$

$\Rightarrow x=0$ or $x=1$

($x=1$에서 중근을 가지므로 곡선 $y=f(x)$는

직선 $y=x$와 (1, 1)에서 접한다.)

즉, (0, 0), (1, 1)에서 만난다.



$$k=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_0^1\{f(x)-x\}dx$$

$$=2\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}$$

따라서 $60k=10$이다.

답 10

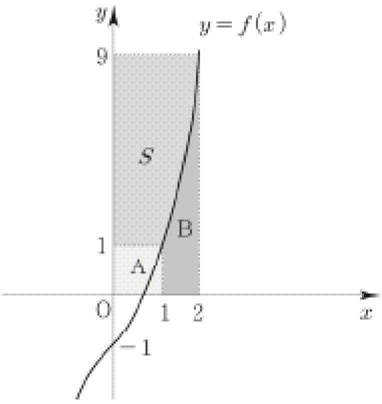
120. ③

058

$f(x)=x^3+x-1$

$f(1)=1,\ f(2)=9$

$\int_1^9 g(x)dx=S$라 하면



$\mathrm{A}=1\times1=1$

$\mathrm{B}=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^3+x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2=\frac{17}{4}$

큰 직사각형의 넓이 $=2\times9=18$

큰 직사각형의 넓이 $-(\mathrm{A}+\mathrm{B})=S$이므로

$18-\left(1+\frac{17}{4}\right)=\frac{68}{4}-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}=S$

답 ③

Theme 40 속도와 거리

121. 6

043

$v(t)=3t^2-4t+k$

$x(t)=t^3-2t^2+kt$ ($\because\ x(0)=0$)

$x(1)=-3 \Rightarrow -1+k=-3 \Rightarrow k=-2$

$x(t)=t^3-2t^2-2t$이므로

$x(3)=27-18-6=3$이다.

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지의 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3 v(t)dt=x(3)-x(1)=3-(-3)=6$이다.

답 6

122. ③

050

$v(t)=-4t^3+12t^2$

$v'(t)=-12t^2+24t$

$v'(k)=12 \Rightarrow -12k^2+24k=12 \Rightarrow k^2-2k+1=0$

$\Rightarrow (k-1)^2=0 \Rightarrow k=1$

닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 $v(t)=-4t^2(t-3)<0$이므로

$|v(t)|=-v(t)$이다.

따라서 시각 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_3^4|v(t)|dt=\int_3^4-v(t)dt$

$=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt$

$=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$

$=0-(81-108)=27$

이다.

답 ③

123. ⑤

088

$v_1(t)=3t^2+4t-7,\ v_2(t)=2t+4$

$x_1(0)=1,\ x_2(0)=8$이므로

$x_1(x)=t^3+2t^2-7t+1,\ x_2(t)=t^2+4t+8$

점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=|t^3+2t^2-7t+1-(t^2+4t+8)|$

$=|t^3+t^2-11t-7|$

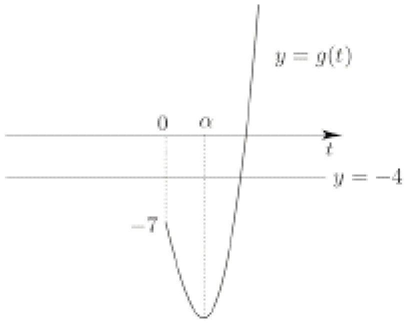
$g(t)=t^3+t^2-11t-7$이라 하면

$g'(t)=3t^2+2t-11$

$g'(t)=0 \Rightarrow t=\frac{-1-\sqrt{34}}{3}$ or $t=\frac{-1+\sqrt{34}}{3}$

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{34}}{3}$ 라 하자.

이를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$f(t)=4$를 만족시키는 양수 t의 최솟값은
$g(t)=-4$를 만족시키는 양수 t와 같다.

$g(t)=-4 \Rightarrow t^3+t^2-11t-7=-4$

$\Rightarrow t^3+t^2-11t-3=0$

$\Rightarrow (t-3)(t^2+4t+1)=0$

$\Rightarrow t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 S라 하면

$$S=\int_0^3 |v_1(t)|dt=\int_0^3 |3t^2+4t-7|dt$$

$$=\int_0^1(-3t^2-4t+7)dx+\int_1^3(3t^2+4t-7)dt$$

$$=\left[-t^3-2t^2+7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$

$$=4+28=32$$

이다.

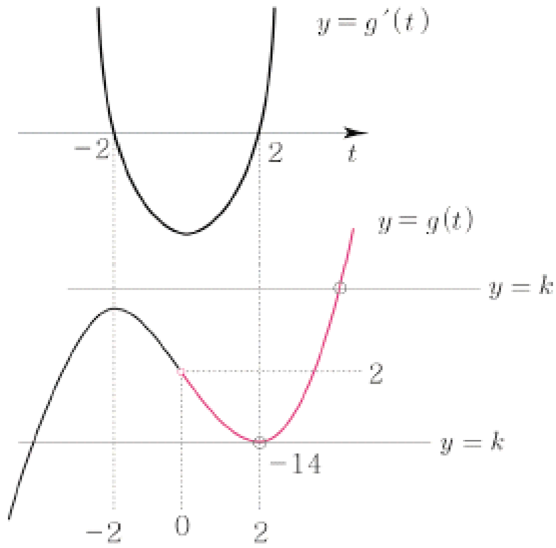
답 ⑤

124. ⑤

037

$x_1(t)=t^3-4t+2,\ x_2(t)=8t+k$

두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 한번만 만나야 하므로
$t^3-4t+2=8t+k \Rightarrow t^3-12t+2=k\ (t>0)$
방정식 $t^3-12t+2=k\ (t>0)$의 서로 다른 양근의 개수가 1이어야 한다.
$g(t)=t^3-12t+2$라 하면
$g'(t)=3t^2-12=3(t-2)(t+2)$



시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는
$\int_0^a |3t^2-4|dt$ 이므로 a가 최소일 때, 움직인 거리가 최소이다.

조건을 만족시키는 k의 범위는 $k=-14$ or $k \geq 2$이므로
a의 최솟값은 2이다.

$$\int_0^2 |3t^2-4|dt=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(-3t^2+4)dt+\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2(3t^2-4)dt$$

$$=\frac{32}{9}\sqrt{3}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리의 최솟값은 $\dfrac{32}{9}\sqrt{3}$ 이다.

답 ⑤

125. 17

074

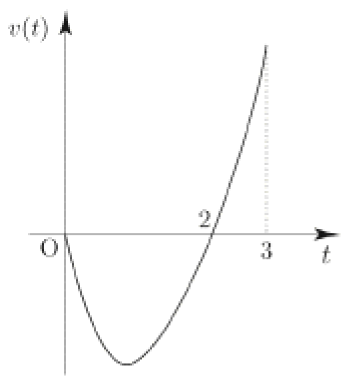
(나) 조건에서 $t \geq 2$일 때, $v(t) = 3t^2 + 4t + C$이다.
$a(2) = 16$이므로 $v(t)$는 $t = 2$에서 미분가능하므로
$v(t)$는 $t = 2$에서 연속이다.

$\lim_{t \to 2-} v(t) = 16 - 16 = 0$, $\lim_{t \to 2+} v(t) = 20 + C$

$\Rightarrow \lim_{t \to 2-} v(t) = \lim_{t \to 2+} v(t) \Rightarrow C = -20$

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (t > 2) \end{cases}$$

이를 바탕으로 $v(t)$를 그리면 다음과 같다.



$$\int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^2 (-2t^3 + 8t)dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t^4 + 4t^2\right]_0^2 + \left[t^3 + 2t^2 - 20t\right]_2^3$$

$$= 8 + 9 = 17$$

따라서 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는 17이다.

답 17

126. ③

11. [출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기

시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_1 - x_2| = \left|t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10\right|$$

$f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10\ (t \geq 0)$ 이라 하면

$f'(t) = 3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4)$
함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t \geq 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최솟값이 $f(4) = 2$ 이므로 $f(t) > 0$

$|x_1 - x_2| = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10$ 이고

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t = 4$ 에서 최소이다.
시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 점 P 의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 10t + 10$$

$a(t) = v'(t) = 6t - 10$
따라서 $t = 4$ 에서의 점 P 의 가속도는
$a(4) = 6 \times 4 - 10 = 14$

Theme 41 속도와 거리 ㄱㄴㄷ

127. ⑤

11. 출제의도 : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x=t^3-t^2-t+1$에 $t=1$을 대입하면

$x=1^3-1^2-1+1=0$ (거짓)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2t-1$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는

$v=3\times1^2-2\times1-1=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이고 시각 $t=1$의 좌우에서 속도 v의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=1$이다. 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-2$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$a=6\times1-2=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

128. ⑤

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $v(t)=3t^2-10t+7$

$=(t-1)(3t-7)$

이므로

$v(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\dfrac{7}{3}$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<\dfrac{7}{3}$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 $t(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$t=0$일 때 점 P의 위치가 원점이므로

$$x(1)=\int_0^1 v(t)dt$$

$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt$$

$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1$$

$$=1-5+7$$

$$=3 \text{ (참)}$$

ㄷ. $0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고
$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로
시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2|v(t)|dt$$
$$=\int_0^2|3t^2-10t+7|dt$$
$$=\int_0^1(3t^2-10t+7)dt+\int_1^2\{-(3t^2-10t+7)\}dt$$
$$=\Big[t^3-5t^2+7t\Big]_0^1-\Big[t^3-5t^2+7t\Big]_1^2$$
$$=3-\{(8-20+14)-3\}$$
$$=4 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

129. ⑤

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도가

$$v(t)=4t^3-12t^2+8t \qquad 4t(t^2-3t+2)$$
$$(t-1)(t-2)$$
$$a(t)=12t^2-24t+8$$

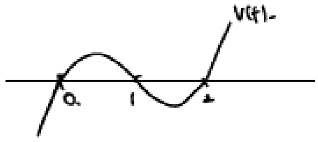
이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

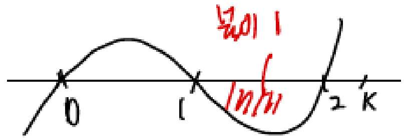
ㄱ. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도는 ~~4~~ 8이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동방향이 $t=a$, $t=b$ $(a<b)$에서 바뀔 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a+b$까지 움직인 거리는 11이다.
ㄷ. $k\ge 2$인 모든 실수 k에 대하여 $\int_1^k\{|v(t)|-v(t)\}dt=2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

12.



$$\int_0^3|v(t)|dt = 2\int_0^1 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt$$
$$\Big[t^4-4t^3+4t^2\Big]_0^1 \quad \Big[t^4-4t^3+4t^2\Big]_2^3$$
$$1 \qquad 81-108+36 = 9 \qquad 9-(16-32+16)$$
$$=2+9=11$$



$$\int_1^k(|v(t)|-v(t))dt \begin{cases} v(t)\ge 0 \to 0 \\ v(t)<0 \to -2v(t) \end{cases}$$
11

$$\int_1^2 -2v(t)dt = 2\int_1^2 -v(t)dt = 2\times 1 = 2$$

130. ⑤

$x(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 2) \\ -t^2 + 6t - \frac{22}{3} & (t > 2) \end{cases}$

4 수학

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t \ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - t & (0 \le t \le 2) \\ -2t+6 & (t > 2) \end{cases}$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

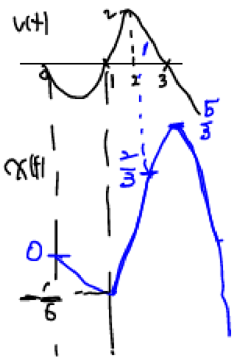
ㄱ. 시각 $t=2$일 때 점 P의 위치는 $\frac{2}{3}$이다.

ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동방향이 $t=a$, $t=b$ $(a<b)$에서 바뀔 때, 시각 $t=a$에서 $t=a+b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\frac{5}{6}$이다.

ㄷ. 출발한 시각부터 P와 원점 사이의 거리가 처음으로 $\frac{5}{3}$가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는 2이다.

$t=3$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄴ. $\int_1^4 v(t)dt$

$= \int_1^2 t^2 - t\,dt + \int_2^4 -2t+6\,dt$

$\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 + \left[-t^2+6t\right]_2^4$

$\frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 16 + \cancel{24} - (-4+12)$

$\frac{7}{3} - 2 + \frac{1}{2}$

$\frac{14-12+3}{6} = \frac{5}{6}$

ㄷ. $\int_0^3 |v(t)|dt$

$= \int_0^1 -t^2+t\,dt + \int_1^2 t^2 - t\,dt + \int_2^3 -2t+6\,dt$

$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 + 1$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + 1$

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{1+4+1+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$

4 20

131. ④

082

$a(t) = 3t^2 - 12t + 9 \ (t \ge 0) = 3(t-1)(t-3) \ (t \ge 0)$
$v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + C$
$v(0) = k \Rightarrow C = k$

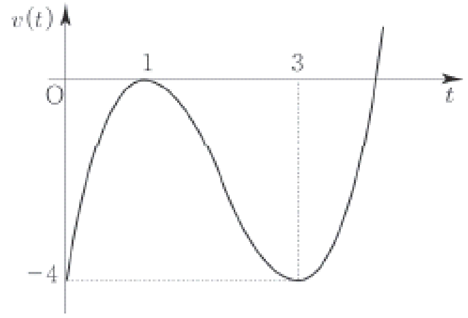
$v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + k$

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

구간 $(3, \infty)$에서 $a(t) = v'(t) > 0$ 이므로
점 P의 속도는 증가한다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $k = -4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

$v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$
$v'(t) = 3(t-1)(t-3)$
$v(1) = 0$, $v(3) = -4$
$v'(t)$를 바탕으로 $v(t)$를 그리면



$v(1) = 0$이고 $t=1$에서 $v(t)$의 부호가 변하지 않는다.
$v(4) = 0$이고 $t=4$에서 $v(t)$의 부호가 변한다.
즉, $t=4$에서만 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀌므로 ㄴ은 거짓이다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

$\int_0^5 v(t)dt = \int_0^5 |v(t)|dt$ 이려면
$0 \le t \le 5$에서 $v(t) \ge 0$이어야 한다.

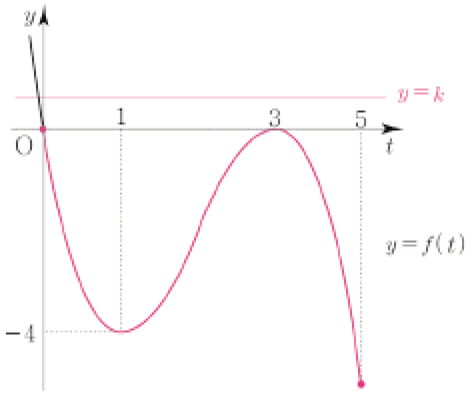
$t^3-6t^2+9t+k \geq 0 \Rightarrow k \geq -t^3+6t^2-9t$

$f(t)=-t^3+6t^2-9t$

$f'(t)=-3t^2+12t-9=-3(t-1)(t-3)$

$f(0)=0,\ f(1)=-4,\ f(3)=0$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$0 \leq t \leq 5$ 에서 $k \geq f(t)$ 이려면 $k \geq 0$ 이므로

k의 최솟값은 0이다.

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ④

Theme 41 함수의 추론과 넓이

218. ③

064

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속

(가) $f(x)=ax^2(0 \leq x < 2)$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$

$f(x+2)=f(x)+2$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(2)=f(0)+2$

(가) 조건에 의해서 $f(0)=0$이므로 $f(2)=2$이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2) \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(0 \leq x < 2)$

$f(x+2)=f(x)+2$

$x+2=t$라 하면

$f(t)=f(t-2)+2\ \ (2 \leq t < 4)$

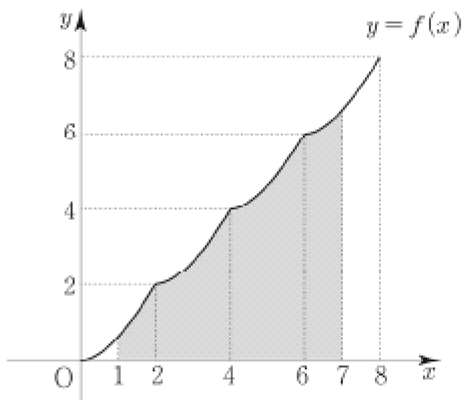
$t-2$는 $0 \leq t-2 < 2$ 이므로 (가) 조건에 의해

$f(t-2)=\frac{1}{2}(t-2)^2$이므로

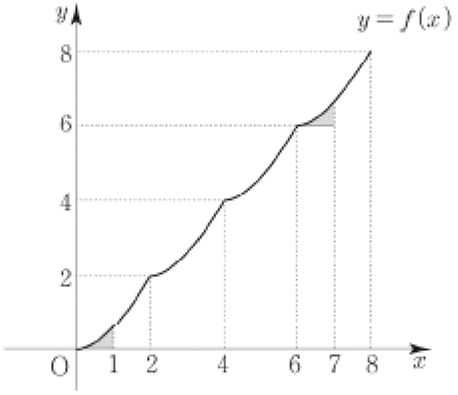
$f(t)=\frac{1}{2}(t-2)^2+2\ \ (2 \leq t < 4)$

즉, 이전 구간의 함수를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시켜 다음 구간의 함수를 찾을 수 있다.

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면

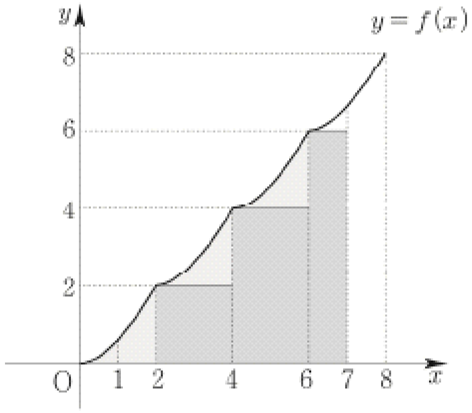


$\int_1^7 f(x)dx$는 위의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 두 영역의 넓이가 같으므로

$\int_1^7 f(x)dx$는 아래의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=3\int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx+(2\times2)+(2\times4)+(1\times6)$$

$$=3\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+18=22$$

따라서 $\int_1^7 f(x)dx=22$이다.

답 ③

219. 17

077

$a>0$, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속

(가) $f(x)=2x^2+ax$ $(0\le x<1)$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$

$f(x+1)=f(x)+a^2$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)+a^2$

(가) 조건에 의해서 $f(0)=0$이므로 $f(1)=a^2$이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ $\Rightarrow$ $2+a=a^2$ $\Rightarrow$ $a=2$ $(\because a>0)$

$f(x)=2x^2+2x=2x(x+1)$ $(0\le x<1)$

$f(x+1)=f(x)+4$

$x+1=t$라 하면

$f(t)=f(t-1)+4$ $(1\le t<2)$

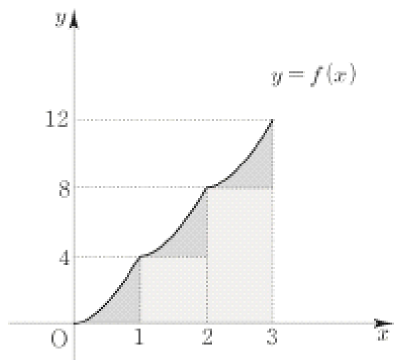
$t-1$는 $0\le t-1<1$이므로 (가) 조건에 의해

$f(t-1)=2(t-1)t$이므로

$f(t)=2(t-1)t+4$ $(1\le t<2)$

즉, 이전 구간의 함수를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 후 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시켜 다음 구간의 함수를 찾을 수 있다.

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



위 색칠한 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=3\int_0^1 f(x)dx+4+8=3\int_0^1 (2x^2+2x)dx+12$$

$$=3\left[\frac{2x^3}{3}+x^2\right]_0^1+12=5+12=17$$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 17이다.

답 17

220. ②

085

$a_n = 2n-1$

$P_n = (a_n,\ b_n)$이라 하자.

(가) 조건에 의해서 $a_1 = 1,\ b_1 = 1$

(다) 조건에 의해서

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = \frac{1}{2}a_{n+1}$$

$\Rightarrow b_{n+1}-b_n = a_{n+1} = 2n+1$

라이트 N제 수1 수열 中 3. 수학적 귀납법 Guide step
"개념 파악하기 (1) 수열의 귀납적 정의란 무엇일까?"
에서 배웠듯이

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) = 1 + \frac{(n-1)(2n+2)}{2} = n^2$$

(물론 b_n의 일반항을 직접 구하지 않고, 그냥 나열하여 구해도 된다.)

Tip

$a_{n+1} - a_n = b_n$꼴 (라이트 수1 복습)

$a_{n+1} - a_n = b_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 뒤 변끼리 더한다.

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

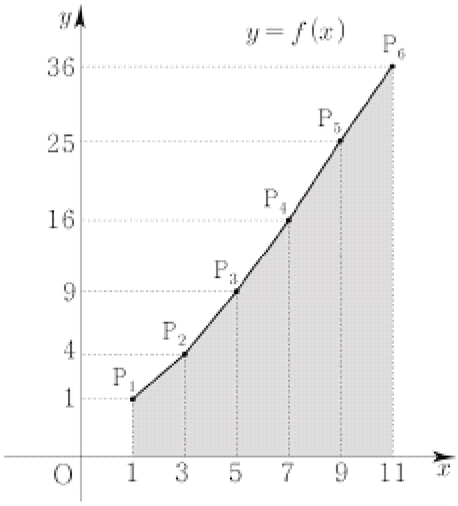
$$\therefore\ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$P_n = (a_n,\ b_n) = (2n-1,\ n^2)$이므로

$P_1(1,\ 1)$, $P_2(3,\ 4)$, $P_3(5,\ 9)$, $P_4(7,\ 16)$, $P_5(9,\ 25)$, $P_6(11,\ 36)$

이다.

$x \geq 1$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 선분 P_nP_{n+1}과 일치하므로 이를 바탕으로 $f(x)$의 그래프를 그리면



$\int_1^{11} f(x)dx$의 값은 사다리꼴의 넓이의 합과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_1^{11} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\times2\times(1+4)+\frac{1}{2}\times2\times(4+9)+\frac{1}{2}\times2\times(9+16) \\ &\quad +\frac{1}{2}\times2\times(16+25)+\frac{1}{2}\times2\times(25+36) \\ &= 5+13+25+41+61 = 145 \end{aligned}$$

답 ②

Tip

P_n의 y좌표를 b_n으로 두고 P_n의 좌표만 구했다면 어렵지 않게 풀 수 있었다.
이 문제를 풀지 못했던 학생들의 대부분은 아마 비주얼에 압도당했을 가능성이 크다.
절대 쫄지 말자!!! 그냥 한 번 해본다는 마인드는 문제를 풀기 위한 아주 강력한 Tool이다.