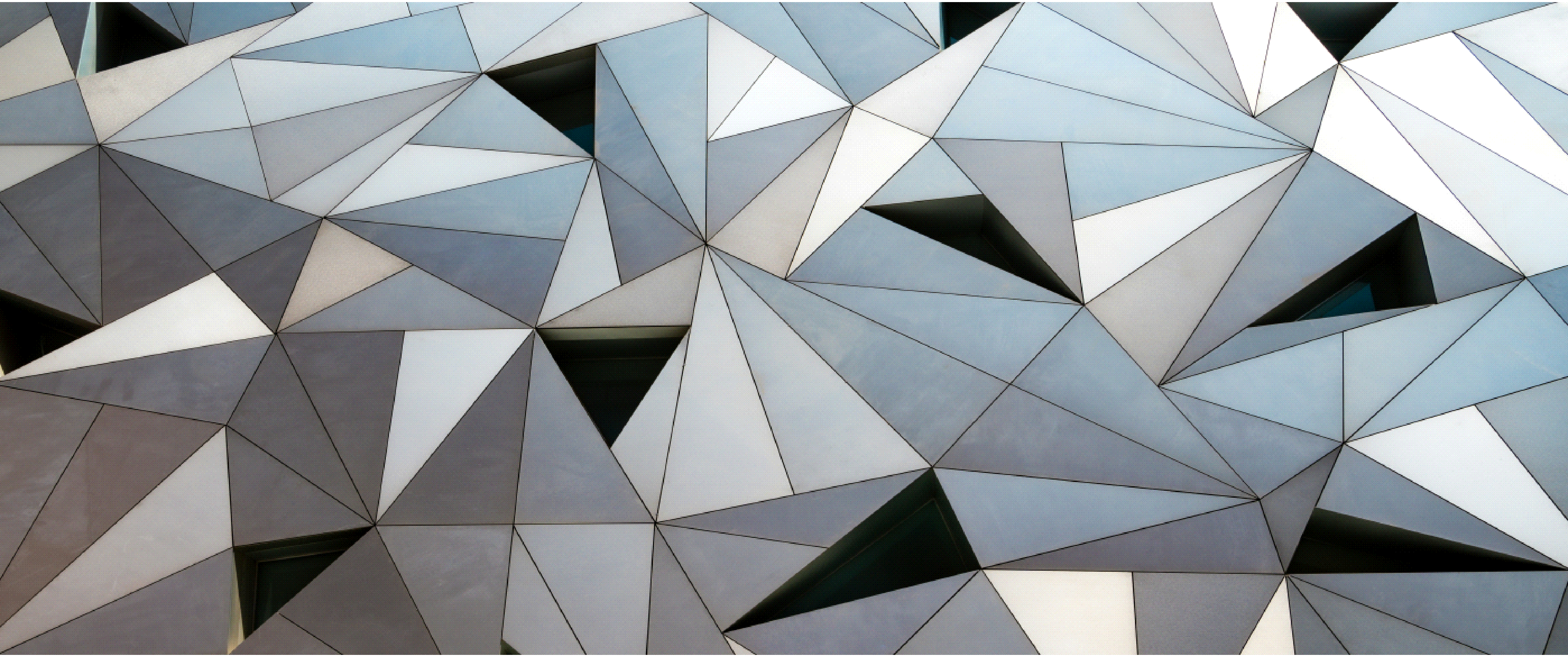
2026 규토 N제 시리즈 보충프린트 - 20일의 기적

이것만은 제발

ver. 2026 수능대비 수학1



유성민T

대치명인학원

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.수학1 문제지

1. 지수함수와 로그함수

Theme 1 a의 n제곱근

001 2026 규토 모의평가 9월 공통

8. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{3}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값을 $f(n)$라 할 때, $24\log_9(-f(n))$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

002

033 2023년 고3 7월 교육청 공통

2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

003 2024 규토 모의평가 1회

6. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt{a}$는 b의 세제곱근이다.
(나) c는 a^3의 네제곱근이다.

$\log_{bc} ab$의 값은? [3점]

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{20}{9}$ ④ $\frac{25}{9}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

004

041 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여
다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때,
상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

005

044 2025학년도 사관학교 공통

2 이상의 자연수 n에 대하여 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

006

046 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

Theme 2 비례상수 Technique $(=k)$

007

048 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a=5^b=k^c$
(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

008

039 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

Theme 3 자연수 및 정수 조건

009

047 | 2022학년도 수능예비시행

$\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$ 인 양수 a에 대하여 $\frac{1}{3} + \log \sqrt{a}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12} ④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

010

052 | 2021학년도 수능 가형

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

Theme 4 그래프의 평행이동과 대칭이동

011

054 | 2019학년도 수능 가형

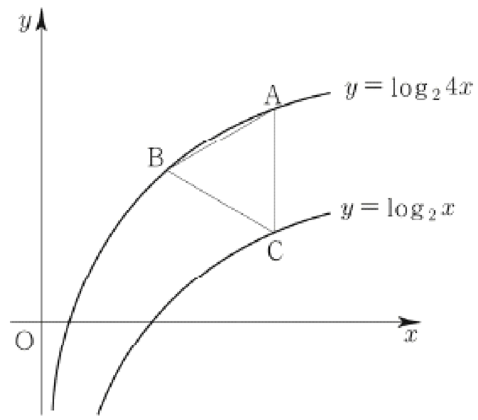
함수 $y = 2^x + 2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y = \log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y = x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

012

101 | 2011학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $y = \log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y = \log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2 \times 2^q$의 값은? [4점]

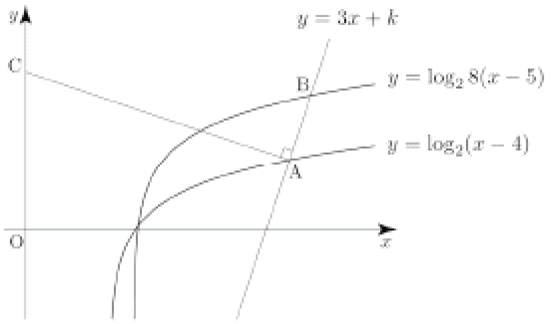


① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

013

046

그림과 같이 직선 $y=3x+k$가 두 함수 $y=\log_2(x-4)$, $y=\log_2 8(x-5)$의 그래프와 제1사분면에서 각각 한 점에서 만나며 그 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 $y=3x+k$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 20이다. 상수 k의 값은? (단, $k<-21$)



① -30 ② -31 ③ -32
④ -33 ⑤ -34

014

12. 점 A(0, 1)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+6)$와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\log_2(x+4)-1$와 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=\log_2(x+6)$ 위의 점 D에 대하여 $\overline{\text{BD}}=\overline{\text{CD}}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? [4점]

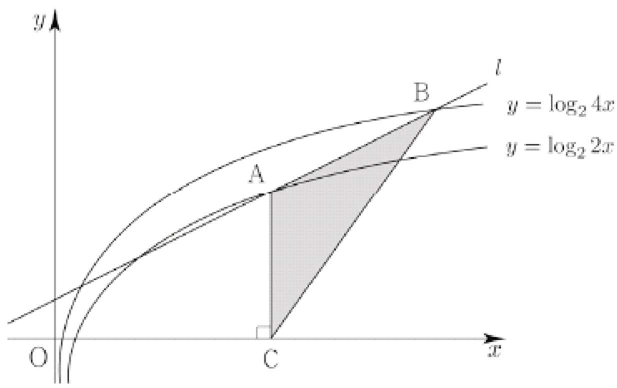
① $\log_2\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ② $\log_2 4\sqrt{2}$ ③ $\log_2\frac{9\sqrt{2}}{2}$
④ $\log_2 5\sqrt{2}$ ⑤ $\log_2\frac{11\sqrt{2}}{2}$

Theme 5 직선의 기울기와 길이

015

082 • 2022년 고3 7월 교육청 공통

기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\text{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는? [4점]



① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

016

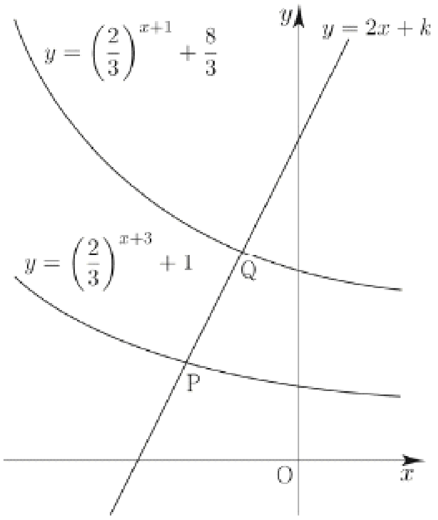
097 | 2022학년도 수능 공통

직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$

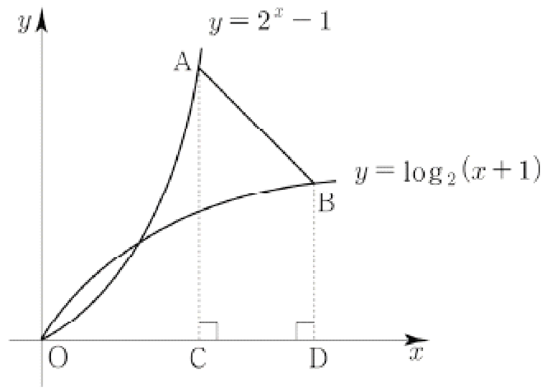
④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

Theme 6 역함수 Technique

017

067 • 2011학년도 고3 6월 평가원 나형

곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는? [3점]



① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3

④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

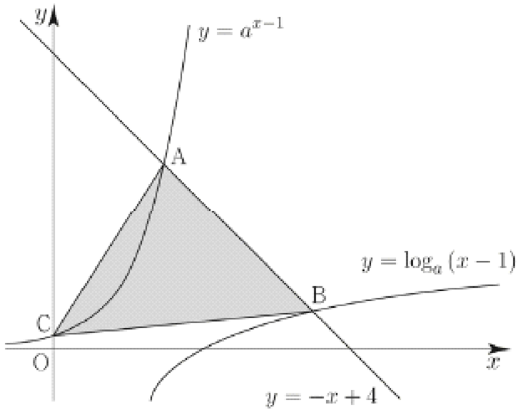
018

114 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

$a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1}, \quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



019

104 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 A_nB_n의 기울기는 3이다.
> (나) $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

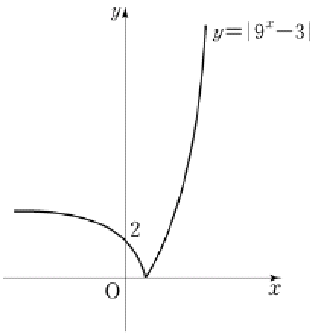
① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

Theme 7 함숫값의 범위 Technique

020 2016학년도 고3 6월 평가원 B형

18. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12



021

095 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30　② 35　③ 40

④ 45　⑤ 50

022

112 | 2023학년도 수능 공통

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

Theme 8 지수함수와 로그함수의 그래프 해석

023 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

10. 실수 $a(a>1)$에 대하여

곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,

곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,

곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

024 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

12. 상수 $a(a>1)$과 양수 t에 대하여 곡선 $y=a^x$과

두 직선 $x=t$, $x=2t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고,

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자.

$\overline{AB}=\overline{AC}$이고 삼각형 ACB의 넓이가 8일 때,

$a\times t$의 값은? [4점]

① $2^{\frac{9}{4}}$ ② $2^{\frac{23}{8}}$ ③ $2^{\frac{7}{2}}$

④ $2^{\frac{33}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{4}}$

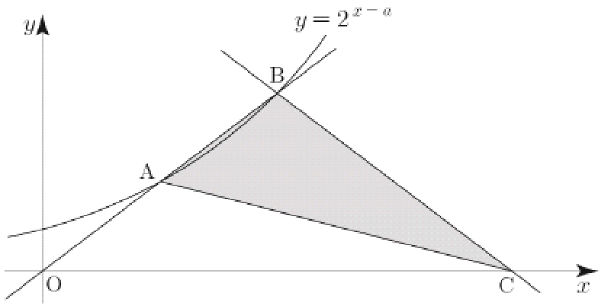
025 2026 규토 모의평가 9월 공통

10. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-a}$ 위에 두 점 A, B가 있다.

직선 AB의 기울기를 m이라 할 때, 점 B를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 선분 OB의 중점이 A이고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3}{2}$일 때,

상수 a의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, O는 원점이다.) [4점]

① $\log_2\frac{5}{3}$ ② 1 ③ $\log_2\frac{7}{3}$ ④ $\log_2\frac{8}{3}$ ⑤ $\log_2 3$



026 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) (직선 AP의 y절편) − (직선 BQ의 y절편) $= \dfrac{13}{2}$
>
> (나) 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

027 2026 규토 모의평가 파이널 공통

22. 곡선 $y=3^x+3$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

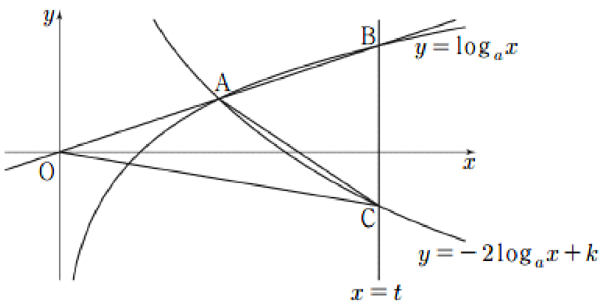
> (가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = 1 : 2$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_3 x+3$과 만나는 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_3 x+3$과 만나는 점을 D라 하자.

사각형 ACDB의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

028 2025년 고3 5월 교육청 공통

12. 그림과 같이 세 상수 $a(a>1)$, k, t에 대하여 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=-2\log_a x+k$가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=-2\log_a x+k$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 직선 AB가 원점 O를 지나고 두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 2로 같을 때, $a\times k\times t$의 값은? (단, $k>0$이고, t는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $8\sqrt{2}$ ② 16 ③ $16\sqrt{2}$ ④ 24 ⑤ $24\sqrt{2}$

Theme 9 그래프를 이용한 추론

029 2025년 고3 3월 교육청 공통

15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x\le p \text{ 또는 } x\ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

030 2025년 고3 7월 교육청 공통

20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=-2^{-x+a}+b$가 있다. 집합 $\{x\,|\,x\ne 4,\ x\text{는 실수}\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+2^x+\frac{|x-4|}{x-4}\{f(x)-2^x\}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

Theme 10 단순 수식 접근형

031

047 • 2024학년도 수능 공통

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

032

079 | 2022년 고3 10월 교육청 공통

$a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=-\log_2(-x)$, $y=\log_2(x+2a)$가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

033 2026 규토 모의평가 5월 공통

8. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ \log_8 a)$, $(4,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 기울기가 $\log_2 \sqrt[6]{a}$일 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a \neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

Theme 11 함수의 최댓값과 최솟값

034

058 | 2019년 고3 3월 교육청 가형

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$의 최댓값은 27, 최솟값은 m이다. $a\times m$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

035

060 | 2021학년도 고3 9월 평가원 나형

$\angle A=90^{\circ}$이고 $\overline{AB}=2\log_2 x$, $\overline{AC}=\log_4\frac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Theme 12 방정식과 부등식

036

035 | 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

방정식 $\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하시오. [3점]

037

051 | 2021학년도 사관학교 가형

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}\\ \log_2 4x<\log_2(x+k)\end{cases}$$

의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

038

053 | 2015년 고3 4월 교육청 A형

지수부등식 $(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$을 만족시키는

모든 정수 x의 개수는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

039

072 2025학년도 고3 6월 평가원 공통

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

Theme 13 지수방정식과 부등식의 치환

040 2025 규토 라이트 수1 p154

065 • 2006년 고3 3월 교육청 가형

x에 대한 방정식 $4^x-a\times2^{x+1}+a^2-a-6=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는? [3점]

① $a>-6$ ② $-6<a<-2$ ③ $a>0$
④ $-2<a<3$ ⑤ $a>3$

041 2025 규토 라이트 수1 p154

066 • 2012년 고3 3월 교육청 나형

지수방정식 $5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 삼각함수

Theme 14 부채꼴의 호의 길이와 넓이

042

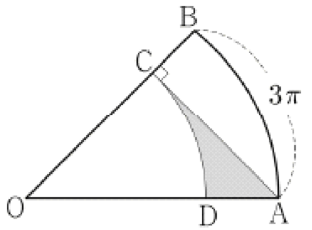
013

중심이 O이고 반지름의 길이가 12인 원 위에 점 A가 있다. 반직선 OA를 시초선으로 했을 때, 두 각 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{13}{4}\pi$가 나타내는 동경이 이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ를 포함하는 부채꼴 OPQ의 넓이가 $k\pi$일 때, k의 값을 구하시오.

043

014

그림과 같이 중심이 O이고 호 AB의 길이가 3π, 넓이가 18π인 부채꼴 OAB가 있다. 점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 C, 점 O을 중심으로 하고 반지름이 선분 OC인 원이 선분 OA와 만나는 점을 D라 할 때, 호 CD와 두 선분 AD, AC로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a-b\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)

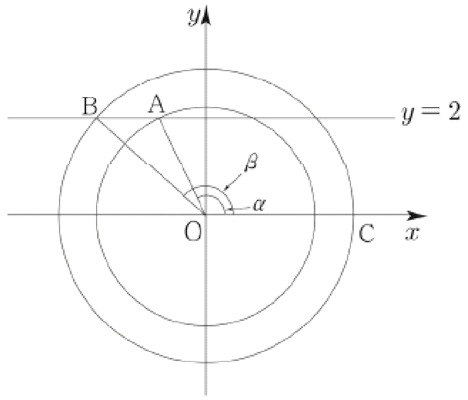


Theme 15 삼각함수의 뜻

044

043 | 2019년 고2 11월 교육청 나형

그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=2$가 두 원 $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2=9$와 제 2사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 C(3, 0)에 대하여 $\angle COA=\alpha$, $\angle COB=\beta$라 할 때, $\sin\alpha\times\cos\beta$의 값은? (단, O는 원점이고, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\pi$) [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

Theme 16 삼각함수 사이의 관계

045

037 | 2022학년도 수능예비시행

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$일 때, $\sin\theta-\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

046

040 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

047

041 | 2022학년도 수능 공통

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

048 2026 규토 모의평가 파이널 공통

6. $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)<0$이고 $\sin\theta=2\cos(\pi-\theta)$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

049 2024 규토 모의평가 1회

5. $\sin\theta<0$이고 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-3\sqrt{6}$ ② $-2\sqrt{6}$ ③ 0
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

Theme 17 삼각함수의 방정식과 부등식

050

097 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & (0\le x<\pi) \\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

051 2025년 고3 7월 교육청 공통

10. 다음과 같이 $0\le x<2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

$n-1\le x<n$일 때, $f(x)=3^n\sin\pi x+4$이다. (단, $n=1,\ 2$)

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

052 2025 규토 라이트 수1 p225

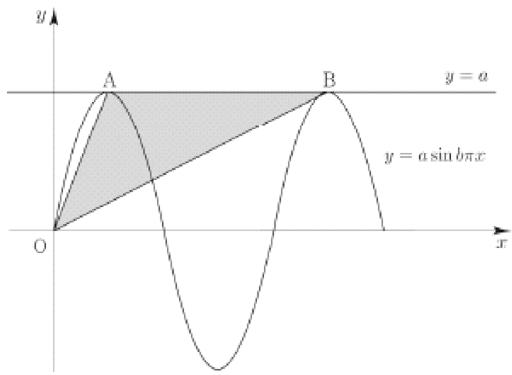
070 • 2024학년도 수능 공통

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식 $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

053

078 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

054

081 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수

$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$, $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$이 있다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

056 2026 규토 모의평가 5월 공통

20. $0 \le x \le \frac{1}{12}$일 때, x에 대한 방정식

$$(\sqrt{3}\sin a\pi x-\cos a\pi x)(\sin a\pi x+\sqrt{3}\cos a\pi x)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 7이 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

055

096 • 2023년 고3 10월 교육청 공통

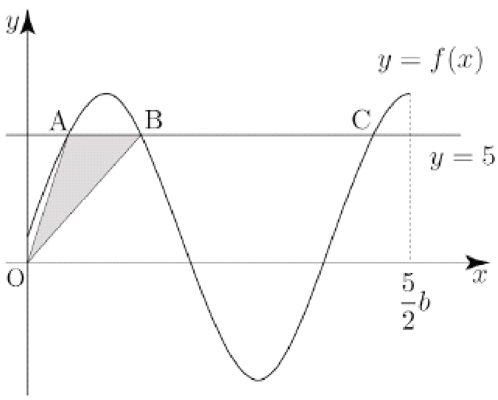
그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\ \left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$의 그래프와 직선 $y=5$가

만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자.

$\overline{BC}=\overline{AB}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때,

a^2+b^2의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.) [4점]



① 68 ② 70 ③ 72

④ 74 ⑤ 76

057

098 2023년 고3 3월 교육청 공통

두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $0\le a\le 2$이다.) [4점]

(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
(나) $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

058

053

x에 대한 방정식

$2\cos^2\pi x - 2\sin\pi x + 2a - 3 = 0$ $(0 \le x < 2)$의

서로 다른 실근의 개수는 3이다. 서로 다른 세 실근의 합을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

Theme 18 삼각함수를 포함한 함수의 최대, 최소

059

028

함수 $f(x) = \sin^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $4(M+m)$의 값을 구하시오.

060

082 | 2023학년도 수능 공통

함수 $f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a \times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

061

087 | 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

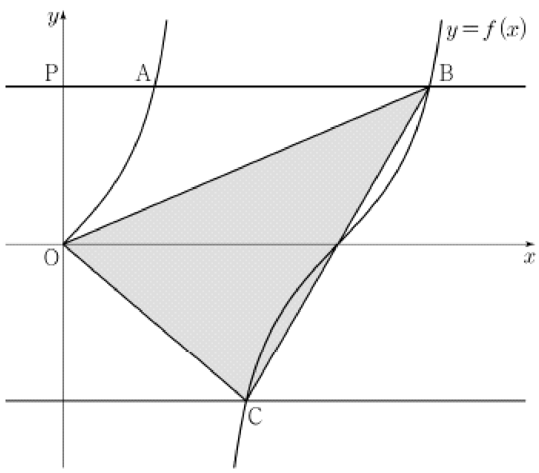
Theme 19 삼각함수의 대칭성

062 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, 0 \le x < \frac{3k\pi}{2},\ x \ne \frac{k\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$가 있다. 점 $\mathrm{P}(0,\ p)\ (p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, B $(\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{PB}})$라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{PA}}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$

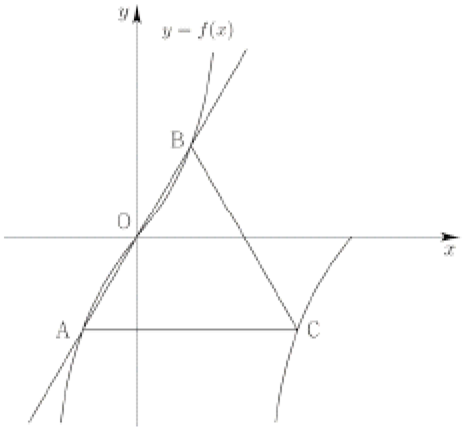
④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{9}$



063

090 2022학년도 수능 공통

양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}<x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

Theme 20 삼각함수의 평행이동

064

017

함수 $f(x)=\tan(ax-b)$ $\left(a>0,\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{4}$이다.
>
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나지 않도록 하는 음의 실수 k의 최댓값은 $-\frac{\pi}{24}$이다.

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)$의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

065

088 | 2020년 고3 10월 교육청 나형

함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 직선 $y=-x$와 만나는 점의 x좌표가 구간 $(-\pi,\ \pi)$에 속하는 점의 개수를 a_n이라 할 때, a_2+a_3의 값을 구하시오. [4점]

066 2026 규토 모의평가 9월 공통

20. 두 상수 a, b ($a>0$, $0<b<\pi$)에 대하여 함수 $f(x)=a\sin(2x+b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $30\left(a+\dfrac{b}{\pi}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $-\dfrac{a}{2}$이다.

(나) $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$에서 방정식 $|f(x)|=\dfrac{1}{4}$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

Theme 21 사인법칙과 코사인법칙

067

054 2025학년도 고3 6월 평가원 공통

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A=2\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

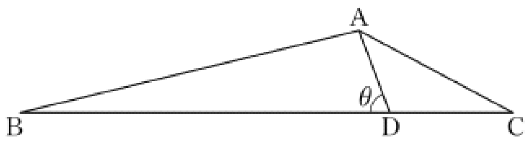
① $\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\dfrac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\dfrac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{64}{9}\sqrt{2}$

068 2025년 고3 3월 교육청 공통

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3:1로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle ADB=\theta$라 하자.

$$\overline{AD}=\sqrt{2},\quad \overline{AB}:\overline{AC}=2:1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



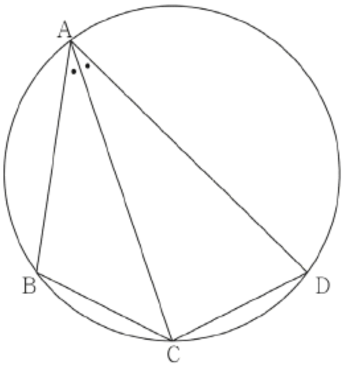
069

059 | 2023학년도 수능 공통

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



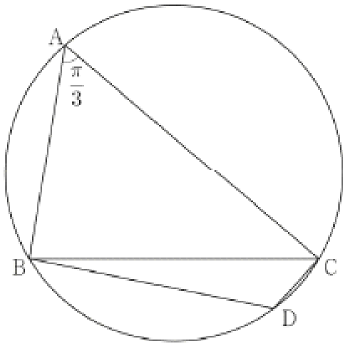
① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

070

060 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$

④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

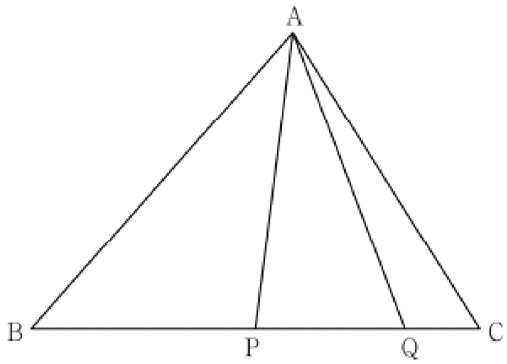
071 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

14. $\overline{AB}=2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



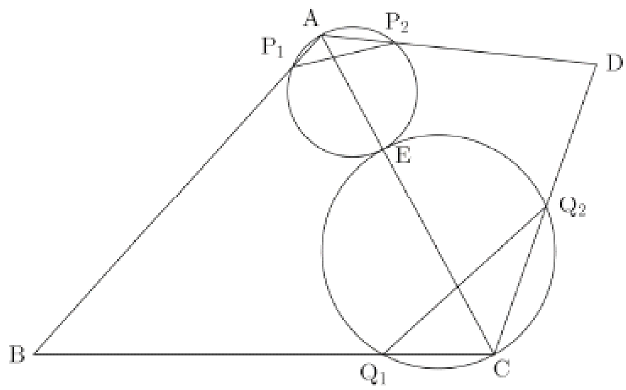
072

067 • 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



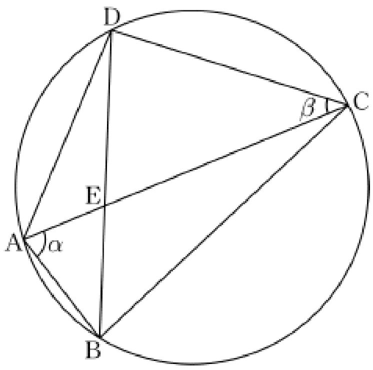
① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

073 2024년 고3 10월 교육청 공통

13. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2\sqrt{30}$, $\overline{CD}=8$

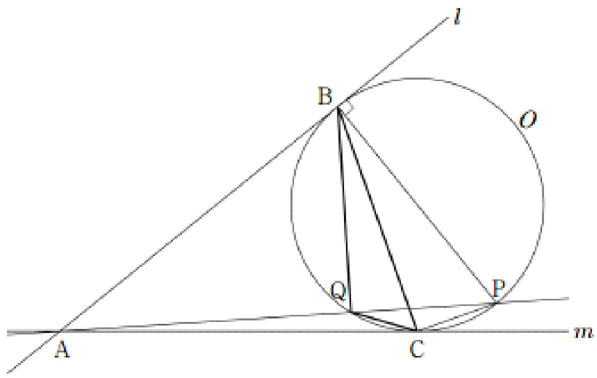
이다. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{12}$이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는? $\left(\text{단, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

074 2025년 고3 7월 교육청 공통

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 O의 외부에 있는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 원 O와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 O와 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P, 직선 AP가 원 O와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 $\overline{AB}=12$일 때, $\sin(\angle BPQ):\sin(\angle QPC)=3:1$이다. 삼각형 BQC의 넓이는? [4점]



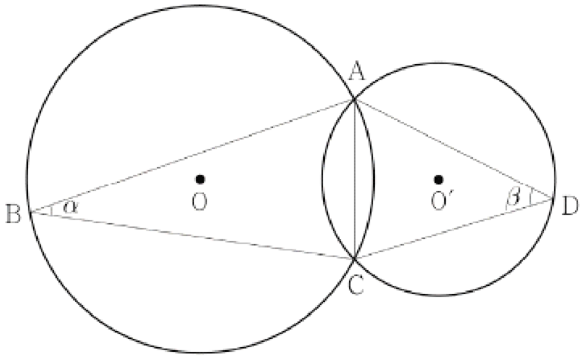
① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

075

077 • 2022학년도 수능예비시행

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$, $\overline{OO'}=1$이 성립한다.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

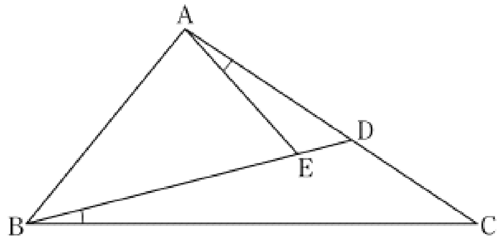


076 2025년 고3 10월 교육청 공통

14. 그림과 같이 $\overline{BC}=6$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 4:3으로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 BD 위의 점 E가

$$\angle DAE=\angle DBC,\quad \sin(\angle DAE):\sin(\angle EDA)=1:3$$

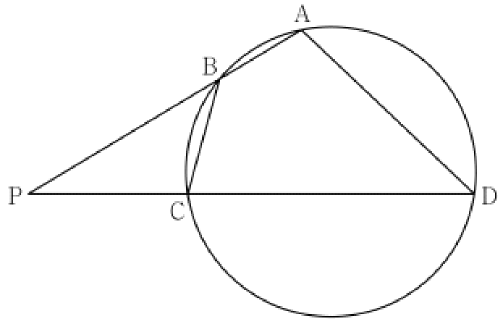
을 만족시킨다. $\overline{AE}=\sqrt{5}$일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{180}{11}\pi$ ② $\frac{195}{11}\pi$ ③ $\frac{210}{11}\pi$ ④ $\frac{225}{11}\pi$ ⑤ $\frac{240}{11}\pi$

077 2026학년도 고3 9월 평가원 공통

20. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$, $\overline{BC}<\overline{AD}$일 때, 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자.



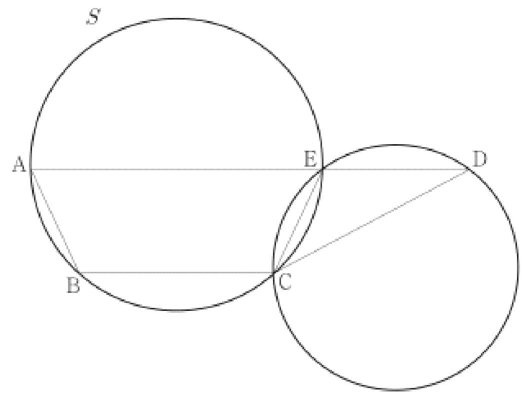
다음은 $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이고 $\overline{AD}=4\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle BPC=\theta$라 할 때, $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로
> 삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{6}{7}$이다.
> $\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$,
> $\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l$이라 하자.
> 원의 성질에 의하여
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
> $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고, $l=\boxed{(가)}\times k$이다.
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{(나)}$이므로
> $\overline{BC}=\dfrac{1}{\boxed{(나)}}\times\overline{AD}$이다.
> 따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,
> 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여 $R=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

078 2026 규토 모의평가 파이널 공통

20. 그림과 같이 두 선분 AD, BC가 서로 평행인 사각형 ABCD가 있다. 세 점 A, B, C를 지나는 원을 S라 할 때, 선분 AD와 원 S가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자.



다음은 $\overline{BC}=2$, $\overline{AE}=3$, $\overline{CD}=\sqrt{6}$, $\overline{AB}=\overline{DE}$일 때, 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

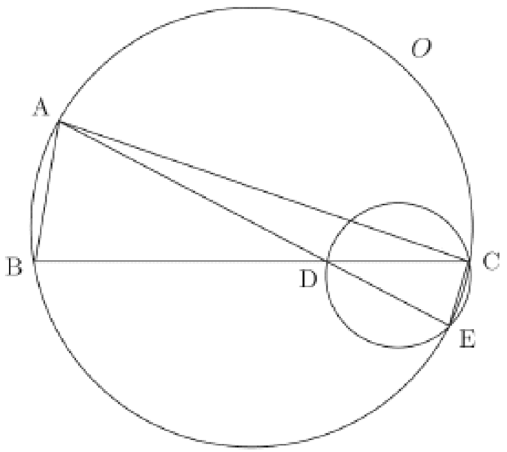
> 두 선분 AD, BC가 서로 평행이고 사각형 ABCE는 원에 내접하므로 $\overline{AB}=\overline{CE}$이다.
> $\angle DEC=\theta$라 하면 $\angle AEC=\pi-\theta$이고 사각형 ABCE는 원에 내접하므로 $\angle ABC=\theta$이다.
> $\overline{AB}=\overline{CE}=\overline{DE}=x$라 하자.
> 삼각형 ACE에서 코사인법칙, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=-\dfrac{1}{\boxed{(가)}\times x}$이다.
> 삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{x^2-3}{x^2}$이다.
> $-\dfrac{1}{\boxed{(가)}\times x}=\dfrac{x^2-3}{x^2}$이므로 $\cos\theta=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여 $R=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $48\times(p+q+r^2)$의 값을 구하시오. [4점]

079 2026 규토 모의평가 9월 공통

14. 그림과 같이 $3\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이고, 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여
직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자.
$\dfrac{\sin(\angle \mathrm{DAC})}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}=\dfrac{1}{6}$이고, 삼각형 CDE의 외접원의 넓이가 $\dfrac{27}{35}\pi$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{DE}}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$ ② $\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ ③ $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$
④ $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$



3. 수열

Theme 22 등차수열과 등비수열

080 2026 규토 모의평가 파이널 공통

18. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=14,\quad |a_5|=|a_{11}|$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

081 2024 규토 라이트 수1 p302

060 | 2019년 고3 7월 교육청 나형

공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 자연수인 등비수열 $\{b_n\}$이 $a_6=b_6=9$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7=b_7$
(나) $94<a_{11}<109$

a_7+b_8의 값은? [4점]

① 96 ② 99 ③ 102 ④ 105 ⑤ 108

082 2026 규토 모의평가 파이널 공통

10. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+2}-S_n=61-6n$$

이다. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \le k$이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 181 ② 183 ③ 185 ④ 187 ⑤ 189

083

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2=1,\quad \sum_{k=1}^{6}(-1)^k S_k=21$$

일 때, S_2+S_7의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

Theme 23 등차수열의 합과 이차함수

084

087 | 2020학년도 수능 나형

첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

085

079 • 2023년 고3 4월 교육청 공통

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert S_m\rvert=\lvert S_{2m}\rvert=162$인 자연수 $m\ (m>8)$이 존재한다.

Theme 24 $\sum$의 성질

086 2024 규토 모의평가 1회

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+1)^2=100,\quad \sum_{n=1}^{10}a_n(a_n+1)=60$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)(a_n+5)$의 값을 구하시오. [3점]

087

047 | 2023학년도 수능 공통

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

088

083

두 자연수 a, b에 대하여 $\sum_{k=1}^{30}\frac{4^{k+1}+8}{2^{k-1}}=2^a-2^{-b}$

일 때, $2a+b$ 의 값은?

① 94 ② 96 ③ 98 ④ 100 ⑤ 102

Theme 25 분수 꼴인 수열의 합

089

043 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

090

044 | 2023학년도 수능 공통

모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

091 2024 규토 라이트 수1 p330

052 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

092 2024 규토 라이트 수1 p325

036

$\displaystyle\sum_{k=1}^{11} \frac{a}{4k^2-1}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

Theme 26 수열의 합과 일반항 사이의 관계

093 2024 규토 라이트 수1 p333

067 | 2021학년도 고3 6월 평가원 나형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

094 2024 규토 라이트 수1 p324

028

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} \frac{S_{k+1}}{S_k} = 40$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} \frac{a_{k+1}}{S_k}$의 값을 구하시오.

095 2024 규토 라이트 수1 p324

029

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 3^{n+1} - 3$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2 = \frac{3^{42} - 9}{2}$ 를 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

096 2025 규토 라이트 수1 p352

078 • 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

Theme 27 새롭게 정의된 수열의 합

097 2024 규토 라이트 수1 p336

078 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

098 2024 규토 라이트 수1 p336

079 | 2023학년도 수능 공통

자연수 $m\ (m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

099 2024 규토 모의평가 1회

21. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_n + a_3$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_2 = S_3$
(나) $S_4 = 4$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{60}{b_n a_{n+1}}$의 값을 구하시오. [4점]

Theme 28 절댓값이 포함된 수열의 합

100

068 | 2022학년도 수능예비시행

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0, \quad \sum_{k=1}^{6}(|a_k| + a_k) = 30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

101

077 | 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$
④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

102 2026 규토 모의평가 5월 공통

12. 모든 항이 정수이고, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|$의 값의 합은? [4점]

(가) $a_3 \times a_5 < 0$

(나) $\sum_{n=1}^{10}(|a_n|+a_n)=6a_2$

① 54 ② 56 ③ 58 ④ 60 ⑤ 62

Theme 29 자연수 조건을 이용하는 수열의 합

103 2024 규토 라이트 수1 p336

081 | 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

104

087 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

Theme 30 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (순행)

105 2026 규토 모의평가 파이널 공통

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = n^2 a_n + n + 1$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

106

026 | 2022학년도 수능 공통

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 7) \\ a_n - 7 & (a_n \geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

107 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

(가) $a_1 = a_3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$
이다.

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

108 2025년 고3 10월 교육청 공통

12. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

모든 자연수 n에 대하여 $3{a_n}^2 + 2na_n - 8n^2 = 0$이다.

① 540 ② 550 ③ 560 ④ 570 ⑤ 580

109 2026학년도 고3 6월 평가원 공통

069 • 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18
④ 22 ⑤ 26

Theme 31 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (역행)

110

040 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

111 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

112

060 | 2022학년도 수능예비시행

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$
이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

113 2025년 고3 10월 교육청 공통

22. 실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1}=\begin{cases} |a_n+n| & (a_n<0) \\ a_n-10+k & (a_n \geq 0) \end{cases}$$
이다.

$a_4 \times a_5=0$이 되도록 하는 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

드디어 고지가 보이네요. ㅎㅎ
여러분의 앞날에 행복이 가득하기를 기원하겠습니다.
그동안 정말 수고 많으셨습니다!!

-규토-

2026 이것만은 제발 ver.수학1 빠른 정답

1. 지수함수와 로그함수

Theme 1 a의 n제곱근
1. ②
2. ②
3. ①
4. ②
5. ②
6. 24

Theme 2 비례상수 Technique $(=k)$
7. 75
8. ①

Theme 3 자연수 및 정수 조건
9. ①
10. 13

Theme 4 그래프의 평행이동과 대칭이동
11. ③
12. ③
13. ④
14. ①

Theme 5 직선의 기울기와 길이
15. ⑤
16. ④

Theme 6 역함수 Technique
17. ①
18. 192
19. ⑤

Theme 7 함숫값의 범위 Technique
20. ②
21. ②
22. 33

Theme 8 지수함수와 로그함수의 그래프 해석
23. ①
24. ①
25. ④
26. 73
27. 65
28. ③

Theme 9 그래프를 이용한 추론
29. ②
30. 24

Theme 10 단순 수식 접근형
31. ④
32. ⑤
33. ④

Theme 11 함수의 최댓값과 최솟값
34. 21
35. ①

Theme 12 방정식과 부등식
36. 12
37. ①
38. ①
39. ④

Theme 13 지수방정식과 부등식의 치환
40. ⑤
41. ②

2. 삼각함수

Theme 14 부채꼴의 호의 길이와 넓이

42. 42
43. 45

Theme 15 삼각함수의 뜻

44. ⑤

Theme 16 삼각함수 사이의 관계

45. ④
46. ①
47. ①
48. ①
49. ④

Theme 17 삼각함수의 방정식과 부등식

50. 15
51. ③
52. 32
53. ③
54. ③
55. ①
56. 243
57. ④
58. 3

Theme 18 삼각함수를 포함한 최대, 최소

59. 17
60. ③
61. ③

Theme 19 삼각함수의 대칭성

62. ③
63. ③

Theme 20 삼각함수의 평행이동

64. ④
65. 10
66. 40

Theme 21 사인법칙과 코사인법칙

67. ⑤
68. 71
69. ①
70. ②
71. ②
72. ①
73. ⑤
74. ②
75. 26
76. ①
77. 12
78. 161
79. ④

3. 수열

Theme 22 등차수열과 등비수열

80. ②
81. ⑤
82. ④
83. ③

Theme 23 등차수열의 합과 이차함수

84. ④
85. 30

Theme 24 $\sum$의 성질

86. 100
87. 22
88. ①

Theme 25 부분분수

89. ⑤
90. ④
91. ④
92. 115

Theme 26 수열의 합과 일반항 사이의 관계

93. 58
94. 15
95. 20
96. ①

Theme 27 새롭게 정의된 수열의 합

97. ⑤
98. ③
99. 14

Theme 28 절댓값이 포함된 수열의 합

100. 25
101. ③
102. ④

Theme 29 자연수 조건을 이용하는 수열의 합

103. ②
104. 19

Theme 30 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (순행)

105. 15
106. ①
107. ②
108. ②
109. ②

Theme 31 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (역행)

110. ⑤
111. ①
112. ③
113. 63

2026 수능대비 이것만은 제발 ver.수학1 해설지

1. 지수함수와 로그함수

Theme 1 a의 n제곱근

1. ②

8. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{3}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값을 $f(n)$라 할 때, $24\log_9(-f(n))$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

$x^4 = 3^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{4n}},\ -3^{\frac{1}{4n}}$

$f(n) = -3^{\frac{1}{2n}}$

$\frac{24}{2}\log_3 3^{\frac{1}{2n}} = \frac{24}{4n} = \frac{6}{n}$

$n = 2.\ 3.\ 6.$

$2+3+6 = 11$

2. ②

033

① n이 짝수

방정식 $x^{2n}=8$의 실근은 $x=2^{\frac{3}{2n}}$ or $x=-2^{\frac{3}{2n}}$ 이므로
두 실근의 곱은 음수이다.

방정식 $x^n=8$의 실근은 $x=2^{\frac{3}{n}}$ or $x=-2^{\frac{3}{n}}$ 이므로
두 실근의 곱은 음수이다.

즉, 모든 실근의 곱은 양수이므로 모순이다.

② n이 홀수

방정식 $x^{2n}=8$의 실근은 $x=2^{\frac{3}{2n}}$ or $x=-2^{\frac{3}{2n}}$ 이고

방정식 $x^n=8$의 실근은 $x=2^{\frac{3}{n}}$ 이므로

모든 실근의 곱은 $-2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{n}} = -4 \Rightarrow 2^{\frac{6}{n}} = 2^2$

따라서 n의 값은 3이다.

답 ②

3. ①

6. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt{a}$는 b의 세제곱근이다. $\Rightarrow (\sqrt{a})^3 = b \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} = b$
(나) c는 a^3의 네제곱근이다. $\Rightarrow c^4 = a^3 \Rightarrow c = a^{\frac{3}{4}}$

$\log_{bc} ab$의 값은? [3점]

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{20}{9}$ ④ $\frac{25}{9}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

$\log_{a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}} a^{\frac{5}{2}} = \log_{a^{\frac{9}{4}}} a^{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$

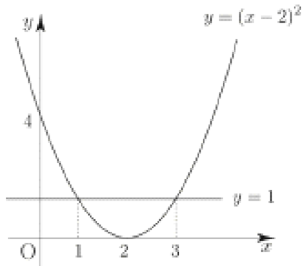
4. ②

041

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은
방정식 $x^4=\sqrt{3}^{f(n)}$의 실근과 같다.
즉, 양의 실근을 a, 음의 실근을 $-a$라 하면
$a\times(-a) = -9$이므로 $a=3$이다.

$81=\sqrt{3}^{f(n)} \Rightarrow 81 = 3^{\frac{f(n)}{2}} \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{f(n)}{2}} \Rightarrow f(n)=8$
이므로
$-(n-2)^2+k=8 \Rightarrow (n-2)^2=k-8$를 만족시키는
자연수 n의 개수가 2이면 된다.

방정식 $(x-2)^2=k-8$이 서로 다른 자연수를 근으로
가지려면 $k-8=1$이어야 한다.



따라서 $k=9$이다.

답 ②

Tip 일반적으로 '자연수'는 문제에서 숨겨진 조건으로
출제되기 좋으니 주의하도록 하자.

5. ②

044

$x^n = -(n-k)^2+8$ 의 서로 다른 실근의 개수가 $f(n)$
$f(3)=1,\ f(5)=1,\ f(7)=1$ 이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$

$\Rightarrow f(4)+f(6)=4$

n이 짝수일 때, $f(n)=0$ or 1 or 2이므로
$f(4)=2,\ f(6)=2$이어야 한다.

$-(4-k)^2+8>0 \Rightarrow 8>(4-k)^2 \Rightarrow k=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$-(6-k)^2+8>0 \Rightarrow 8>(6-k)^2 \Rightarrow k=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$
이므로 $k=4,\ 5,\ 6$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은
$4+5+6=15$이다.

답 ②

6. 24

046

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각 실근은 중근

n이 홀수이면 중근이 최대 1개 존재하므로 (가) 조건을 만족시킬 수 없다.
즉, n은 짝수이므로 방정식 $x^n-64=0 \Rightarrow x^n=64$의 두 실근은 $-\sqrt[n]{64},\ \sqrt[n]{64}$ 이다.

(가) 조건을 만족시키려면 $f(x)=(x-a)(x-b)\ (a<b)$라 할 때, $b=\sqrt[n]{64}=2^{\frac{6}{n}},\ a=-\sqrt[n]{64}=-2^{\frac{6}{n}}$ 이어야 한다.

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$는 $x=0$에서 최솟값을 가지므로
최솟값은 $f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$ 이다.

$f(x)$의 최솟값 $-2^{\frac{12}{n}}$은 음의 정수이고, n은 짝수이므로
$n=2,\ 4,\ 6,\ 12$이다.
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+4+6+12=24$이다.

답 24

Theme 2 비례상수 Technique $(=k)$

7. 75

048

$a,\ b,\ c,\ k>0$

$3^a=5^b=k^c=z$라 두면

$3=z^{\frac{1}{a}},\ 5=z^{\frac{1}{b}},\ k=z^{\frac{1}{c}}$

$\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

$\Rightarrow \log c=\log\dfrac{2ab}{2a+b} \Rightarrow c=\dfrac{2ab}{2a+b}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{c}=\dfrac{2a+b}{2ab} \Rightarrow \dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a}$

$z^{\frac{1}{c}}=z^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{2a}}\times z^{\frac{1}{b}} \Rightarrow k=\sqrt{3}\times 5=5\sqrt{3}$

따라서 $k^2=25\times 3=75$이다.

답 75

Tip 놀랍게도 이 문제의 정답률이 9% 였다.
$=k$을 쓰면 손쉽게 구할 수 있는 문제임에도 말이다. $a,\ b,\ c,\ d$가 아니라 $a,\ b,\ c,\ k$ 라는 문자를 쓴 것은 $=k$ 테크닉을 쓸 때 약간의 당혹감을 주고자 하는 평가원의 의도로 보인다.
당황하지 말고 $=z$로 두면 된다.

8. ①

039

$\log_a b=\dfrac{1}{2}\log_b c=\dfrac{1}{4}\log_c a$

$\Rightarrow \log_a b=\log_b\sqrt{c}=\log_c\sqrt[4]{a}$

$\log_a b=\log_b\sqrt{c}=\log_c\sqrt[4]{a}=k$라 두면

$b=a^k$

$\sqrt{c}=b^k \Rightarrow c^{\frac{1}{2}}=b^k \Rightarrow c^{\frac{1}{2k}}=b$

$\sqrt[4]{a}=c^k \Rightarrow a^{\frac{1}{4}}=c^k \Rightarrow c^{4k}=a$

$b=a^k \Rightarrow c^{\frac{1}{2k}}=c^{4k^2} \Rightarrow \dfrac{1}{2k}=4k^2 \Rightarrow k^3=\dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$ (k는 실수)

$a=c^2,\ b=c$이므로

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_{c^2}c+\log_c c+\log_c c^2$
$=\dfrac{1}{2}+1+2=\dfrac{7}{2}$

답 ①

다르게 풀어보자.

$\log_a b=\dfrac{1}{2}\log_b c=\dfrac{1}{4}\log_c a$

$\Rightarrow \log_a b=k,\ \log_b c=2k,\ \log_c a=4k$

$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=\dfrac{\log b}{\log a}\times\dfrac{\log c}{\log b}\times\dfrac{\log a}{\log c}=1$

이므로 $k\times 2k\times 4k=1 \Rightarrow 8k^3=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$이다.

Theme 3 자연수 및 정수 조건

9. ①

047

$\frac{1}{3}+\log\sqrt{a}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a$ 의 값이 자연수가 되어야 한다.

$\frac{1}{2}<\log a<\frac{11}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{2}\log a<\frac{11}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a<\frac{1}{3}+\frac{11}{4}$

$\Rightarrow \frac{7}{12}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a<\frac{37}{12}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a$가 될 수 있는 값은 1, 2, 3뿐이다.

① $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a=1 \Rightarrow \log a=\frac{4}{3} \Rightarrow a=10^{\frac{4}{3}}$

② $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a=2 \Rightarrow \log a=\frac{10}{3} \Rightarrow a=10^{\frac{10}{3}}$

③ $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a=3 \Rightarrow \log a=\frac{16}{3} \Rightarrow a=10^{\frac{16}{3}}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\times10^{\frac{10}{3}}\times10^{\frac{16}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{10}{3}+\frac{16}{3}}=10^{\frac{30}{3}}=10^{10}$이다.

답 ①

10. 13

052

$\log_4 2n^2-\log_4\sqrt{n}=\log_4\frac{2n^2}{\sqrt{n}}=m$ (m은 40이하의 자연수)

$2n\sqrt{n}=4^m \Rightarrow n^{\frac{3}{2}}=2^{2m-1} \Rightarrow n=2^{\frac{4m-2}{3}}$

n이 자연수가 되려면 $m=2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$ 이므로

$m=3k-1$ $(k=1,\ 2,\ 3\cdots)$이다.

m은 40 이하이므로 $1\le k\le 13$

m과 n은 일대일대응이므로

조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 13이다.

답 13

Theme 4 그래프의 평행이동과 대칭이동

11. ③

054

$y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동

$x \to x-m$

$y=2^{x-m}+2$

$y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동

$x \to x-2$

$y=\log_2 8(x-2)=\log_2 8+\log_2(x-2)=3+\log_2(x-2)$

$y=2^{x-m}+2$와 $y=3+\log_2(x-2)$가 $y=x$대칭이므로

$y=2^{x-m}+2$를 $y=x$ 대칭하면

$x \to y,\ y \to x$

$x=2^{y-m}+2 \Rightarrow x-2=2^{y-m} \Rightarrow \log_2(x-2)=y-m$

$\Rightarrow y=m+\log_2(x-2)$ 이 $y=3+\log_2(x-2)$ 이므로

따라서 $m=3$이다.

답 ③

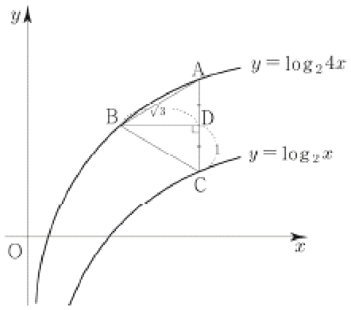
12. ③

101

$y=\log_2 4x=\log_2 x+2$이므로 정삼각형의 한 변의 길이는

2이다. $(\because \overline{AC}=2)$ 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의

발을 D라 할 때, 정삼각형의 높이 $\overline{BD}=\sqrt{3}$이다.



점 C의 x좌표를 t라 하면

$C(t,\ \log_2 t) \Rightarrow D(t,\ \log_2 t+1)$

$\overline{BD}=\sqrt{3}$이므로 점 B의 x좌표는 $t-\sqrt{3}$이므로

$B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$이다.

점 D와 점 B의 y좌표가 같으므로

$\log_2 4(t-\sqrt{3})=\log_2 t+1$

$\Rightarrow 4t-4\sqrt{3}=2t \Rightarrow t=2\sqrt{3}$

따라서 $B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p^2\times2^q=3\times2^{\log_2 4\sqrt{3}}=12\sqrt{3}$이다.

답 ③

13. ④

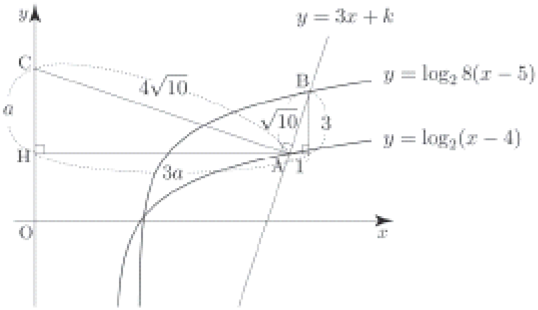
046

$y=\log_2 8(x-5)=\log_2(x-5)+3$ 는
$y=\log_2(x-4)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

이때 직선 AB의 기울기가 3이므로 043번에서 배웠던 논리에 의해 점 A를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 점 B와 같다.
즉, $\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

삼각형 ABC의 넓이가 20이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}=20 \Rightarrow \overline{AC}=\frac{40}{\sqrt{10}}=4\sqrt{10}$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
직선 AC의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{CH}=a$, $\overline{AH}=3a$
$\overline{AC}=\sqrt{a^2+9a^2}=a\sqrt{10}=4\sqrt{10} \Rightarrow a=4$



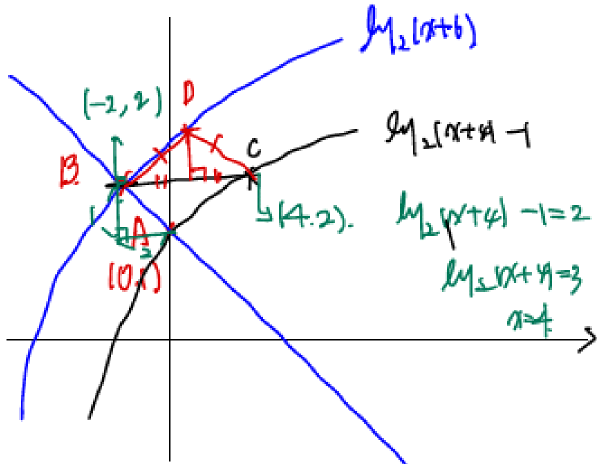
즉, 점 A의 좌표는 (12, 3)이다.
점 A는 직선 $y=3x+k$ 위에 있으므로 대입하면
$3=36+k \Rightarrow k=-33$ 이다.
따라서 $k=-33$ 이다.

답 ④

14. ①

12. 점 A(0, 1)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+6)$와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=\log_2(x+4)-1$와 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=\log_2(x+6)$ 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? [4점]

① $\log_2\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ② $\log_2 4\sqrt{2}$ ③ $\log_2\frac{9\sqrt{2}}{2}$
④ $\log_2 5\sqrt{2}$ ⑤ $\log_2\frac{11\sqrt{2}}{2}$



D의 x좌표는 $\frac{-2+4}{2}=1$

$\Rightarrow D(1, \log_2 7)$.

$\overline{AB}=\sqrt{5}$

$y=-\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow 2y=-x+2$

$-x-2y+2=0$

$(1, \log_2 7)$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{|-1-2\log_2 7+2|}{\sqrt{5}}$

$=\frac{1}{2}|1-2\log_2 7|$

$=\frac{2\log_2 7-1}{2}=\log_2 7-\frac{1}{2}$

$=\log_2\frac{7}{\sqrt{2}}=\log_2\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Theme 5 직선의 기울기와 길이

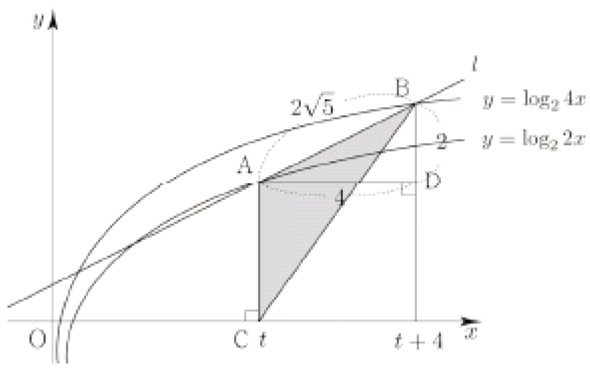
15. ⑤

082

A에서 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선에 내린수선의 발을 D라 하자.

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{BD} = x$라 하면

$\overline{AD} = 2x$, $\overline{BD} = x$이고 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$이므로 $x = 2$이다.
점 A의 x좌표를 t라 하면 점 D의 x좌표는 $t+4$이다.



점 A의 y좌표는 $\log_2 2t$이고,
점 B의 y좌표는 $\log_2 4(t+4)$이므로
$\log_2 2t + 2 = \log_2 4(t+4) \Rightarrow \log_2 8t = \log_2(4t+16)$

$\Rightarrow 4t = 16 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \overline{AC} = \log_2 8 = 3$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는
$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$이다.

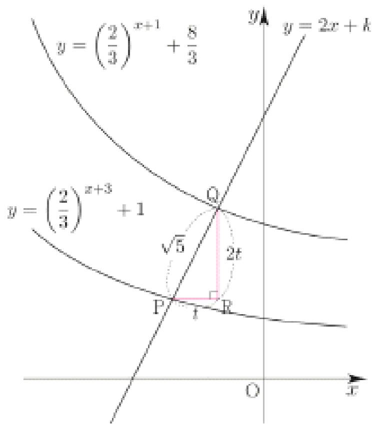
따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$이다.

답 ⑤

16. ④

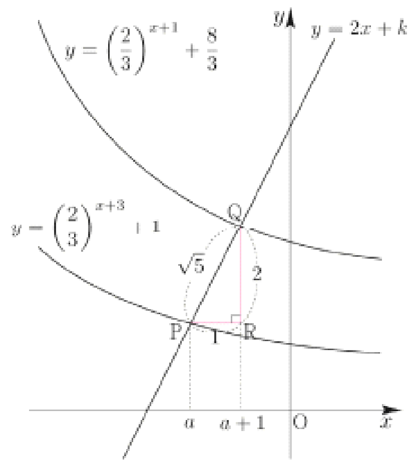
097

$\overline{PQ} = \sqrt{5}$이고, 직선 PQ의 기울기가 2이므로
보조선을 그으면 다음 그림과 같다.



$\overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2$

$\Rightarrow t^2 + 4t^2 = 5 \Rightarrow 5t^2 = 5 \Rightarrow t = 1 \ (\because t > 0)$



점 P의 x좌표를 a라 하면 점 Q의 x좌표는 $a+1$이고,
(점 P의 y좌표) + 2 = (점 Q의 y좌표)이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3} + 1 + 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} + \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} \Rightarrow a = -2$$

직선 $y=2x+k$가 점 $\mathrm{P}\left(-2,\ \frac{5}{3}\right)$를 지나므로

$-4+k=\frac{5}{3} \Rightarrow k=\frac{17}{3}$

따라서 상수 $k=\frac{17}{3}$이다.

답 ④

Tip **<잘못된 사고과정>**

문제를 보자마자 어? 이거 training-1step 043번에서 했었는데! 개꿀~

함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프는

함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로

2만큼, y축의 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼 평행이동한 것이니

training-1step 043번과 마찬가지로

$\overline{\mathrm{PR}}=2,\ \overline{\mathrm{QR}}=\frac{5}{3}$ 아닐까? 라고 판단할 수 있다.

하지만 이는 잘못된 판단이다.

training-1step 043번 해설에서도 명시했듯이

043번에서는 기울기가 맞아 떨어졌기에 가능했지만

097번에서는 $\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{\frac{5}{3}}{2}=\frac{5}{6}\neq 2$이므로

기울기가 같지 않아 성립하지 않는다.

초기접근에서 그렇게 생각할 수는 있으나

기울기를 확인해본 뒤 빠져나오는 것이 바람직하다.

만약 빠져나오지 않았다면 반성하도록 하자.

물론 기울기뿐만 아니라 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$도

만족시키지 않는다.

Theme 6 역함수 Technique

17. ①

067

$y=2^x-1$와 $y=\log_2(x+1)$은 $y=x$에 대하여 대칭되어 있다. 즉, $y=2^x-1$ 위의 점을 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이 된다.

이때 직선 AB의 기울기가 -1이므로 ($y=x$와 수직)

점 A와 B는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{A}(2,\ 3) \Rightarrow \mathrm{B}(3,\ 2)$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2+3)\times1=\frac{5}{2}$이다.

답 ①

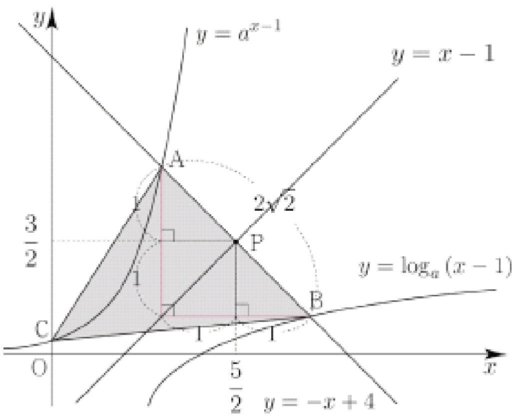
18. 192

$y=a^x$와 $y=\log_a x$는 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$는 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

$y=x-1$과 $y=-x+4$의 교점을 P라 하자.

$x-1=-x+4 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$이므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$



$\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이고, 이후 풀이는 동일하다.

$$a^{\frac{3}{2}-1}=\frac{5}{2} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2} \Rightarrow a=\frac{25}{4}$$

점 $\mathrm{C}\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$와 직선 $y=-x+4\ (x+y-4=0)$의

거리 d를 구하면

$$d=\frac{\left|\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{96}{25}=\frac{96}{25\sqrt{2}}$$

삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times d\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\frac{96}{25\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2}$

$$=\frac{96}{25}$$

따라서 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$이다.

답 192

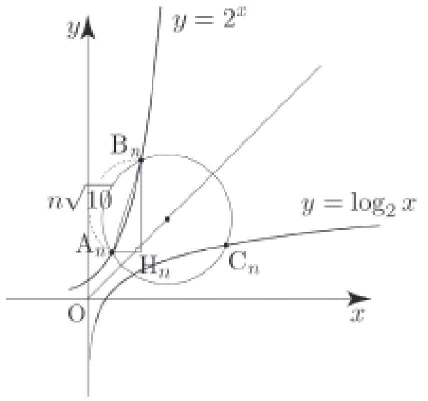
19. ⑤

104

점 A_n, 점 B_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n<b_n)$라 하면

$\mathrm{A}_n\left(a_n,\ 2^{a_n}\right)$, $\mathrm{B}_n\left(b_n,\ 2^{b_n}\right)$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 더 큰 점을 C_n이라 하자.



두 점 B_n, C_n은 서로 $y=x$에 대하여 대칭이므로

점 C_n의 x좌표인 x_n은 B_n의 y좌표인 2^{b_n}과 같다.

점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선과

점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 교점을

H_n이라 하자.

(가) 조건에 의해 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n}=t$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}=3t$이고

(나) 조건에 의해 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=t\sqrt{10}=n\sqrt{10} \Rightarrow t=n$

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n}=n$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}=3n$이므로

$b_n-a_n=n$, $2^{b_n}-2^{a_n}=3n$

$\Rightarrow 2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n \Rightarrow 2^{b_n}\left(1-2^{-n}\right)=3n$

$\Rightarrow 2^{b_n}=\frac{3n}{1-2^{-n}}$

즉, $x_n=\frac{3n}{1-2^{-n}}$이다.

따라서 $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}+\frac{6}{1-\frac{1}{4}}+\frac{9}{1-\frac{1}{8}}$

$$=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

이다.

답 ⑤

Theme 7 함숫값의 범위 Technique

20. ②

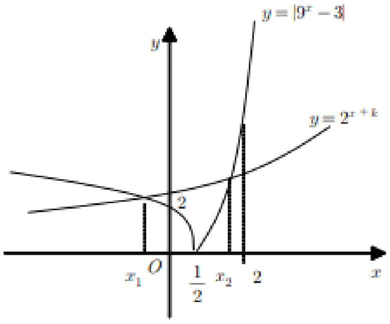
18. 출제의도 : 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|9^x-3|=0$ 에서 $9^x=3^{2x}=3$ 이므로

$x=\dfrac{1}{2}$

따라서, 두 곡선 $y=|9^x-3|$, $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2가 $x_1<0$, $0<x_2<2$ 를 만족시키는 경우는 그림과 같다.



즉, $x=0$일 때,

$2^{0+k}=2^k>2\cdots$㉠

$x=2$ 일 때,

$2^{2+k}=4\times 2^k<|9^2-3|=78$

$2^k<19.5\ \cdots$㉡

㉠,㉡을 만족시키는 자연수 k는

2, 3, 4

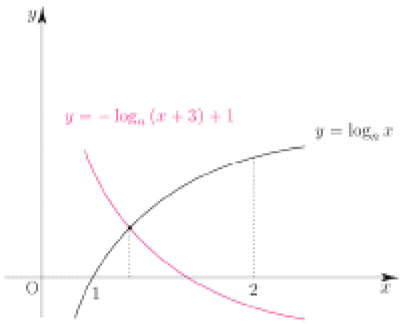
이므로 그 합은

$2+3+4=9$

정답 ②

21. ②

095



교점의 x좌표가 1보다 크려면

$-\log_n 4+1>0 \Rightarrow 1>\log_n 4 \Rightarrow n>4$

교점의 x좌표가 2보다 작으려면

$\log_n 2>-\log_n 5+1 \Rightarrow \log_n 10>1 \Rightarrow n<10$

따라서 모든 n의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$이다.

답 ②

22. 33

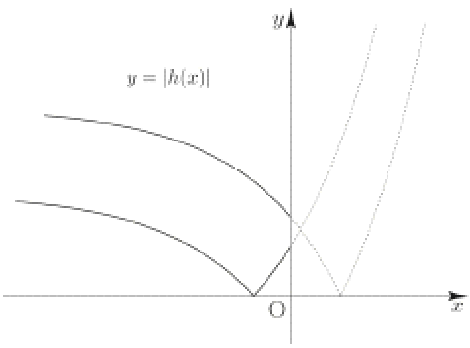
112

$h(x)=3^{x+2}-n,\ j(x)=\log_2(x+4)-n$라 하면 다음과 같다.

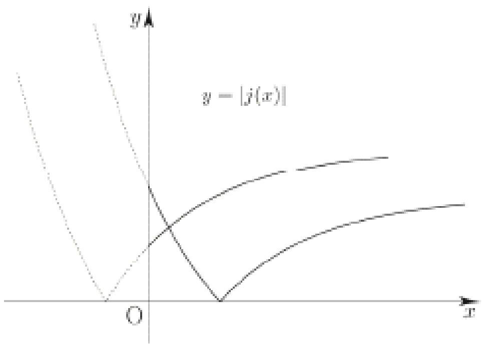
$$f(x)=\begin{cases} |h(x)| & (x<0) \\ |j(x)| & (x \ge 0) \end{cases}$$

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값이 4가 되도록 하려면 전제조건으로 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 것이 존재해야 한다.

함수 $h(x)$의 그래프의 y절편이 0 이하라고 가정해보자.



$x<0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수는 최대 1이므로 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 것이 존재하려면 $x \ge 0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수가 3인 것이 존재해야 한다.
하지만 n의 값을 어떻게 잡아도 $x \ge 0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수는 2 이하이므로 모순이다.
즉, $h(x)$의 그래프의 y절편은 0보다 커야 하므로
$9-n>0 \Rightarrow n<9 \cdots$ ㉠



$h(x)$의 그래프의 y절편이 0보다 크면
$x<0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수는 최대 2이므로 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 것이 존재하려면 $x \ge 0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수가 2인 것이 존재해야 한다.
이를 만족시키려면 $j(x)$의 그래프의 y절편이 0보다 작아야 하므로 $2-n<0 \Rightarrow 2<n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의해 조건을 만족시키는 n의 값의 범위는

$2<n<9$이므로 모든 자연수 n의 값의 합은
$3+4+5+6+7+8=33$이다.

답 33

Theme 8 지수함수와 로그함수의 그래프 해석

23. ①

10. 출제의도 : 로그의 성질과 로그방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
곡선 $y=\log_a(x+3)$이
곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점 A의 좌표를 구해 보자.
$\log_a(x+3)=\log_a(-x+3)$에서
$x+3=-x+3$
$x=0$
$x=0$일 때, $y=\log_a 3$이므로
점 A의 좌표는 $(0,\ \log_a 3)$이다.
곡선 $y=\log_a(x+3)$에서
$y=0$일 때

$\log_a(x+3)=0$
$x+3=1$
$x=-2$
그러므로 점 B의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.
곡선 $y=\log_a(-x+3)$에서
$y=0$일 때
$\log_a(-x+3)=0$에서
$-x+3=1$
$x=2$
그러므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
삼각형 ABC가 정삼각형이므로
원점을 O라 하면
$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$에서
$\sqrt{3}=\frac{\log_a 3}{2}$
$\log_a 3=2\sqrt{3}$
$a^{2\sqrt{3}}=3$
따라서
$a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

정답 ①

24. ①

12. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 삼각형의 넓이를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(t,\ a^{t}),\ \mathrm{B}(2t,\ a^{2t})$

이고 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(2t,\ 0)$이다.

또한 삼각형 ACB는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발 H는 선분 BC의 중점이다.

이때 $\mathrm{H}(2t,\ a^{t})$이므로

$2a^{t}=a^{2t}$

$a^{t}=2$ …… ㉠

이때 삼각형 ACB의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times(2t-t)\times a^{2t}=8$

$t\times(a^{t})^{2}=16$

㉠에서 $a^{t}=2$이므로

$t\times 2^{2}=16$

$t=4$

즉 $a^{4}=2$ 이고 $a>1$이므로

$a=2^{\frac{1}{4}}$

따라서

$a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times 4=2^{\frac{1}{4}+2}=2^{\frac{9}{4}}$

정답 ①

25. ④

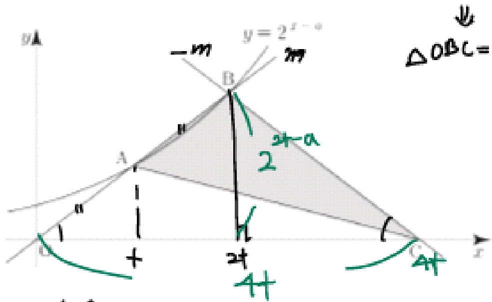
10. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-a}$ 위에 두 점 A, B가 있다. 직선 AB의 기울기를 m이라 할 때, 점 B를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 선분 OB의 중점이 A이고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3}{2}$일 때, 상수 a의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, O는 원점이다.) [4점]

① $\log_2\frac{5}{3}$ ② 1 ③ $\log_2\frac{7}{3}$ ④ $\log_2\frac{8}{3}$ ⑤ $\log_2 3$

$\triangle ABC=\frac{3}{2}$

$\Downarrow$ 2배

$\triangle OBC=3$



$2^{t-a}\times 2=2^{2t-a}$

2^{t-a+1}

$t-\cancel{a}+1=2t-\cancel{a}$

$t=1$

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times 4t\times 2^{2t-a}=3$

$\Rightarrow 2t\times 2^{2t-a}=3$

$2\times 2^{2-a}=3$

$2^{2-a}=\frac{3}{2}$

$2-a=\log_2\frac{3}{2}$

$a=2-\log_2\frac{3}{2}$

$a=\log_2 4\times\frac{2}{3}=\log_2\frac{8}{3}$

26. 73

22. 출제의도 : 로그함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B가 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 두 점 A, B를

$\mathrm{A}(a,\ \log_2 a),\ \mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$

(단, a, b는 양수)

로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서

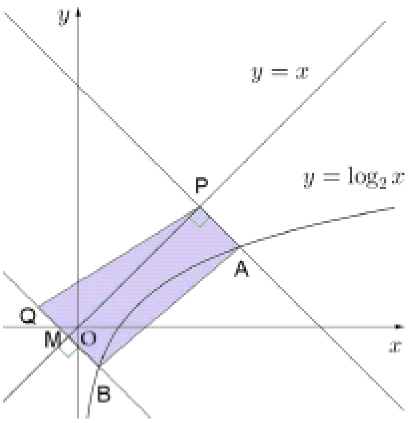
(직선 AP의 y절편)

$-$ (직선 BQ의 y절편)

$=\frac{13}{2}$

이므로 $a>b$이다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 점 P이므로 직선 AP의 기울기는 -1이다.
이때, 직선 AP의 방정식은
$y-\log_2 a=-(x-a)$
즉, $y=-x+a+\log_2 a$
이므로 직선 AP의 y절편은 $a+\log_2 a$이다.
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는 $(\log_2 b,\ b)$이고, 직선 BQ의 기울기는 -1이다.
이때, 직선 BQ의 방정식은
$y-\log_2 b=-(x-b)$
즉, $y=-x+b+\log_2 b$
이므로 직선 BQ의 y절편은 $b+\log_2 b$이다.
조건 (가)에 의하여
$(a+\log_2 a)-(b+\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$
이므로
$(a-b)+(\log_2 a-\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$ …… ㉠
한편, 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{6}{7}$이므로
$\dfrac{\log_2 a-\log_2 b}{a-b}=\dfrac{6}{7}$
$\log_2 a-\log_2 b=\dfrac{6}{7}(a-b)$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(a-b)+\dfrac{6}{7}(a-b)=\dfrac{13}{2}$
$\dfrac{13}{7}(a-b)=\dfrac{13}{2}$
$a-b=\dfrac{7}{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면
$\log_2 a-\log_2 b=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{7}{2}$
$\log_2\dfrac{a}{b}=3$
$\dfrac{a}{b}=2^3$
$a=8b$ …… ㉣
㉣을 ㉢에 대입하면
$8b-b=\dfrac{7}{2}$
$7b=\dfrac{7}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면
$a=8\times\dfrac{1}{2}=4$
직선 AP의 방정식은
$y=-x+6$
이고, 직선 AP와 직선 $y=x$의 교점이 점 P이므로
$-x+6=x$에서
$x=3$
즉 점 P의 좌표는 $(3,\ 3)$
한편, 세 점 A, B, Q는
$\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$
선분 BQ의 중점을 M이라 하면
$\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right)$이고 $\angle\mathrm{PMB}=90^\circ$이다.



이때

$\overline{AP}=\sqrt{(3-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{BQ}=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{PM}=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$

이므로 사각형 APQB의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\overline{PM}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{13\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{65}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=65$이므로

$p+q=8+65$

$=73$

정답 73

27. 65

$y=3^x$ $y=\log_3 x$ ⇒ $y=x$ 대칭

영역

$y=x+3$ 대칭.

22. 곡선 $y=3^x+3$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

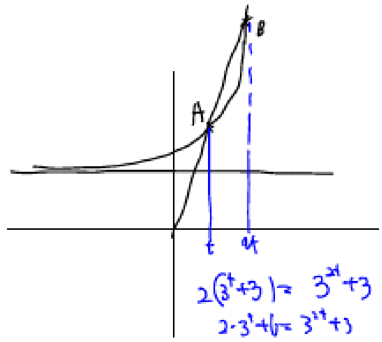
> (가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.
> (나) $\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_3 x+3$과 만나는 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_3 x+3$과 만나는 점을 D라 하자.

사각형 ACDB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

65

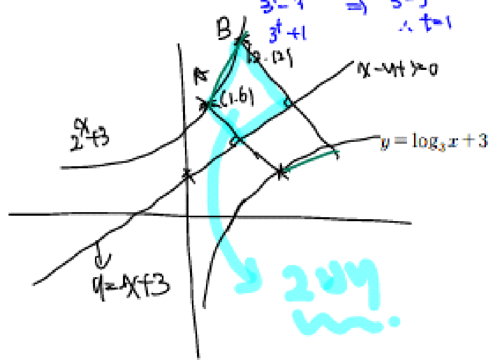


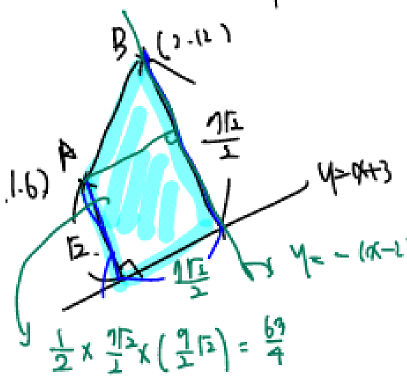
$2(3^t+3)=3^{2t}+3$

$2\cdot3^t+6=3^{2t}+3$

$3^{2t}-2\cdot3^t-3=0$

3^t-3, 3^t+1 ⇒ $3^t=3$ ∴ $t=1$





$2=12+3$

$\frac{7}{\sqrt2}$

$y=-(x-2)+12 ⇒ y=-x+14$

$(1,6)$ $-x-y+14=0$

$\frac{|-1-6+14|}{\sqrt2}=\frac{7}{\sqrt2}$

$\frac{1}{2}\times\frac{7\sqrt2}{2}\times\left(\frac{9}{2}\sqrt2\right)=\frac{63}{4}$

20

∴ ACDB $=\frac{63}{2}$

65

28. ③

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 같으므로

$\overline{OA}=\overline{AB}$이다.

점 A는 선분 OB의 중점이고 점 B의 x좌표가

t이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{t}{2}$이다.

직선 AB는 점 O를 지나므로

두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

그러므로 $\dfrac{\log_a \frac{t}{2}-0}{\frac{t}{2}-0}=\dfrac{\log_a t-0}{t-0}$에서

$\log_a t=\log_a 4,\ t=4$

점 A는 두 곡선 $y=\log_a x,\ y=-2\log_a x+k$가

만나는 점이므로 $\log_a 2=-2\log_a 2+k$에서

$k=3\log_a 2$

점 B의 좌표는 $(4,\ 2\log_a 2)$,

점 C의 좌표는 $(4,\ -\log_a 2)$에서

$\overline{BC}=2\log_a 2-(-\log_a 2)=3\log_a 2$

삼각형 ACB의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times 2=3\log_a 2=2$에서 $a=2\sqrt{2},\ k=2$

따라서 $a\times k\times t=2\sqrt{2}\times 2\times 4=16\sqrt{2}$

Theme 9 그래프를 이용한 추론

29. ②

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y=|2^x-4|$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 0\}$,

함수 $y=a+\log_2 x$의 치역이 실수 전체의 집합이고 함수 $f(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$p\le 0$ …… ㉠

$p<x<q$에서 $f(x)=a+\log_2 x$이고

함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

$p\ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=0$

$\{f(x)\,|\,x\le 0\}=\{y\,|\,3\le y<4\}$

함수 $f(x)$가 일대일대응이므로

$\{f(x)\,|\,x>0\}=\{y\,|\,y<3$ 또는 $y\ge 4\}$이고

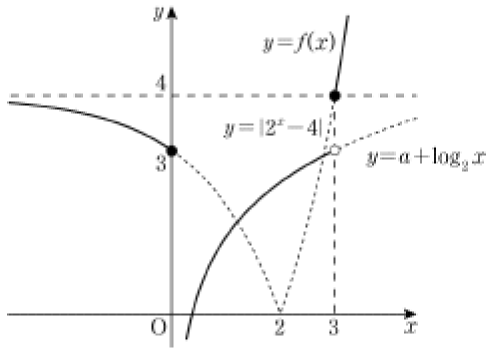
$\{f(x)\,|\,0<x<q\}=\{y\,|\,y<a+\log_2 q\}=\{y\,|\,y<3\}$,

$\{f(x)\,|\,x\ge q\}=\{y\,|\,y\ge 4\}$이다.

$|2^q-4|=4$에서 $q=3$

$a+\log_2 3=3,\ a=3-\log_2 3$

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\log_2 3+\log_2\frac{3}{2}$$
$$=3-\log_2 3+\log_2 3-1=2$$



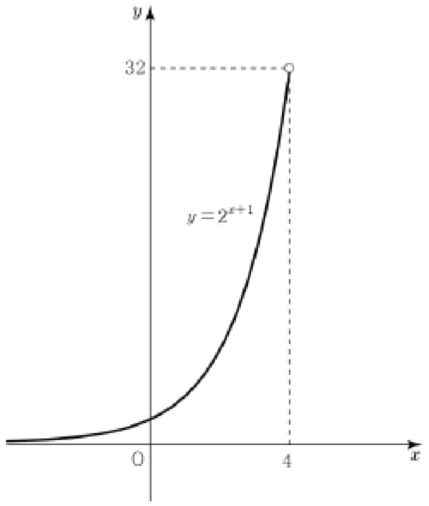
30. 24

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$$g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & (x < 4) \\ 2f(x) & (x > 4) \end{cases}$$

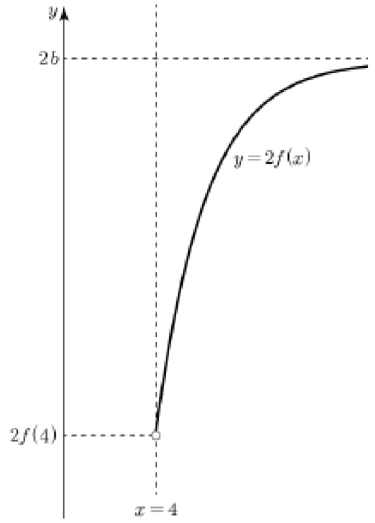
(i) $x < 4$ 인 경우

함수 $y = 2^{x+1}$ 의 그래프는
직선 $y = 0$ 을 점근선으로 가지므로
함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(ii) $x > 4$ 인 경우

함수 $y = 2f(x)$ 의 그래프는
직선 $y = 2b$ 를 점근선으로 가지므로
함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건을 만족시키기 위해서는

$2b = 32$, $b = 16$

$2f(4) = -2^{a-3} + 2b$

$= -2^{a-3} + 32 = 0$

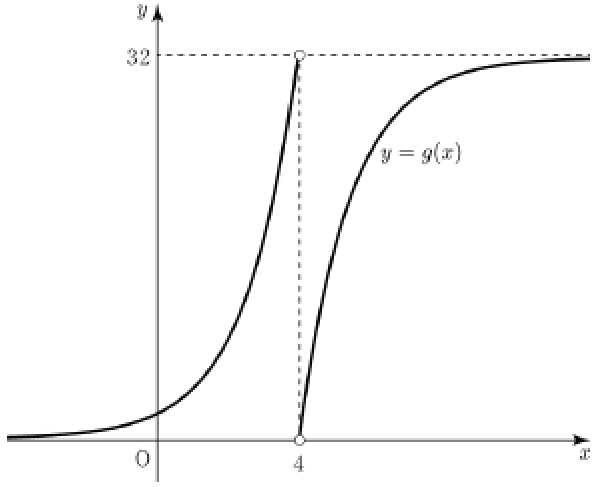
$2^{a-3} = 2^5$, $a = 8$

$$g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & (x < 4) \\ -2^{-x+9} + 32 & (x > 4) \end{cases}$$

따라서 $g(6) = -2^3 + 32 = 24$

[참고]

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



Theme 10 단순 수식 접근형

31. ④

047

$P(\log_5 3)$, $Q(\log_5 12)$

$\overline{PQ}$를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{(1-m)P+mQ}{1-m+m}=\frac{(1-m)P+mQ}{1}=1$$

$\Rightarrow (1-m)\log_5 3+m\log_5 12=1$

$\Rightarrow \log_5 3+m(-\log_5 3+\log_5 12)=1$

$\Rightarrow \log_5 3+m\log_5 4=1 \Rightarrow m\log_5 4=1-\log_5 3$

$\Rightarrow m=\dfrac{\log_5\frac{5}{3}}{\log_5 4}=\log_4\dfrac{5}{3}$

따라서 $4^m=4^{\log_4\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$이다.

답 ④

32. ⑤

079

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.

$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a) \Rightarrow \log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$

$\Rightarrow \log_2\{-x(x+2a)\}=0 \Rightarrow -x(x+2a)=1$

$\Rightarrow x^2+2ax+1=0 \cdots$ ㉠

㉠의 두 실근이 x_1, x_2이므로 근과 계수의 관계에 의해

$x_1+x_2=-2a$, $x_1x_2=1$이다.

이때 $y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$

$=-\log_2 x_1x_2=-\log_2 1=0$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\dfrac{2a}{2},\ 0\right) \Rightarrow (-a,\ 0)$

이다. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있으므로

$-4a+5=0 \Rightarrow a=\dfrac{5}{4}$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$x^2+\dfrac{5}{2}x+1=0 \Rightarrow 2x^2+5x+2=0 \Rightarrow (x+2)(2x+1)=0$

$\Rightarrow x=-2$ or $x=-\dfrac{1}{2}$

즉, 두 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$이다.

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2}=\dfrac{5}{2}$이다.

답 ⑤

33. ④

8. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ \log_8 a)$, $(4,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 기울기가 $\log_2\sqrt[6]{a}$일 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq 1$) [3점]

$\frac{1}{6}\log_2 a$

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

$$\frac{\log_2 b-\log_8 a}{4-2}=\frac{1}{6}\log_2 a$$

$$\log_2 b-\frac{1}{3}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 a$$

$$\log_2 b=\frac{2}{3}\log_2 a$$

$$b=a^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$$

Theme 11 함수의 최댓값과 최솟값

34. 21

058

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$의

최댓값은 27, 최솟값은 m

$f(x)$는 감소함수이므로

$x=2$일 때, 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-a}=27$이다.

$3^{-4+a}=3^3 \Rightarrow a=7$

$x=3$일 때, 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{6-7}=3$이다.

따라서 $a\times m=21$이다.

답 21

35. ①

060

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$

$=\log_2 x\times(2-\log_4 x)=2\log_4 x\times(2-\log_4 x)$

$=4\log_4 x-2(\log_4 x)^2$

$\log_4 x=t$라 치환하면

(치환하면 범위조심 $1<x<16 \Rightarrow 0<t<2$)

$0<t<2$에서 $4t-2t^2$는 $t=1$에서 최댓값 2를 가지므로

$M=2$이고 $t=1 \Rightarrow a=4$

따라서 $a+M=6$이다.

답 ①

Theme 12 방정식과 부등식

36. 12

035

진수조건 $x>0,\ 2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$\log_2 x=2\log_4 x$이므로

$2\log_4 x=\log_4 4+\log_4(2x-3)$

$\Rightarrow \log_4 x^2=\log_4(8x-12)$

$x^2=8x-12 \Rightarrow x^2-8x+12=0$

$\Rightarrow (x-6)(x-2)=0 \Rightarrow x=2$ or $x=6$

2와 6 모두 $\frac{3}{2}$보다 크므로 조건을 만족시킨다.

따라서 모든 실수 x값의 곱은 12이다.

답 12

37. ①

051

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}\\ \log_2 4x<\log_2(x+k)\end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-4}$

$\Rightarrow 1-x<4x-4 \Rightarrow 5<5x \Rightarrow 1<x$

진수조건 $x>0,\ x>-k \Rightarrow x>0\ (\because k>0)$

$\log_2 4x<\log_2(x+k) \Rightarrow 4x<x+k$

$\Rightarrow 3x<k \Rightarrow x<\frac{k}{3}$

진수조건까지 고려하면

$\therefore 0<x<\frac{k}{3}$

$1<x$와 $0<x<\frac{k}{3}$가 겹치지 않으려면

$\frac{k}{3}\le 1$이어야 하므로 $k\le 3$

따라서 양수 k의 최댓값은 3이다.

답 ①

38. ①

053

$(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$

다음과 같이 case분류해서 구할 수 있다.

① $2^x-32>0,\ \frac{1}{3^x}-27>0$

$2^x>2^5 \Rightarrow x>5$

$3^{-x}>3^3 \Rightarrow x<-3$

$x>5,\ x<-3$을 동시에 만족할 수 없으므로 모순이다.

② $2^x-32<0,\ \frac{1}{3^x}-27<0$

$2^x<2^5 \Rightarrow x<5$

$3^{-x}<3^3 \Rightarrow x>-3$

$-3<x<5 \Rightarrow x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로
따라서 모든 정수 x의 개수는 7이다.

답 ①

39. ④

072

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$

진수조건에 의해

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0,\ 75-kn>0$

$\Rightarrow -n^2+10n+75>0,\ 75-kn>0$

$\Rightarrow n^2-10n-75<0,\ 75-kn>0$

$\Rightarrow (n+5)(n-15)<0,\ 75-kn>0$

$\Rightarrow -5<n<15,\ n<\frac{75}{k}$

$\Rightarrow 1\le n\le 14,\ 1\le n<\frac{75}{k}$ ($\because$ n은 자연수)

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$

$\Rightarrow \log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$

$\Rightarrow \log_4\left(\frac{-n^2+10n+75}{75-kn}\right)>0$

$\Rightarrow \frac{-n^2+10n+75}{75-kn}>1$

$\Rightarrow -n^2+10n+75>75-kn$ ($\because$ $75-kn>0$)

$\Rightarrow n^2-10n-kn<0 \Rightarrow n(n-10-k)<0$

n과 k는 자연수이므로

$0<n<10+k \Rightarrow 1\le n\le 9+k$

주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이므로

$9+k\ge 12 \Rightarrow k\ge 3$

$1\le n\le 14,\ 1\le n<\frac{75}{k},\ 1\le n\le 9+k$를 동시에

만족시키는

자연수 n의 개수가 12이어야 한다.

k의 값에 따라 case분류하면

① $k=3$일 때

$1 \le n \le 14,\ 1 \le n < 15,\ 1 \le n \le 12$

$\Rightarrow 1 \le n \le 12$

자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

② $k=4$일 때

$1 \le n \le 14,\ 1 \le n < \frac{75}{4},\ 1 \le n \le 13$

$\Rightarrow 1 \le n \le 13$

자연수 n의 개수가 13이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

③ $k=5$일 때

$1 \le n \le 14,\ 1 \le n < 15,\ 1 \le n \le 14$

$\Rightarrow 1 \le n \le 14$

자연수 n의 개수가 14이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

④ $k=6$일 때

$1 \le n \le 14,\ 1 \le n < \frac{25}{2},\ 1 \le n \le 15$

$\Rightarrow 1 \le n < \frac{25}{2}$

자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

⑤ $k \ge 7$일 때

$1 \le n \le 14,\ 1 \le n < \frac{75}{k},\ 1 \le n \le 9+k$

$\Rightarrow 1 \le n < \frac{75}{k} < 11$

자연수 n의 개수가 12보다 작아 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 합은 $3+6=9$이다.

답 ④

Theme 13 지수방정식과 부등식의 치환

40. ⑤

065

방정식 $4^x - a \times 2^{x+1} + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구해보자.

$2^x = t\ \ (t>0)$라 치환하면

$t^2 - 2at + a^2 - a - 6 = 0$ 이다.

$t>0$인 실수 t가 결정되면 $2^x = t$를 만족시키는 x는 오직 하나 존재한다.

예를 들어 $t=2$라면 $2^x = 2$를 만족시키는 x는 오직 1뿐이다.

다시 말해

방정식 $4^x - a \times 2^{x+1} + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위를 물어보는 것은

방정식 $t^2 - 2at + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위를 물어보는 것과 같다. ($t>0$ 이므로 양의 실근이다.)

$t^2 - 2at + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근이 나오기 위해서는

① $\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 - a - 6) > 0 \Rightarrow a > -6$

② 두 근의 합이 양수

근과 계수의 관계에 의해

$2a > 0 \Rightarrow a > 0$

③ 두 근의 곱이 양수

근과 계수의 관계에 의해

$a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) > 0$

$\Rightarrow a < -2$ or $a > 3$

따라서 ①, ②, ③을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는
$a>3$이다.

답 ⑤

Tip 1

물론 66번과 같이 함판대를 이용하여 구해도 된다.

① 함숫값
$f(0)>0 \Rightarrow a^2-a-6>0$
$\Rightarrow (a-3)(a+2)>0$
$\Rightarrow a<-2$ or $a>3$

② 판별식
$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-a-6)>0 \Rightarrow a>-6$

③ 대칭축
대칭축은 $t=a$이므로 $a>0$

따라서 ①, ②, ③을 동시에 만족하는
a의 값의 범위는 $a>3$이다.

Tip 2

위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.
(함판대를 쓰는 이유까지 설명)

065번 해설강의

https://youtu.be/tP5ZmA2LWyY

41. ②

066

$5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을
갖도록 하는 정수 k의 개수

$5^x=t\,(t>0)$라 치환하면
$t^2-5t+k=0$이다.

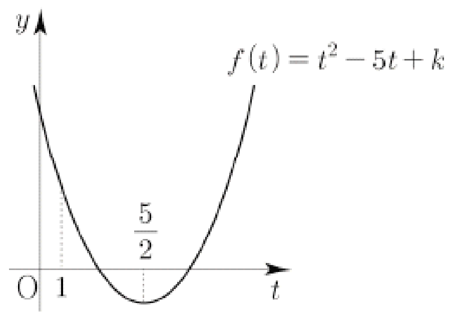
$5^x=t$의 관계에서
$x>0$이 되려면 $t>1$이어야 한다.

다시 말해
방정식 $5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을

갖도록 하는 정수 k의 개수를 물어보는 것은

방정식 $t^2-5t+k=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을
갖도록 하는 정수 k의 개수를 물어보는 것과 같다.

방정식 $t^2-5t+k=0$의 두 실근이 모두 1보다 크려면
함숫값, 판별식, 대칭축을 따지면 된다.
$f(t)=t^2-5t+k$라 하면 아래 그림과 같다.



① 함숫값
$f(1)>0 \Rightarrow -4+k>0 \Rightarrow k>4$

② 판별식
$D=25-4k>0 \Rightarrow \frac{25}{4}>k$

③ 대칭축
대칭축은 $t=\frac{5}{2}$이므로
$1<\frac{5}{2}$

따라서 $4<k<\frac{25}{4} \Rightarrow k=5,\ 6$이므로
정수 k의 개수는 2이다.

답 ②

2. 삼각함수

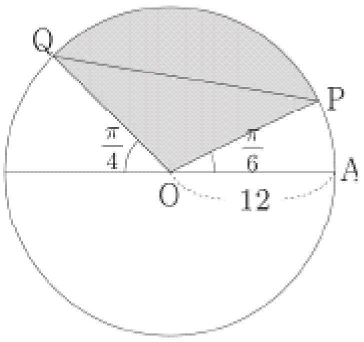
Theme 14 부채꼴의 호의 길이와 넓이

42. 42

013

중심이 O이고 반지름의 길이가 12인 원 위에 점 A가 있다. 반직선 OA를 시초선으로 했을 때, 두 각 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{13}{4}\pi$가 나타내는 동경이 이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

$-\frac{13}{4}\pi=-2\pi-\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $-\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$와 동경이 같다. 시계방향으로 $\pi+\frac{\pi}{4}$만큼 회전해서 동경 OQ를 나타내면 다음과 같다.



$\angle\mathrm{POQ}=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{12}\pi$이므로

선분 PQ를 포함하는 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 12^2\times\frac{7}{12}\pi=42\pi$이다.

따라서 k는 42이다.

답 42

43. 45

014

호 AB의 길이가 3π, 넓이가 18π인 부채꼴 OAB

$\frac{1}{2}\times r\times 3\pi=18\pi\ \Rightarrow\ r=12$

$\angle\mathrm{AOC}=\theta$일 때, $12\theta=3\pi\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{4}$

$\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\sin\frac{\pi}{4}=\overline{\mathrm{CA}}=6\sqrt{2}$이다.

삼각형 OAC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CA}}=6\sqrt{2}$이다.

호 CD와 두 선분 AD, AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 S=(삼각형 OAC의 넓이) − (부채꼴 OCD의 넓이)이다.

삼각형 OAC의 넓이 $=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2})^2=36$

부채꼴 OCD의 넓이 $=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}=9\pi$

$S=36-9\pi$이므로 따라서 $a+b=45$이다.

답 45

Theme 15 삼각함수의 뜻

44. ⑤

043

직선 $y=2$가 두 원 $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2=9$와 제 2사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하였다.

$x^2+4=5\ \Rightarrow\ x=-1\ \ (x<0)$이므로 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$

$x^2+4=9\ \Rightarrow\ x=-\sqrt{5}\ \ (x<0)$이므로 $\mathrm{B}(-\sqrt{5},\ 2)$

$\angle\mathrm{COA}=\alpha$, $\angle\mathrm{COB}=\beta$

삼각함수의 정의에 의해서

$\left(\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\right)$

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\sin\alpha\times\cos\beta=-\frac{2}{3}$이다.

답 ⑤

Tip 삼각함수의 정의로 푸는 것이 낯설었다면 아래강의를 참고하도록 하자.

삼각함수의 정의 (8분)
t1 043번 해설강의
https://youtu.be/qK-bUKw3YA4

Theme 16 삼각함수 사이의 관계

45. ④

037

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{49}{25} \Rightarrow \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\frac{7}{5}$

$\Rightarrow |\sin\theta-\cos\theta|=\frac{7}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0 \Rightarrow \sin\theta-\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$

답 ④

46. ①

040

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$

$\Rightarrow \sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)=4(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta+\sin^2\theta-\sin\theta+\sin^2\theta=4-4\sin^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\frac{2}{3}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이고 $\cos^2\theta=\frac{1}{3}$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ①

47. ①

041

$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$

$\Rightarrow \tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$\Rightarrow (\tan\theta-3)(\tan\theta+2)=0$

$\Rightarrow \tan\theta=3 \left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi \Rightarrow \tan\theta>0\right)$

θ는 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=3$이므로

core 해석법을 쓰면 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$이다.

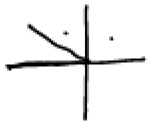
따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$이다.

답 ①

48. ①

$-\cos\theta<0 \Rightarrow \cos\theta>0$

$-\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$



6. $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)<0$이고 $\sin\theta=2\cos(\pi-\theta)$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

$-2\cos\theta$

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta>0$. $\tan\theta=-2$.

$\therefore \sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

49. ④

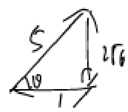
5. $\sin\theta<0$이고 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-3\sqrt{6}$ ② $-2\sqrt{6}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

$-\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{5}$

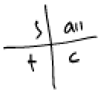
$-\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\cos\theta=-\frac{1}{5}$



$\sin\theta<0$
$\cos\theta<0$
3사분면 →

$\tan\theta=2\sqrt{6}$

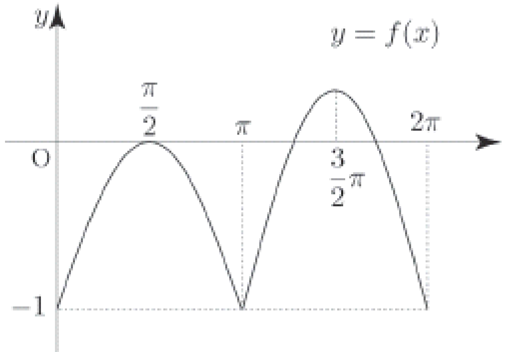


Theme 17 삼각함수의 방정식과 부등식

50. 15

097

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & (0\le x<\pi) \\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi) \end{cases}$$



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 $f(t)=-1$ or $f(t)=0$이어야 한다.

① $f(t)=-1$ $(0\le t\le 2\pi)$

$t=0,\ t=\pi,\ t=2\pi$

② $f(t)=0$ $(0\le t\le 2\pi)$

$f(x)=0$ $(\pi<x<2\pi)$의 실근을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하자.

$t=\frac{\pi}{2},\ t=\alpha,\ t=\beta$

대칭성에 의해서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi\times 2=3\pi$

①, ②에 의해

모든 t의 값의 합은 $0+\pi+2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta=\frac{13}{2}\pi$이다.

따라서 $p+q=15$이다.

답 15

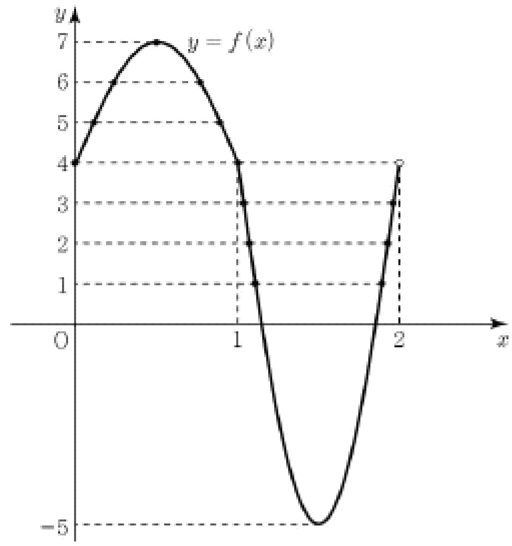
51. ③

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$$f(x)=\begin{cases} 3\sin\pi x+4 & (0\le x<1) \\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2) \end{cases}$$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4$, $y=9\sin\pi x+4$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는 13

52. 32

070

$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ 이므로

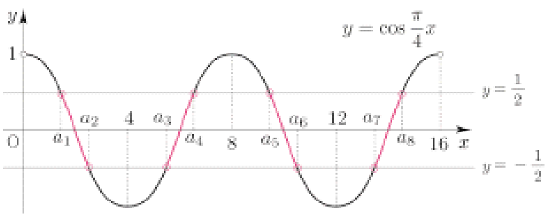
$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{4}<0$

$\Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}\right)<0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$



$\cos\frac{\pi}{4}x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}a_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow a_1=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$

$\cos\frac{\pi}{4}x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}a_2=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow a_2=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$

(만약 위 풀이가 이해가 잘 되지 않는다면
046번 해설에서 배운 실전적인 방법을 정독하고
오도록 하자.)

대칭성에 의하여

$a_2+a_3=2\times4 \Rightarrow a_3=\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}$

$a_1+a_4=2\times4 \Rightarrow a_4=\frac{20}{3}=6+\frac{2}{3}$

주기성에 의해서

$a_5=a_1+8=9+\frac{1}{3}$, $a_6=a_2+8=10+\frac{2}{3}$

$a_7=a_3+8=13+\frac{1}{3}$, $a_8=a_4+8=14+\frac{2}{3}$

$0<x<16$에서 부등식 $-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$를 만족시키는
x의 범위는 다음과 같다.

$1+\frac{1}{3}<x<2+\frac{2}{3}$ or $5+\frac{1}{3}<x<6+\frac{2}{3}$
or $9+\frac{1}{3}<x<10+\frac{2}{3}$ or $13+\frac{1}{3}<14+\frac{2}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은
$2+6+10+14=32$이다.

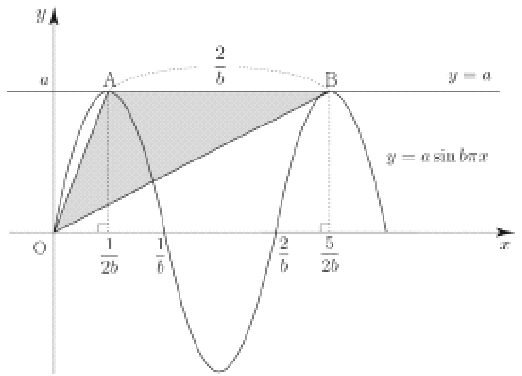
답 32

53. ③

078

$y = a\sin b\pi x \left(0 \le x \le \dfrac{3}{b}\right)$

곡선 $y = a\sin b\pi x \left(0 \le x \le \dfrac{3}{b}\right)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b\pi} = \dfrac{2}{b}$



삼각형 OAB의 넓이 $= \dfrac{1}{2} \times a \times \dfrac{2}{b} = \dfrac{a}{b} = 5 \Rightarrow a = 5b \ \cdots$ ㉠

직선 OA의 기울기 $= \dfrac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$

직선 OB의 기울기 $= \dfrac{a}{\frac{5}{2b}} = \dfrac{2ab}{5}$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\dfrac{5}{4}$이므로

$2ab \times \dfrac{2ab}{5} = \dfrac{4}{5}a^2b^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow a^2b^2 = \dfrac{25}{16} \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$25b^4 = \dfrac{25}{16} \Rightarrow b^4 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$

㉠에 의해 $a = \dfrac{5}{2}$

따라서 $a + b = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$이다.

답 ③

54. ③

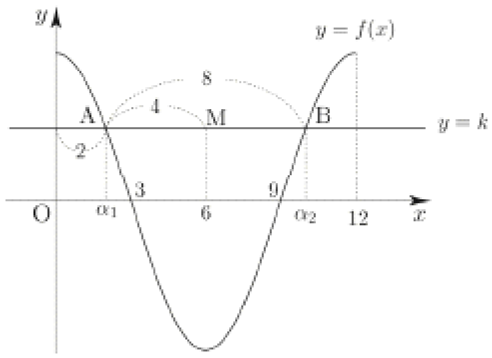
081

$y = f(x)$의 주기는 12

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = k$가 만나는 두 점을

A, B라 하고, 두 점 A, B의 중점을 M이라 하자.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α_1, α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$라 하자.



$|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$이므로 대칭성에 의해서 $\overline{AM} = 4$이고,

점 M의 x좌표가 6이므로 $\alpha_1 = 6 - 4 = 2$이다.

점 A는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$f(2) = k \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{3} = k \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$이다.

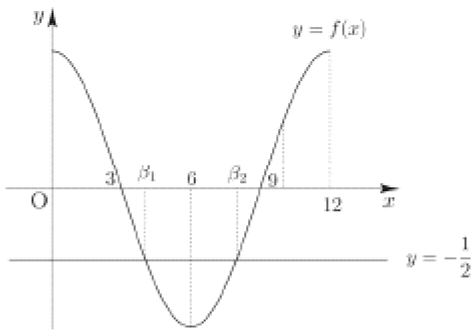
곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = \dfrac{1}{2}$가 만나는 두 점의

x좌표는 방정식 $g(x) = \dfrac{1}{2}$의 근과 같다.

$g(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow -3\cos\dfrac{\pi x}{6} - 1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{1}{2}$

이므로 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -\dfrac{1}{2}$이 만나는

두 점의 x좌표는 β_1, β_2 $(\beta_1 < \beta_2)$이다.



$\cos\dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi\beta_1}{6} = \dfrac{2}{3}\pi \Rightarrow \beta_1 = 4$

(만약 위 풀이가 이해가 잘되지 않는다면 046번 해설에서 배운 실전적인 방법을 정독하고 오도록 하자.)

대칭성에 의해서 $2 \times 6 = \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 12 - \beta_1 = 8$이다.

따라서 $|\beta_1 - \beta_2| = 4$이다.

답 ③

55. ①

096

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 5=\frac{15}{2} \Rightarrow \overline{AB}=3$

$\overline{BC}=\overline{AB}+6$이므로 $\overline{BC}=9$

$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1 \left(0\le x\le \frac{5}{2}b\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로

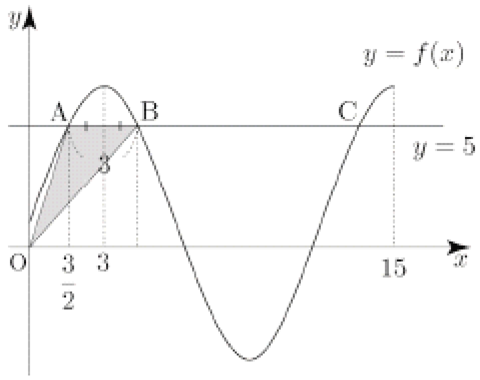
$2b=\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=3+9=12 \Rightarrow b=6$

$f(x)=a\sin\frac{\pi}{6}x+1\ (0\le x\le 15)$

선분 AB의 중점의 x좌표는 $f(x)$의 주기의 $\frac{1}{4}$이므로 3이다.

이때, $\overline{AB}=3$이므로 대칭성에 의해서 점 A의 x좌표는

$3-\frac{\overline{AB}}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$이다.



즉, $A\left(\frac{3}{2},\ 5\right)$이고 점 A는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=5 \Rightarrow a\sin\frac{\pi}{4}+1=5 \Rightarrow a=4\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=32+36=68$이다.

답 ①

56. 243

20. $0\le x\le\frac{1}{12}$일 때, x에 대한 방정식

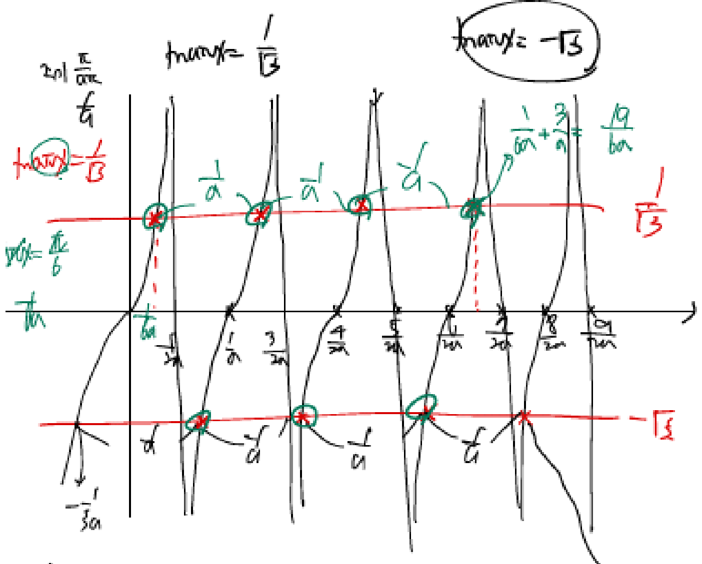
$$(\sqrt{3}\sin a\pi x-\cos a\pi x)(\sin a\pi x+\sqrt{3}\cos a\pi x)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 7이 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

243

$\sqrt{3}\sin a\pi x=\cos a\pi x$ $\quad$ $\sin a\pi x=-\sqrt{3}\cos a\pi x$

$\tan a\pi x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\tan a\pi x=-\sqrt{3}$



$\tan a\pi x=-\sqrt{3}$

$a\pi x=-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{1}{3a}$

$-\frac{1}{3a}+\frac{4}{a}=\frac{-1+12}{3a}=\frac{11}{3a}$

$\frac{19}{6a}\le\frac{1}{12}<\frac{11}{3a}$

$19\le\frac{6a}{12}<22$

$38\le a<44$

38, 39, 40, 41, 42, 43

$\frac{6(38+43)}{2}$ $\quad$ 81×3

243

20

57. ④

098

$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$

(가) 조건에서

$\{g(a\pi)\}^2=1 \Rightarrow \sin a\pi=1$ or $\sin a\pi=-1$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ or $a=\frac{3}{2}$ $(\because\ 0\le a\le 2)$

(나) 조건에서

방정식 $f(g(x))=0\ (0\le x\le 2\pi)$

$g(x)=t$라 하자.

만약 방정식 $f(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이라면

방정식 $\sin x=t$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$가 될 수 없으므로

모순이다.

즉, 방정식 $f(t)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 하고,

그 두 실근을 $t_1,\ t_2$라 하자.

방정식 $\sin x=t_1$와 $\sin x=t_2$의 모든 실근의 합이

$\frac{5}{2}\pi$가 되려면 $t_1=-1,\ 0<t_2<1$이어야 한다.

a의 값에 따라 case분류하면

① $a=\frac{1}{2}$

$f(-1)=0$이어야 하므로

$1-a+b=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

방정식 $f(t)=0$의 두 실근을 구하면

$t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2t^2+t-1=0$

$\Rightarrow (2t-1)(t+1)=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$ or $t=-1$

즉, $t_1=-1,\ 0<t_2<1$를 만족시킨다.

② $a=\frac{3}{2}$

$f(-1)=0$이어야 하므로

$1-a+b=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$

방정식 $f(t)=0$의 두 실근을 구하면

$t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2t^2+3t+1=0$

$\Rightarrow (2t+1)(t+1)=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$ or $t=-1$

즉, $t_1=-1,\ 0<t_2<1$를 만족시키지 않는다.

①, ②에 의해서

$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(2)=4+1-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이다.

답 ④

58. 3

053

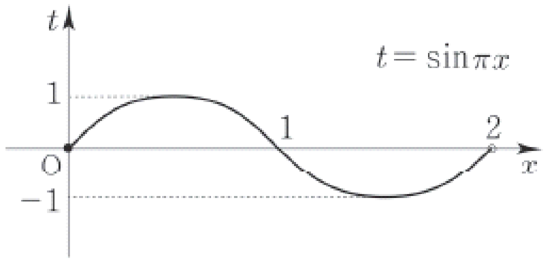
방정식 $2\cos^2\pi x - 2\sin\pi x + 2a - 3 = 0$ $(0 \le x < 2)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3

$2(1-\sin^2\pi x) - 2\sin\pi x + 2a - 3$

$= -2\sin^2\pi x - 2\sin\pi x + 2a - 1 = 0$

$\sin\pi x = t$라 치환하면 $2t^2 + 2t - 2a + 1 = 0$
이는 t에 대한 이차방정식이므로 아래와 같은 3가지 case가 가능하다.

① 해가 없다. ② 중근 t ③ 서로 다른 두 실근 t_1, t_2



범위가 $0 \le x < 2$이므로 $\sin\pi x = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
즉, 예를 들어 방정식 $2t^2 + 2t - 2a + 1 = 0$의 두 근이 $t=0$, $t=3$일 때, $\sin\pi x = 0$, $\sin\pi x = 3$이므로 x에 대한 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

결국 x에 대한 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $t=1$ 또는 $t=-1$을 근으로 가져야 한다.

(ⅰ) $t=1$

$2t^2 + 2t - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 5 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 5$

$2t^2 + 2t - 4 = 0$

$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$\Rightarrow (t+2)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t = -2$ or $t = 1$

$t=-2$일 때, $\sin\pi x = t$는 실근이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $t=-1$

$2t^2 + 2t - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$2t^2 + 2t = 0 \Rightarrow 2t(t+1) = 0 \Rightarrow t = 0$ or $t = -1$

$t = 0 \Rightarrow \sin\pi x = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = 1$

$t = -1 \Rightarrow \sin\pi x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

서로 다른 세 실근의 합은 $0 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = b$이므로

따라서 $a + b = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$이다.

답 3

Theme 18 삼각함수를 포함한 최대, 최소

59. 17

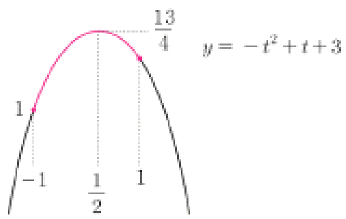
028

$f(x) = \sin^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

$= (1 - \cos^2 x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$

$= 1 - \cos^2 x + \cos x + 2 = -\cos^2 x + \cos x + 3$

$\cos x = t$라 치환하면 $y = -t^2 + t + 3$ $(-1 \le t \le 1)$



$t = \frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{13}{4} = M$

$t = -1$일 때, 최솟값 $1 = m$

따라서 $4(M+m) = 4\left(\frac{13}{4} + 1\right) = 13 + 4 = 17$이다.

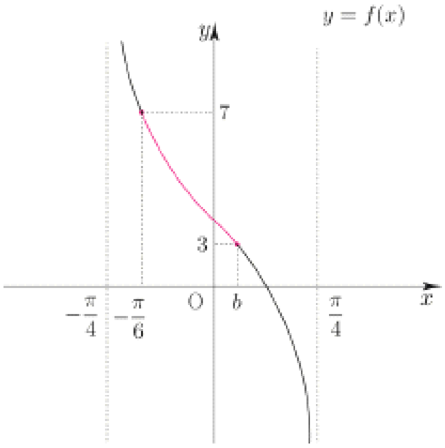
답 17

60. ③

082

$y=f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7 \Rightarrow a+3=7 \Rightarrow a=4$

$x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$4-\sqrt{3}\tan 2b=3 \Rightarrow \tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2b=\frac{\pi}{6} \Rightarrow b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$이다.

답 ③

61. ③

087

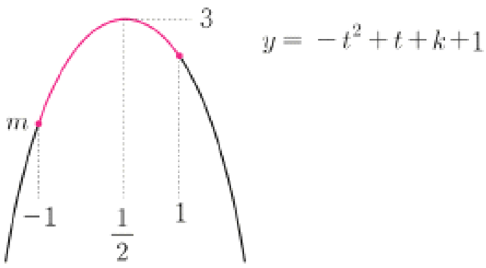
$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$x-\frac{3}{4}\pi=X$라 치환하면

$x-\frac{\pi}{4}=x-\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}=X+\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos^2X-\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)+k=-\sin^2X+\sin X+k+1$

$\sin X=t$라 치환하면 $-t^2+t+k+1$ $(-1\le t\le 1)$



$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}+k=3 \Rightarrow k=\frac{7}{4}$

$t=-1$일 때, 최솟값 $-1+k=\frac{3}{4}=m$

따라서 $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$이다.

답 ③

Theme 19 삼각함수의 대칭성

62. ③

14. 출제의도 : 삼각함수의 주기와 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

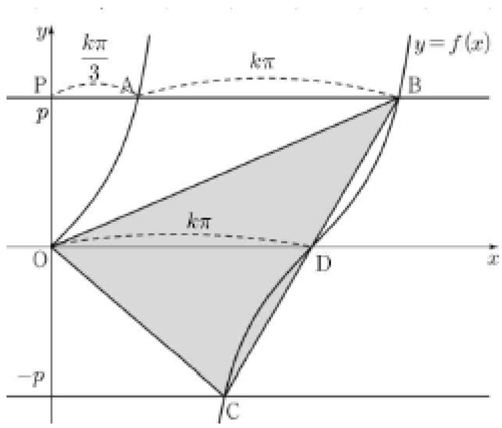
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D라 하자.

함수 $y=\tan\frac{x}{k}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{k}}=k\pi$이므로

$\overline{AB}=\overline{OD}=k\pi$

$\overline{AB}=3\overline{PA}$이므로

$\overline{PA}=\frac{1}{3}\times\overline{AB}=\frac{k\pi}{3}$



점 A의 좌표가 $\left(\frac{k\pi}{3}, p\right)$이고 점 A가

함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$의 그래프 위의

점이므로

$p=\tan\left(\frac{1}{k}\times\frac{k\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$이고

(삼각형 OCB의 넓이)

=(삼각형 ODB의 넓이)

+(삼각형 OCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times p+\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times p$

$=2\times\frac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\,k\pi$

이므로

$\sqrt{3}\,k\pi=\frac{5\pi}{3}$

$k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

따라서

$k+p=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}$

$=\frac{14\sqrt{3}}{9}$

정답 ③

63. ③

090

$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}\ \left(-\frac{a}{2}<x\le a,\ x\neq\frac{a}{2}\right)$

$f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a \Rightarrow \overline{AC}=a$

선분 BC와 x축이 만나는 교점을 D라 하고,

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{BA}=\overline{BC}$이다.

대칭성에 의하여 두 선분 BA, BC의 중점은 각각 O, D이다.

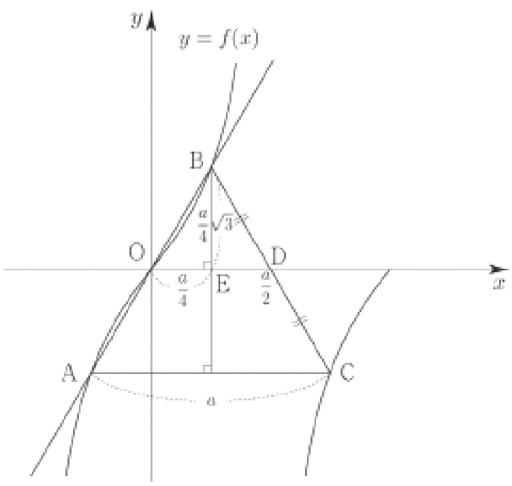
($\because$ 점 A, B는 점 O에 대해 점대칭이고,

점 B, C는 점 D에 대해 점대칭이다.)

즉, $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{a}{2}$

$\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{OD}=\frac{a}{4}$

$\overline{BE}=\frac{a}{4}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{a}{4}\sqrt{3}$



$f\left(\frac{a}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\overline{BE}=f\left(\frac{a}{4}\right)$이므로 $\frac{a}{4}\sqrt{3}=1 \Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$이다.

답 ③

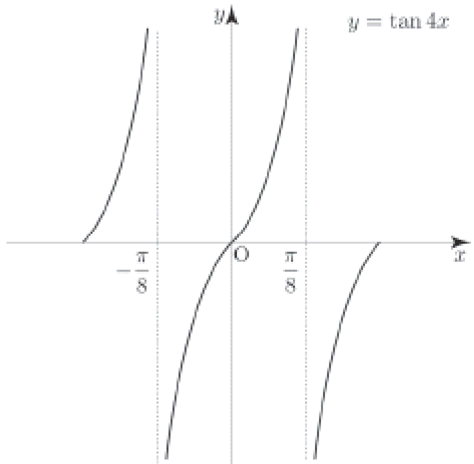
Theme 20 삼각함수의 평행이동

64. ④

017

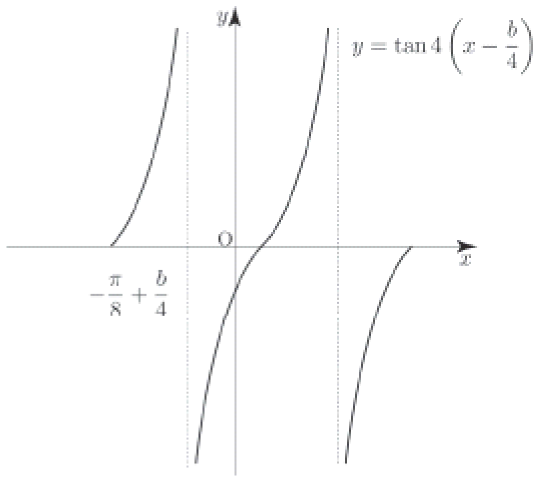
$f(x)=\tan(ax-b)=\tan a\left(x-\frac{b}{a}\right)$

$f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow a=4$



$y=\tan 4\left(x-\frac{b}{4}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan 4x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{4}$ 만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

이때 $0<b<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $0<\frac{b}{4}<\frac{\pi}{8}$



(나) 조건에 의해

$-\frac{\pi}{8}+\frac{b}{4}=-\frac{\pi}{24} \Rightarrow b=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ f(x)=\tan\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

답 ④

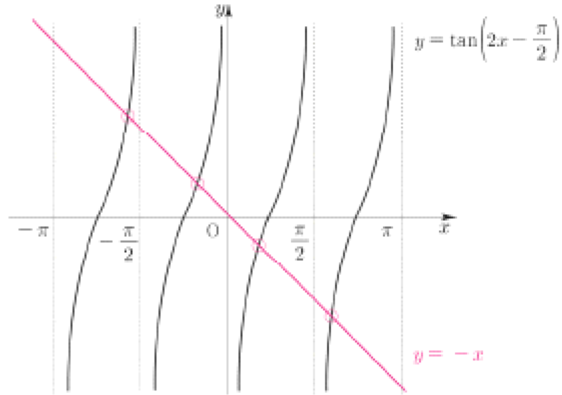
65. 10

088

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{n}$ 이고

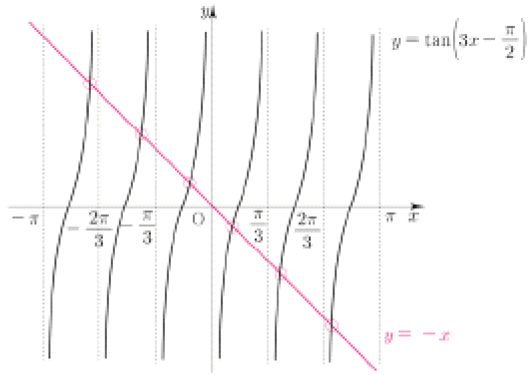
$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan nx$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

① $n=2$



교점의 개수 $a_2=4$

② $n=3$



교점의 개수 $a_3=6$

따라서 $a_2+a_3=10$이다.

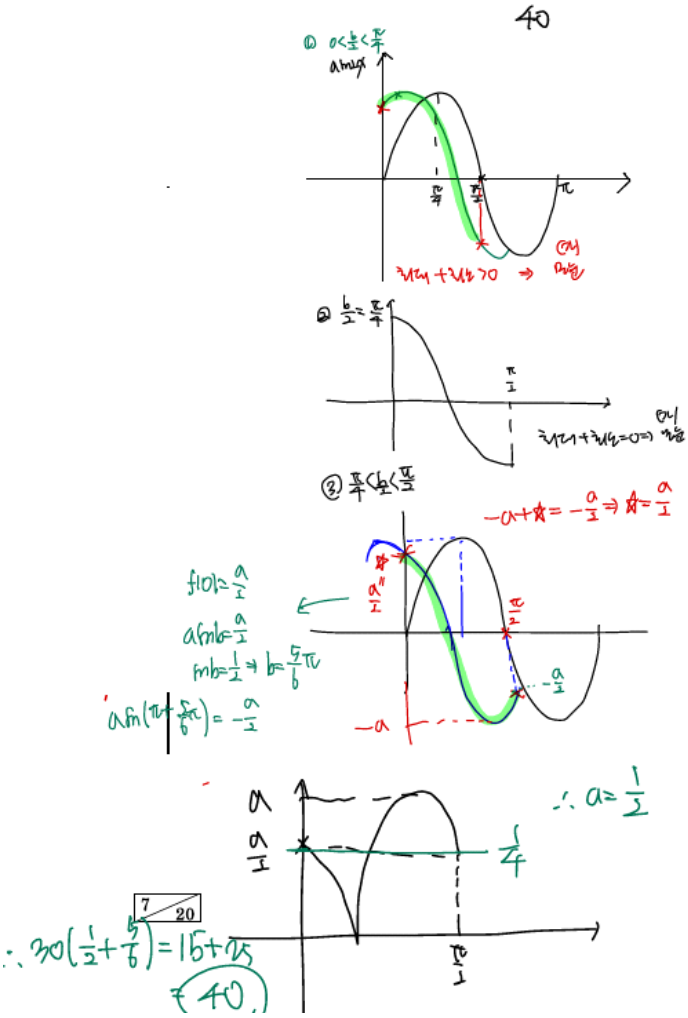
답 10

66. 40

20. 두 상수 a, b ($a>0$, $0<b<\pi$)에 대하여 함수 $f(x)=a\sin(2x+b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $30\left(a+\frac{b}{\pi}\right)$의 값을 구하시오. [4점] $a\sin2\left(x+\frac{b}{2}\right)$ $0<\frac{b}{2}<\frac{\pi}{2}$

(가) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $-\frac{a}{2}$이다.
(나) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\lvert f(x)\rvert=\frac{1}{4}$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

40



Theme 21 사인법칙과 코사인법칙

67. ⑤

054

사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

(가) 조건에서

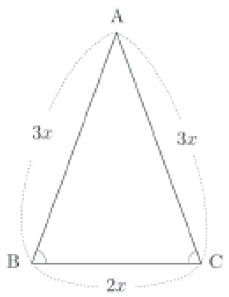
$$3\sin A=2\sin B \Rightarrow \frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R} \Rightarrow a:b=2:3$$

Tip

가이드스텝에서 사인비는 변의 비와 같다고 학습했었다.
이를 이용하면 (가) 조건에서 $a:b=2:3$라는 것을 바로 알 수 있다.

$\overline{BC}=2x$라 하면 $\overline{AC}=3x$이다.

(나) 조건에서 $\cos B=\cos C \Rightarrow B=C$ ($\because\ 0<B,\ C<\pi$)



삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos A=\frac{(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2-(\overline{BC})^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \cos A=\frac{9x^2+9x^2-4x^2}{18x^2} \Rightarrow \cos A=\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로 $R=3$이고,
삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{2x}{\sin A}=2R \Rightarrow x=3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times9x^2\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{64}{9}\sqrt{2}$$

이다.

답 ⑤

68. 71

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이에 관한 문제를 해결한다.

$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$, $\overline{BD}:\overline{DC}=3:1$ 이므로

$\overline{AB}=2a$, $\overline{AC}=a$, $\overline{BD}=3b$, $\overline{DC}=b$

$(a>0,\ b>0)$이라 하자.

삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\cos\theta$

$4a^2=2+9b^2-2\times\sqrt{2}\times 3b\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ …… ㉠

$\angle ADC=\pi-\theta$ 이므로 삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos(\pi-\theta)$

$a^2=2+b^2-2\times\sqrt{2}\times b\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $9b^2-3b+2=4b^2+4b+8$

$5b^2-7b-6=(5b+3)(b-2)=0$

$b=-\dfrac{3}{5}$ 또는 $b=2$

$b>0$ 이므로 $b=2$

㉡에 $b=2$를 대입하면 $a^2=8$

$a>0$ 이므로 $a=2\sqrt{2}$

θ는 예각이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2R$, $\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}}=2R$, $R=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는 $\dfrac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$ 이므로 $p+q=71$

69. ①

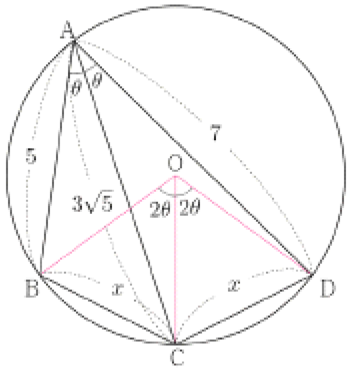
059

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하자.

$\angle BAC=\angle CAD \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overline{BC}=\overline{CD}$

(가이드 스텝 개념 파악하기 (5) 참고)

$\overline{BC}=\overline{CD}=x$라 하자.



삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta=\dfrac{5^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times5\times3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{70-x^2}{30\sqrt{5}}$ … ㉠

삼각형 ACD에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta=\dfrac{7^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times7\times3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{94-x^2}{42\sqrt{5}}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\dfrac{70-x^2}{30\sqrt{5}}=\dfrac{94-x^2}{42\sqrt{5}} \Rightarrow \dfrac{70-x^2}{5}=\dfrac{94-x^2}{7}$

$\Rightarrow 490-7x^2=470-5x^2 \Rightarrow x^2=10$

$\Rightarrow x=\sqrt{10}\ (\because\ x>0)$

$\cos\theta=\dfrac{70-x^2}{30\sqrt{5}}=\dfrac{70-10}{30\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.
삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R \Rightarrow \sqrt{50}=2R \Rightarrow 5\sqrt{2}=2R$

$\Rightarrow R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

답 ①

70. ②

060

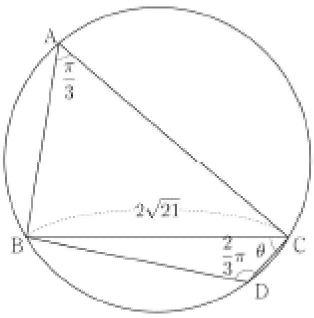
삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times2\sqrt{7} \Rightarrow \overline{BC}=2\sqrt{21}$$

사각형 ABDC가 원에 내접하므로

$$\angle BDC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

$\angle BCD=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$이다.



$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하자.

삼각형 BDC에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{x}{\sin\theta}=4\sqrt{7} \Rightarrow x=4\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=8$$

삼각형 BDC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{8^2+y^2-(2\sqrt{21})^2}{2\times8\times y}=\frac{y^2-20}{16y}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y^2+8y-20=0 \Rightarrow (y+10)(y-2)=0$$

$$\Rightarrow y=2\ (\because\ y>0)$$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=x+y=8+2=10$이다.

답 ②

71. ②

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

조건에서 $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이고

$\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$이므로

$\overline{PQ}$

$=\frac{\sin(\angle QAP)}{\sin(\angle APQ)}\times\overline{AQ}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\times3\sqrt{2}$

$=2$

점 P는 선분 BC의 중점이고 점 Q는 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}$

$=\frac{1}{2}\overline{BC}+2+\frac{1}{6}\overline{BC}$

$=\frac{2}{3}\overline{BC}+2$

$\frac{1}{3}\overline{BC}=2$, $\overline{BC}=6$

한편, $\overline{BQ}=\frac{5}{6}\overline{BC}=5$이고 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{7}\times5}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times2\sqrt{7}\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=22$

이므로

$\overline{AC}=\sqrt{22}$

이때

$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$

$= \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$= \dfrac{3}{4}$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R$

이므로

$R = \dfrac{\sqrt{22}}{2\times\dfrac{3}{4}} = \dfrac{2\sqrt{22}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2 = \pi\times\left(\dfrac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2 = \dfrac{88}{9}\pi$

정답 ②

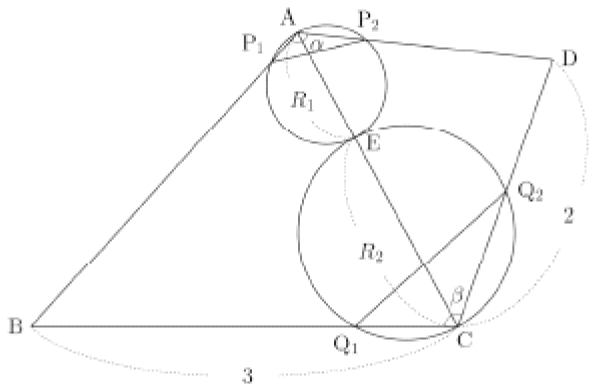
72. ①

067

$\angle P_1AP_2 = \alpha$, $\angle Q_1CQ_2 = \beta$라 하고,

$\overline{AE} = 2R_1$, $\overline{CE} = 2R_2$라 하자.

$\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 2$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{3}$, $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$



삼각형 AP_1P_2에서 사인법칙을 사용하면

$\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\sin\alpha} = 2R_1 \Rightarrow \overline{P_1P_2} = 2R_1\sin\alpha$

삼각형 CQ_1Q_2에서 사인법칙을 사용하면

$\dfrac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\beta} = 2R_2 \Rightarrow \overline{Q_1Q_2} = 2R_2\sin\beta$

선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이 E이므로

$R_2 = 2R_1$이고, $\overline{Q_1Q_2} = 4R_1\sin\beta$이다.

$\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\,\overline{P_1P_2} = 3\,\overline{Q_1Q_2}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\times 2R_1\sin\alpha = 3\times 4R_1\sin\beta$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\sin\alpha = 6\sin\beta$

$\cos\beta = -\dfrac{1}{3}$이므로 $\sin\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 사용하면

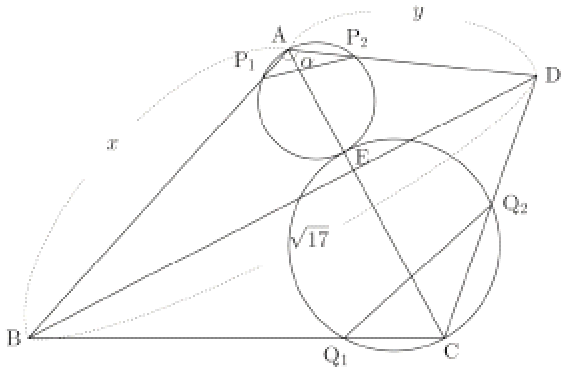
$\cos\beta = \dfrac{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{BC} \times \overline{CD}}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{3} = \dfrac{3^2 + 2^2 - \overline{BD}^2}{2 \times 3 \times 2}$

$\Rightarrow -4 = 13 - \overline{BD}^2$

$\Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{17}$

$\overline{AB} = x$, $\overline{AD} = y$라 하자.



삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin\alpha = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} xy \times \dfrac{4}{5} = 2 \Rightarrow xy = 5$

$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$이고, $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AD}}$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{5} = \dfrac{x^2 + y^2 - (\sqrt{17})^2}{2 \times x \times y}$

$\Rightarrow -\dfrac{6}{5} xy = (x+y)^2 - 2xy - 17$

$\Rightarrow 21 = (x+y)^2 \Rightarrow x + y = \sqrt{21}$

따라서 $\overline{AB} + \overline{AD} = \sqrt{21}$ 이다.

답 ①

73. ⑤

13. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 ABE와 삼각형 DCE는 서로 닮음이고

$\overline{AB} : \overline{DC} = 1 : 2$이므로 $\overline{BE} : \overline{CE} = 1 : 2$이다.

삼각형 BEC에서 $\overline{BE} = k\,(k > 0)$이라 하면 $\overline{CE} = 2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$이므로

$\angle BEC = \alpha + \beta$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{30})^2 = k^2 + 4k^2 - 2 \times k \times 2k \times \left(-\dfrac{5}{12}\right)$, $k^2 = 18$

$k > 0$이므로 $k = 3\sqrt{2}$, $\overline{BE} = 3\sqrt{2}$

$\overline{AE} = t\,(t > 0)$이라 하면 삼각형 ABE에서

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $t^2 + 4^2 > (3\sqrt{2})^2$, $t > \sqrt{2}$

$\cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{5}{12}$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$4^2 = t^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times t \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{5}{12}$

$2t^2 - 5\sqrt{2}\,t + 4 = 0$

$(2t - \sqrt{2})(t - 2\sqrt{2}) = 0$

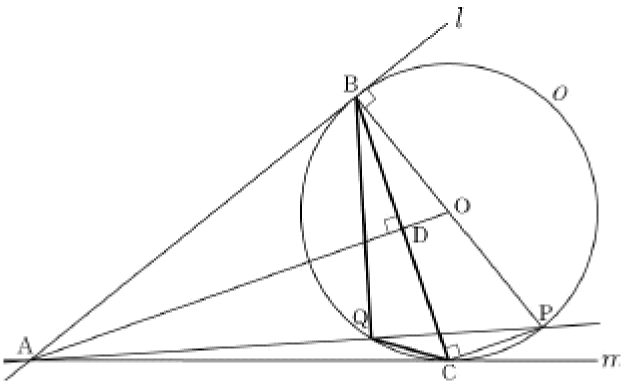
$t > \sqrt{2}$이므로 $t = 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 선분 AE의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

74. ②

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l 과 직선 BP 가 서로 수직이므로
직선 BP 는 원의 중심을 지나고, 선분 BP 는
원 O 의 지름이다. 원 O 의 중심을 O ,
선분 AO 와 선분 BC 가 만나는 점을 D 라 하자.



$\overline{\mathrm{AO}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BO}}^2=12^2+(3\sqrt{2})^2=162$

$\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

삼각형 AOB 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AO}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BO}}$

$\frac{1}{2}\times 9\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BD}}=4$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\times\overline{\mathrm{BD}}=8$

원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{BPQ}=\angle\mathrm{BCQ}$, $\angle\mathrm{QPC}=\angle\mathrm{QBC}$

$\sin(\angle\mathrm{BCQ}):\sin(\angle\mathrm{QBC})=3:1$

삼각형 BQC 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin(\angle\mathrm{BCQ})}=\frac{\overline{\mathrm{QC}}}{\sin(\angle\mathrm{QBC})}$

$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QC}}=3:1$

$\overline{\mathrm{QC}}=k\ (k>0)$ 이라 하면, $\overline{\mathrm{BQ}}=3k$

삼각형 BCP 는

$\angle\mathrm{BCP}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\angle\mathrm{BPC}=\theta$ 라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 BCP 에서

$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{8}{6\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

$\cos\theta=\frac{1}{3}$

사각형 BQCP 는 원 O 에 내접하므로
$\angle\mathrm{CQB}=\pi-\theta$ 이다.

$\cos(\angle\mathrm{CQB})=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$

삼각형 BQC 에서 코사인법칙에 의하여

$8^2=k^2+(3k)^2-2\times k\times 3k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$k^2=\frac{16}{3}$

따라서 삼각형 BQC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times\overline{\mathrm{QC}}\times\sin(\angle\mathrm{CQB})$

$=\frac{1}{2}\times 3k\times k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=k^2\times\sqrt{2}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

75. 26

077

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.
삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\alpha}=2R \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2R}$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하자.

삼각형 ACD에서 사인법칙을 사용하면

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\beta}=2r \Rightarrow \sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2r}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2r}}{\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2R}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{3}{2}$

$R=3x$, $r=2x$라 하자.

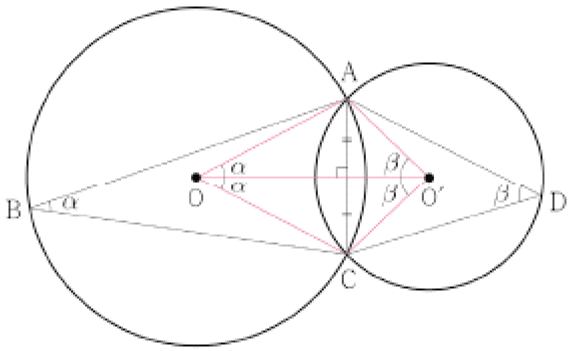
원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한
중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같으므로

$\angle\mathrm{AOC}=2\alpha$, $\angle\mathrm{AO'C}=2\beta$이다.

선분 $\mathrm{OO'}$는 선분 AC를 수직이등분하므로

$\angle \mathrm{AOO'} = \frac{1}{2} \times \angle \mathrm{AOC} = \frac{1}{2} \times 2\alpha = \alpha$

$\angle \mathrm{AO'O} = \frac{1}{2} \times \angle \mathrm{AO'C} = \frac{1}{2} \times 2\beta = \beta$



$\angle \mathrm{OAO'} = \pi - (\alpha + \beta)$이므로

삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(\pi - (\alpha+\beta)) = -\cos(\alpha+\beta) = \frac{R^2 + r^2 - (\overline{\mathrm{OO'}})^2}{2 \times R \times r}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{OO'}} = 1$, $R = 3x$, $r = 2x$ 이므로

$$\cos(\pi - (\alpha+\beta)) = -\cos(\alpha+\beta) = \frac{R^2 + r^2 - (\overline{\mathrm{OO'}})^2}{2 \times R \times r}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{9x^2 + 4x^2 - 1}{12x^2}$$

$$\Rightarrow -4x^2 = 13x^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{17}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $R^2\pi = 9x^2\pi = \frac{9}{17}\pi$이므로

$p + q = 26$이다.

답 26

76. ①

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$\angle \mathrm{DAE} = \alpha$, $\angle \mathrm{EDA} = \beta$라 하자.

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin\beta}$ 이고,

$\sin\alpha : \sin\beta = 1:3$ 이므로 $\overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{AE}} = 1:3$

$\overline{\mathrm{AE}} = \sqrt{5}$ 이므로 $\overline{\mathrm{DE}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{DAE} = \alpha$ 이므로 $\sin(\angle \mathrm{DBC}) = \sin\alpha$

$\sin(\angle \mathrm{CDB}) = \sin(\pi - \beta) = \sin\beta$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle \mathrm{DBC})} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{CDB})}$, $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\beta}$ 이고,

$\sin\alpha : \sin\beta = 1:3$ 이므로 $\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{BC}} = 1:3$

$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$

$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DC}} = 4:3$ 이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = \frac{4}{3}\overline{\mathrm{DC}} = \frac{8}{3}$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AE}}^2 = \overline{\mathrm{DA}}^2 + \overline{\mathrm{DE}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{DA}} \times \overline{\mathrm{DE}} \times \cos(\angle \mathrm{EDA})$$

$$(\sqrt{5})^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{CDB})} = 2R,\quad \frac{6}{\sin\beta} = 2R,\quad \frac{6}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}} = 2R$$

$$R = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

따라서 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $\frac{180}{11}\pi$

77. 12

20. 출제의도 : 원의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BPC = \theta$라 할 때,

$\overline{PB} : \overline{PC} : \overline{BC} = 7 : 5 : \sqrt{14}$이므로

삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \frac{6}{7}$이다.

$\overline{PB} : \overline{PC} = 7 : 5$에서 $\overline{PB} = 7k$, $\overline{PC} = 5k$,

$\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 3$에서 $\overline{AB} = l$, $\overline{CD} = 3l$이라 하자.

원의 성질에 의하여

삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로

$\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA}$이고,

$\overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD} = 5k + 3l$,

$\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{AB} = 7k + l$

이므로 $\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA}$에서

$7 : 5 = (5k + 3l) : (7k + l)$

$5(5k + 3l) = 7(7k + l)$

$l = \boxed{3} \times k$이다.

$\overline{PD} = 5k + 3l = 14k$이므로

$\overline{PB} : \overline{PD} = 7k : 14k = 1 : 2$

즉, 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1 : \boxed{2}$이므로

$\overline{BC} = \frac{1}{\boxed{2}} \times \overline{AD}$이다.

$\cos\theta = \frac{6}{7}$에서

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

한편,

$$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$R = \frac{\overline{BC}}{2\sin\theta} = \frac{2\sqrt{13}}{2 \times \frac{\sqrt{13}}{7}} = \boxed{7}$$

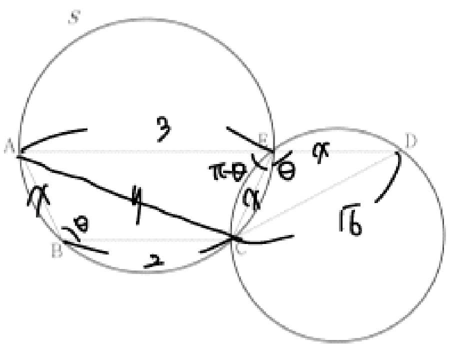
따라서 $p = 3$, $q = 2$, $r = 7$이므로

$$p + q + r = 3 + 2 + 7 = 12$$

정답 12

78. 161

20. 그림과 같이 두 선분 AD, BC가 서로 평행인 사각형 ABCD가 있다. 세 점 A, B, C를 지나는 원을 S라 할 때, 선분 AD와 원 S가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자.



다음은 $\overline{BC}=2$, $\overline{AE}=3$, $\overline{CD}=\sqrt{6}$, $\overline{AB}=\overline{DE}$일 때, 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

> 두 선분 AD, BC가 서로 평행이고 사각형 ABCE는 원에 내접하므로 $\overline{AB}=\overline{CE}$이다.
>
> $\angle DEC=\theta$라 하면 $\angle AEC=\pi-\theta$이고 사각형 ABCE는 원에 내접하므로 $\angle ABC=\theta$이다.
>
> $\overline{AB}=\overline{CE}=\overline{DE}=x$라 하자.
>
> 삼각형 ACE에서 코사인법칙, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=-\dfrac{1}{\boxed{(가)}\times x}$이다.
>
> 삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{x^2-3}{x^2}$이다.
>
> $-\dfrac{1}{\boxed{(가)}\times x}=\dfrac{x^2-3}{x^2}$이므로 $\cos\theta=\boxed{(나)}$이다.
>
> 따라서 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여 $R=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $48\times(p+q+r^2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\overline{AC}=y$

$\cos\theta=\dfrac{x^2+4-y^2}{4x}=-\dfrac{1}{2x}$

$-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{x^2-3}{x^2}$

$-\dfrac{x}{2}=x^2-3$

$-x=2x^2-6$

$2x^2+x-6=0$ $x=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin\theta}=2R \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=2R$

$R=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

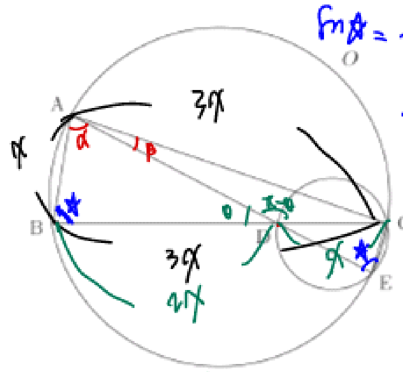
20

$\therefore 48\left(2-\dfrac{1}{3}+\dfrac{27}{16}\right)=96-16+81=161$

79. ④

14. 그림과 같이 $3\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$이고, 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 직선 AD가 원 O와 만나는 점을 E라 하자. $\dfrac{\sin(\angle DAC)}{\sin(\angle BAD)}=\dfrac{1}{6}$이고, 삼각형 CDE의 외접원의 넓이가 $\dfrac{27}{35}\pi$일 때, $\overline{AD}-\overline{DE}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$ ② $\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ ③ $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$



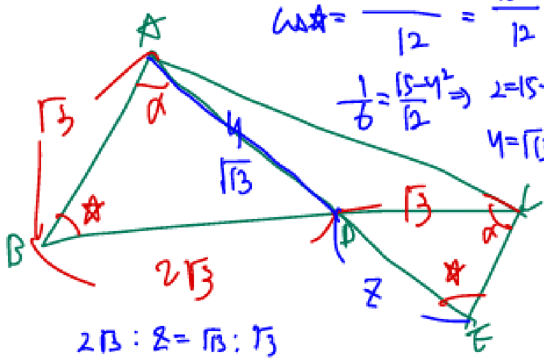
$R=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$

$\cos\star=\dfrac{1}{6}$, $\sin\star=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$

$\triangle CDE$에서 $\dfrac{x}{\sin\star}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$

$x=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{35}}\times\dfrac{\sqrt{35}}{6}=\sqrt{3}$

$2\overline{DC}=\overline{BD}$



$\cos\star=\dfrac{3+12-y^2}{12}=\dfrac{15-y^2}{12}$

$\dfrac{1}{6}=\dfrac{15-y^2}{12} \Rightarrow 2=15-y^2$, $y=\sqrt{13}$

$2\sqrt{3}:z=\sqrt{13}:\sqrt{3}$

$\sqrt{13}z=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$z=\dfrac{6}{\sqrt{13}}=\dfrac{6}{13}\sqrt{13}$

$\therefore y-z=\sqrt{13}-\dfrac{6}{13}\sqrt{13}=\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$

20

3. 수열

Theme 22 등차수열과 등비수열

80. ②

18. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 14, \quad |a_5| = |a_{11}|$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

$$|a+4d| = |a+10d|$$

$$a+4d = -a-10d$$

$$2a = -14d$$

$$\underbrace{a}_{14} = -7d$$

$$d = -2$$

$$\therefore a_7 = a+6d = 14-12 = 2$$

81. ⑤

060

d = 자연수, r = 자연수, $a_6 = b_6 = 9$

$a_7 = b_7 \Rightarrow a_6 + d = rb_6 \Rightarrow 9 + d = 9r \Rightarrow 1 + \dfrac{d}{9} = r$

r과 d가 자연수이므로 d는 9의 배수이다.

$94 < a_{11} < 109 \Rightarrow 94 < a_6 + 5d < 109$

$\Rightarrow 94 < 9 + 5d < 109 \Rightarrow 17 < d < 20$

$\therefore d = 18 \Rightarrow r = 3$

따라서 $a_7 + b_8 = a_6 + d + r^2 b_6 = 9 + 18 + 81 = 108$이다.

답 ⑤

82. ④

10. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$\underbrace{S_{n+2} - S_n}_{a_{n+2}+a_{n+1}} = 61 - 6n$$

이다. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \le k$이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 181 ② 183 ③ 185 ④ 187 ⑤ 189

S_n의 최댓값 $= S_{11}$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_{n+2} = a + (n+1)d$$

$$+ \ a_{n+1} = a + nd$$

$$2a + 2nd + d = 61 - 6n$$

$$\therefore d = -3$$

$$2a - 3 = 61$$

$$2a = 64$$

$$a = 32$$

$$a_n = -3n + 35$$

$a_1 = 32 \cdots a_{11} = 2$

$$S_{11} = \frac{11(32+2)}{2} = 187$$

$$187 \le k$$

$$\therefore 187$$

83. ③

10. 출제의도 : 등비수열의 일반항 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$r>0$이다.

$a_2=1$에서 $a_1r=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k=21$에서

$-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6=21$

$(-S_1+S_2)+(-S_3+S_4)+(-S_5+S_6)=21$

$a_2+a_4+a_6=21$

$a_2+a_2r^2+a_2r^4=21$

$a_2=1$이므로

$1+r^2+r^4=21$

$r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$

$(r^2+5)(r+2)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

㉠에서 $2a_1=1$이므로

$a_1=\frac{1}{2}$

따라서

S_2+S_7

$=\dfrac{\frac{1}{2}\times(2^2-1)}{2-1}+\dfrac{\frac{1}{2}\times(2^7-1)}{2-1}$

$=\frac{3}{2}+\frac{127}{2}=\frac{130}{2}$

$=65$

정답 ③

Theme 23 등차수열의 합과 이차함수

84. ④

087

$a=50,\ d=-4$

$S_n=\dfrac{n\{100+(n-1)(-4)\}}{2}=n(-2n+52)$

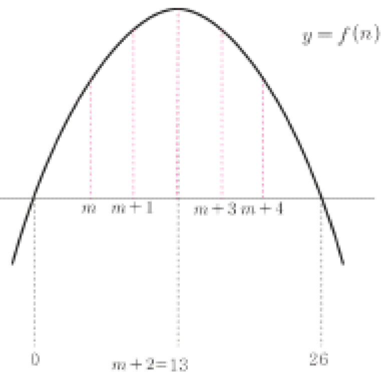
$S_n=f(n)$으로 보면 $f(n)$는 이차함수로 볼 수 있다.

$f(n)=-2n^2+52n$

$\sum_{k=m}^{m+4}S_k=\sum_{k=m}^{m+4}f(k)$

$=f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+f(m+4)$

가 최대가 되려면 이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 $m+2$이면 된다. 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 13이므로 $m=11$이다.



답 ④

85. 30

079

a_n이 등차수열이므로 $S_n = An^2 + Bn$이라 볼 수 있다.
$\left(\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(\dfrac{2a-d}{2}\right)n = An^2 + Bn\right)$
S_n을 함수로 보면 $S_n = f(n) = An^2 + Bn$와 같다.
즉, $f(n)$은 이차함수이다.

(가) 조건에 의하여 $A > 0$이고,

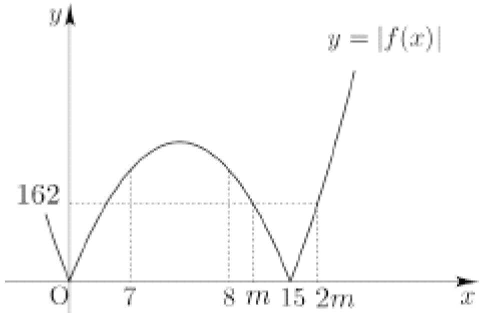
$f(x)$의 대칭축은 $x = \dfrac{15}{2}$이므로

$f'\left(\dfrac{15}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2A \times \dfrac{15}{2} + B = 0 \Rightarrow 15A + B = 0$

$\Rightarrow B = -15A$

즉, $f(n) = An^2 - 15An = An(n-15)$

$|S_n| = |f(n)|$과 같으므로
$|S_m| = |S_{2m}| = 162 \Rightarrow |f(m)| = |f(2m)| = 162 \quad (m > 8)$



$|f(m)| = -f(m) = -Am(m-15)$

$|f(2m)| = f(2m) = 2Am(2m-15)$

$|f(m)| = |f(2m)|$

$\Rightarrow -Am(m-15) = 2Am(2m-15)$

$\Rightarrow -m + 15 = 4m - 30$

$\Rightarrow 5m = 45 \Rightarrow m = 9$

$|f(m)| = 162 \Rightarrow 54A = 162 \Rightarrow A = 3$

$f(n) = 3n^2 - 45n$이므로 $S_n = 3n^2 - 45n = 3n(n-15)$
즉, $a_n = 6n - 45 - 3 = 6n - 48$
(가이드스텝에서 $S_n = An^2 + Bn$ 꼴에서 a_n을 빨리 구하는 방법에 대해 학습한 바 있었다.)
따라서 $a_{13} = 78 - 48 = 30$이다.

답 30

Theme 24 $\sum$의 성질

86. 100

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+1)^2 = 100, \quad \sum_{n=1}^{10}a_n(a_n+1) = 60$$

$\Sigma a_n^2 + 2\Sigma a_n + 10 = 100.$ $\quad \Sigma a_n^2 + \Sigma a_n = 60$

일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)(a_n+5)$의 값을 구하시오. [3점]

100

$\Sigma a_n^2 = A \quad \Sigma a_n = B$

$A + 2B = 90$
$-\ A + B = 60$
$B = 30. \ A = 30$

$\Sigma a_n^2 + 4a_n - 5 \Rightarrow A + 4B - 50$

$30 + 120 - 50$

100

87. 22

047

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5) = 55 \Rightarrow 3\sum_{k=1}^{5}a_k + 25 = 55 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}a_k = 10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k) = 32 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}a_k + \sum_{k=1}^{5}b_k = 32 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}b_k = 22$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}b_k = 22$이다.

답 22

88. ①

083

$$\sum_{k=1}^{30}\frac{4^{k+1}+8}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{30}\frac{4^{k+1}}{2^{k-1}}+\sum_{k=1}^{30}\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{30}2^{2k+2-(k-1)}+\sum_{k=1}^{30}\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{30}2^{k+3}+\sum_{k=1}^{30}\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}=\frac{16(2^{30}-1)}{2-1}+\frac{8\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2^{34}-16+16-2^{-26}=2^{34}-2^{-26}=2^a-2^{-b}$$

$a=34,\ b=26$

따라서 $2a+b=68+26=94$이다.

답 ①

Theme 25 부분분수

89. ⑤

043

$$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\sum_{k=1}^{10}S_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=\left(1-\frac{1}{11}\right)-S_{10}$$

$$=1-\frac{1}{11}-\frac{1}{110}=\frac{99}{110}=\frac{9}{10}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\frac{9}{10}$이다.

답 ⑤

90. ④

044

$a_n=d+(n-1)d=dn$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_{16}}-\sqrt{a_1}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{16d}-\sqrt{d}\right)=2$$

$\Rightarrow \sqrt{16d}-\sqrt{d}=2d \Rightarrow 4\sqrt{d}-\sqrt{d}=2d$

$\Rightarrow 3\sqrt{d}=2d \Rightarrow 9d=4d^2 \Rightarrow d=\frac{9}{4}\ (\because\ d>0)$

따라서 $a_4=4d=4\times\frac{9}{4}=9$이다.

답 ④

91. ④

052

$a_1=-4$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}-\frac{1}{n}=\frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow -\frac{n+4}{4n}=\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=-\frac{4n}{n+4}$$

따라서 $a_{13}=-\frac{48}{16}=-3$이다.

답 ④

92. 115

036

$$\sum_{k=1}^{11}\frac{a}{4k^2-1}$$

$$=a\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=a\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{23}\right)=\frac{11}{23}a$$

$\sum_{k=1}^{11}\frac{a}{4k^2-1}$ 의 값이 자연수가 되려면 a는 23의 배수여야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 a의 최솟값은 23, 최댓값은 92 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 115이다.

답 115

Theme 26 수열의 합과 일반항 사이의 관계

93. 58

067

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

$\frac{4n-3}{a_n}=b_n$이라 하면

$b_n=4n+7-2=4n+5$이다.

$\frac{4n-3}{a_n}=4n+5 \Rightarrow a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$이므로

$a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$이다.

따라서 $p+q=58$이다.

답 58

94. 15

028

$\sum_{k=1}^{25}\frac{S_{k+1}}{S_k}=40$일 때,

$$\sum_{k=1}^{25}\frac{a_{k+1}}{S_k}=\sum_{k=1}^{25}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_k}=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}-1\right)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{25}\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)-25=40-25=15$$

따라서 $\sum_{k=1}^{25}\frac{a_{k+1}}{S_k}=15$이다.

답 15

95. 20

029

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=3^{n+1}-3=S_n$$

$$S_n-S_{n-1}=3^{n+1}-3-(3^n-3)=3^{n+1}-3^n=3^n(3-1)$$

$$=2\times3^n=a_n$$

$$(\text{좌변})=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{m}4\times3^{2k}=\frac{36(9^m-1)}{9-1}=\frac{9(9^m-1)}{2}$$

$$=\frac{9^{m+1}-9}{2}=\frac{3^{2m+2}-9}{2}=\frac{3^{42}-9}{2}$$

따라서 $m=20$이다.

답 20

96. ①

078

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

$\frac{1}{(2n-1)a_n} = b_n$이라 하면

$b_n = 2n+2-1 = 2n+1$이다.

$\frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n+1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{10}{21}$이다.

답 ①

Theme 27 새롭게 정의된 수열의 합

97. ⑤

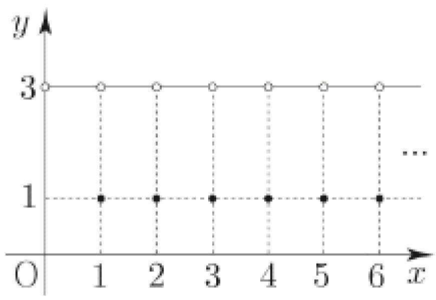
078

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x) \Rightarrow$ 주기 1

$f(x)$를 그리면 다음과 같다.



$\sqrt{k}$가 자연수일 때, $f(\sqrt{k}) = 1$이고,
$\sqrt{k}$가 자연수가 아닐 때, $f(\sqrt{k}) = 3$이다.

$\sqrt{k}$가 자연수일 때는 다음과 같다.

$k=1 \Rightarrow \frac{1 \times f(1)}{3} = \frac{1}{3}$

$k=4 \Rightarrow \frac{4 \times f(2)}{3} = \frac{4}{3}$

$k=9 \Rightarrow \frac{9 \times f(3)}{3} = \frac{9}{3}$

$k=16 \Rightarrow \frac{16 \times f(4)}{3} = \frac{16}{3}$

$\sqrt{k}$가 자연수가 아닐 때는 다음과 같다.

$\frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} = \frac{k \times 3}{3} = k$

$\sqrt{k}$가 모두 자연수가 아니라고 가정하고 모두 더한 후

$\sqrt{k}$가 자연수일 때 $\frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값을 빼주고,

원래 $\sqrt{k}$가 자연수일 때 $\frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값을 더해줘서

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$를 구하면 된다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} = \sum_{k=1}^{20} k - (1+4+9+16) + \frac{1+4+9+16}{3}$$

$$= \frac{20 \times 21}{2} - 30 + 10 = 210 - 20 = 190$$

이다.

답 ⑤

98. ③

079

m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재한다는 의미는

$x^n = m^{12}$ $(m \geq 2)$를 만족시키는 정수 x가 존재한다는

의미이다.

① $m=2 \Rightarrow x^n = 2^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(2) = 5$이다.

② $m=3 \Rightarrow x^n = 3^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(3) = 5$이다.

③ $m=4 \Rightarrow x^n = 4^{12} = 2^{24}$

2 이상의 24의 약수는 7개이므로 $f(4)=7$이다.

④ $m=5 \Rightarrow x^n=5^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(5)=5$이다.

⑤ $m=6 \Rightarrow x^n=6^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(6)=5$이다.

⑥ $m=7 \Rightarrow x^n=7^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(7)=5$이다.

⑦ $m=8 \Rightarrow x^n=8^{12}=2^{36}$

2 이상의 36의 약수는 8개이므로 $f(8)=8$이다.

⑧ $m=9 \Rightarrow x^n=9^{12}=3^{24}$

2 이상의 24의 약수는 7개이므로 $f(9)=7$이다.

따라서 $\sum_{m=2}^{9} f(m)=5\times5+7\times2+8=25+14+8=47$이다.

답 ③

99. 14

21. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=a_n+a_3$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_2=S_3$ $\Rightarrow$ $a_1+a_2+2a_3 = a_1+a_2+4a_3 \Rightarrow a_3=0$

(나) $S_4=4$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{60}{b_n a_{n+1}}$의 값을 구하시오. [4점]

14

$b_1=a_1+a_3 \quad =a_1 \quad =-2d$

$b_2=a_2+a_3 \quad =a_2 \quad =-d$

$b_3=a_3+a_3 \quad =a_3 = 0$

$b_4=a_4+a_3 \quad =a_4 = d$

$-3d+d=-2d=4 \Rightarrow d=-2$

$a_n=-2n+6=b_n$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{60}{(-2n+6)(-2n+4)} = -2(n-3)\times-2(n-2)$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{15}{(n-3)(n-2)} = 15\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right)$

$15\left(1-\frac{1}{15}\right)=14$

Theme 28 절댓값이 포함된 수열의 합

100. 25

068

$d=$정수

$a_3+a_5=0 \Rightarrow a+2d+a+4d=0 \Rightarrow a+3d=0$

즉, $a_4=0$이다.

$a_1=a_4-3d=-3d$

$a_2=a_4-2d=-2d$

$a_3=a_4-d=-d$

$a_4=0$

$a_5=a_4+d=d$

$a_6=a_4+2d=2d$

d의 부호에 따라 case분류하면

① $d>0$ 일 때

$|a_1|=|-3d|=3d$

$|a_2|=|-2d|=2d$

$|a_3|=|-d|=d$

$|a_4|=0$

$|a_5|=d$

$|a_6|=2d$

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=6d=30 \Rightarrow d=5$

d는 양의 정수이므로 조건을 만족시킨다.

② $d=0$ 일 때

$d=0$이면 모든 항이 0이므로 $\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$을 만족시키지 않는다.

③ $d<0$ 일 때

$|a_1|=|-3d|=-3d$

$|a_2|=|-2d|=-2d$

$|a_3|=|-d|=-d$

$|a_4|=0$

$|a_5|=|d|=-d$

$|a_6|=|2d|=-2d$

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=-12d=30 \Rightarrow d=-\frac{5}{2}$

d는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

$d=5$이므로 $a_9=a_4+5d=0+25=25$이다.

답 25

101. ③

077

(가) $a_5 \times a_7<0$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이므로 $a_5<a_7$이다.

즉, $a_5<0$, $a_7>0$이다.

(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

$|a_7|+|a_8|+|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+|a_{12}|$

$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$

$\Rightarrow |a_7|+|a_9|+|a_{11}|=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|$

$\Rightarrow a_7+a_9+a_{11}=6-a_2-a_4+|a_6|$

$\Rightarrow a+18+a+24+a+30=6-a-3-a-9+|a+15|$

$\Rightarrow 5a+78=|a+15|$

a의 범위에 따라 case분류하면

① $a \geq -15$

$5a+78=a+15 \Rightarrow 4a=-63 \Rightarrow a=-\frac{63}{4}$

$-\frac{63}{4}<-15$이므로 모순이다.

② $a<-15$

$5a+78=-a-15 \Rightarrow 6a=-93 \Rightarrow a=-\frac{31}{2}$

$-\frac{31}{2}<-15$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a_{10}=a+27=-\frac{31}{2}+27=\frac{23}{2}$이다.

답 ③

102. ④

12. 모든 항이 정수이고, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|$의 값의 합은? [4점]

(가) $a_3 \times a_5 < 0$
(나) $\sum_{n=1}^{10}(\lvert a_n \rvert + a_n) = 6a_2$

$a_n = a+(n-1)(-3)$

$a_n \geq 0 \Rightarrow 2a_n$
$a_n < 0 \Rightarrow 0.$

① 54 ② 56 ③ 58 ④ 60 ⑤ 62

$a_3>0$ $a_5<0$
$a+2d$ $a+4d$
$a-6>0$ $a-12<0$
$6<a<12$

$\overset{+}{a_1}$ $\overset{+}{a_2}$ $\overset{+}{a_3}$ a_4 $\overset{-}{a_5}$ $\overset{-}{a_6}$ $\overset{-}{a_7}$ $\overset{-}{a_8}$ $\overset{-}{a_9}$ $\overset{-}{a_{10}}$

$\sum_{n=1}^{10}(|a_n|+a_n) = 2(\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{3a_2}) + (|a_4|+a_4)$

$= \cancel{6a_2} + |a_4| + a_4 = \cancel{6a_2}$

$\therefore |a_4|+a_4=0 \Rightarrow a_4 \leq 0.$

$a+3d \leq 0$

$a-9 \leq 0$

$a \leq 9$ $a=7.\ a=8.\ a=9$

9 $6<a\leq 9$

$\lvert a_1 \rvert$	$\lvert a_2 \rvert$	$\lvert a_3 \rvert$	$\lvert a_4 \rvert$	$\lvert a_5 \rvert$	
7	4	1	2	5	$=19$
8	5	2	1	4	$=20$
9	6	3	0	3	$=21$

16

20

$\therefore 60$

Theme 29 자연수 조건을 이용하는 수열의 합

103. ②

081

첫째항이 $-45 \Rightarrow a=-45$

공차 d(d는 자연수)인 등차수열 $\{a_n\}$

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재

$|-45+(m-1)d|=|-45+(m+2)d|$

$\Rightarrow -45+(m-1)d=45-(m+2)d$ ($\because$ d는 자연수)

$\Rightarrow d(2m+1)=90$

d는 자연수이고, m은 자연수이므로 $2m+1$은 홀수이므로 가능한 case는 다음과 같다.

$(d,\ m)=(2,\ 22)$ or $(6,\ 7)$ or $(10,\ 4)$

or $(18,\ 2)$ or $(30,\ 1)$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$

(나) 조건이 성립하려면 합의 최솟값이 -100보다 크면 된다.
첫째항이 -45이고, 공차 d가 자연수이므로 항이 점점 커진다. 합의 최솟값은 마지막 음수인 항까지의 합과 같다.

(가) 조건에 의해 a_m과 a_{m+3}은 부호가 서로 반대이고 절댓값이 같다. a_n은 등차수열이므로 $a_{m+1}+a_{m+2}=0$이다.

$a_m < a_{m+1} < 0 < a_{m+2} < a_{m+3}$

즉, a_{m+1}이 마지막 음수이므로 합의 최솟값은

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{(m+1)(a_1+a_{m+1})}{2} = \frac{(m+1)(-90+md)}{2}$이다.

$\frac{(m+1)(-90+md)}{2} > -100$

$\Rightarrow (m+1)(-90+md) > -200$ ⋯ ㉠

$(d,\ m)=(2,\ 22)$ or $(6,\ 7)$ or $(10,\ 4)$

or $(18,\ 2)$ or $(30,\ 1)$

에서 ㉠을 만족시키는 case는 다음과 같다.

$d=18,\ m=2$ or $d=30,\ m=1$

따라서 모든 자연수 d의 값의 합은 $18+30=48$이다.

답 ②

104. 19

087

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$

$\frac{d}{2}=A,\ a-\frac{d}{2}=B$라 하면

$S_n=An^2+Bn$이고, $a_n=2An+B-A$

a_7이 13의 배수이므로

$a_7=13N$ (N은 자연수)

$\Rightarrow a+6d=13N$ ⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{7} S_k=644 \Rightarrow \sum_{k=1}^{7}(Ak^2+Bk)=644$

$\Rightarrow A\sum_{k=1}^{7}k^2+B\sum_{k=1}^{7}k=644$

$\Rightarrow A\times\frac{7\times8\times15}{6}+B\times\frac{7\times8}{2}=644$

$\Rightarrow 140A+28B=644$

$\Rightarrow 5A+B=23$

$\Rightarrow \frac{5}{2}d+a-\frac{d}{2}=23 \Rightarrow a+2d=23$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$a+6d=13N$

$\Rightarrow a+2d+4d=13N$

$\Rightarrow 4d+23=13N$

모든 항이 자연수이므로 d와 a 모두 자연수이어야 한다.
$a+2d=23$이므로 $d=1,\ 2,\ \cdots,\ 11$이 가능하므로 이 중에서 $4d+23=13N$ (N은 자연수)를 만족시키는 $d=4$이다.

따라서 $a_2=a+2d-d=23-4=19$이다.

답 19

Theme 30 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (순행)

105. 15

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=n^2a_n+n+1$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$a_2 = a_1+2 = 3$

$a_3 = 4a_2+3 = 15$

15

106. ①

026

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=1$, $a_6=2$, $a_7=4$,

$a_8=8$이므로 $\sum_{k=1}^{8}a_k=2\times(1+2+4+8)=30$이다.

답 ①

107. ②

12. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

조건 (가)에서 $a_3=a_1$ …… ㉠

(ⅰ) $a_3=a_2-3$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=a_2-3=(a_1-3)-3$

$a_3=a_1-6$

이 식은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3=a_2-3$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=a_2-3=2a_1-3$

㉠에서

$a_3=2a_3-3$

$a_3=3$

$a_4=a_3-3=0$ 또는 $a_4=2a_3=6$

(ⅲ) $a_3=2a_2$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=2(a_1-3)=2a_1-6$

㉠에서

$a_3=2a_3-6$

$a_3=6$

$a_4=a_3-3=3$ 또는 $a_4=2a_3=12$

(ⅳ) $a_3=2a_2$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=2a_2=2(2a_1)=4a_1$

㉠에서 $a_3=4a_3$

$a_3=0$

$a_4=a_3-3=-3$ 또는 $a_4=2a_3=0$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$a_4=-3$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=3$ 또는 $a_4=6$ 또는 $a_4=12$

이므로

a_4의 최댓값은 12

정답 ②

108. ②

12. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 수열의 합의 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

$3{a_n}^2+2na_n-8n^2=0$ 에서 $(3a_n-4n)(a_n+2n)=0$

$a_n=\frac{4}{3}n$ 또는 $a_n=-2n$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로

자연수 k에 대하여

$$a_n=\begin{cases}-6k+4 & (n=3k-2)\\ -6k+2 & (n=3k-1)\\ -6k \text{ 또는 } 4k & (n=3k)\end{cases}$$

$-6k<0$, $4k>0$이므로 $1\le k\le 10$인 모든 자연수 k에 대하여

$a_{3k}=4k$일 때, $\sum_{n=1}^{30}a_n$ 은 최댓값 M을 갖고

$a_{3k}=-6k$일 때, $\sum_{n=1}^{30}a_n$ 은 최솟값 m을 갖는다.

$M=\sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}4k$이고,

$m=\sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}(-6k)$이므로

$$\begin{aligned}M-m&=\left(\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}4k\right)\\&\quad-\left\{\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}(-6k)\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}4k-\sum_{k=1}^{10}(-6k)\\&=\sum_{k=1}^{10}\{4k-(-6k)\}\\&=\sum_{k=1}^{10}10k=10\sum_{k=1}^{10}k\\&=10\times\frac{10\times 11}{2}=550\end{aligned}$$

109. ②

069

$a_1=k$ (k는 자연수)

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2n-k & (a_n\le 0)\\ a_n-2n-k & (a_n>0)\end{cases}$$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이려면

$a_3\ne 0$, $a_4\ne 0$, $a_5\ne 0$, $a_6\ne 0$이어야 한다.

$a_2=k-2-k=-2$

$a_3=a_2+4-k=2-k$

① $a_3<0 \Rightarrow 2-k<0 \Rightarrow k>2$

$a_4=a_3+6-k=2-k+6-k=8-2k$

①- i) $a_4<0 \Rightarrow 8-2k<0 \Rightarrow k>4$

$a_5=a_4+8-k=8-2k+8-k=16-3k$

①- i) - ❶ $a_5=16-3k<0 \Rightarrow k>\frac{16}{3}$

$a_6=a_5+10-k=16-3k+10-k=26-4k$

$a_3<0$, $a_4<0$, $a_5<0$ 이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이려면 $a_6>0$이어야 한다.

$26-4k>0 \Rightarrow k<\frac{13}{2}$

즉, $\frac{16}{3}<k<\frac{13}{2}$

$\therefore\ k=6$

①- i) - ❷ $a_5=16-3k>0 \Rightarrow 4<k<\frac{16}{3}$

(①- i)의 전제조건이 $k>4$임을 잊어서는 안 된다.)

$k=5$이므로

$a_6=a_5-10-k=16-3k-10-k=-14$

$a_3<0$, $a_4<0$, $a_5>0$, $a_6<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족한다.

$\therefore\ k=5$

①-ⅱ) $a_4>0 \Rightarrow 8-2k>0 \Rightarrow 2<k<4$

$k=3$이므로

$a_5=a_4-8-k=2-8-3=-9$

$a_6=a_5+10-k=-9+10-3=-2$

$a_3<0,\ a_4>0,\ a_5<0,\ a_6<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족한다.

$\therefore\ k=3$

② $a_3>0 \Rightarrow 2-k>0 \Rightarrow k<2 \Rightarrow k=1$

$a_3=2-k=1$

$a_4=a_3-6-k=1-6-1=-6$

$a_5=a_4+8-k=-6+8-1=1$

$a_6=a_5-10-k=1-10-1=-10$

$a_3>0,\ a_4<0,\ a_5>0,\ a_6<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족시키지 않는다.

따라서 모든 k의 값의 합은 $6+5+3=14$이다.

답 ②

Theme 31 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (역행)

110. ⑤

040

$a_{12}=\frac{1}{2}$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

$a_{12}=\frac{1}{a_{11}}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_{11}=2$

$a_{11}=8a_{10} \Rightarrow a_{10}=\frac{1}{4}$

$a_{10}=\frac{1}{a_9}=\frac{1}{4} \Rightarrow a_9=4$

$a_9=8a_8=4 \Rightarrow a_8=\frac{1}{2}$

$a_8=\frac{1}{a_7}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_7=2$

$2,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \frac{1}{2}$가 반복되므로

$a_7=2,\ a_6=\frac{1}{4},\ a_5=4,\ a_4=\frac{1}{2},\ a_3=2,\ a_2=\frac{1}{4},\ a_1=4$

이다.

따라서 $a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이다.

답 ⑤

111. ①

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

$a_4=\begin{cases} a_3+1 & (a_3\ 홀) \\ \frac{1}{2}a_3 & (a_3\ 짝) \end{cases}$ $a_3=\begin{cases} a_2+1 & (a_2\ 홀) \\ \frac{1}{2}a_2 & (a_2\ 짝) \end{cases}$

① a_3 홀 → $a_2+a_3+1=40$.

a_2 홀 $a_2+a_2+2=40$ $2a_2=38 \Rightarrow a_2=19$

a_2 짝. → $a_2+\frac{1}{2}a_2+1=40$. $\frac{3}{2}a_2=39$ $a_2=26$.

$a_3=20$ (X)

$a_2=19$ (X)

$a_2=26$ $a_3=13$ (O)

$a_1=25$ (O)

$a_1=52$ (O)

77.

② a_3 짝 ⇒ $a_2+\frac{1}{2}a_3=40$.

a_2 홀 $a_2+\frac{1}{2}(a_2+1)=40$ $2a_2+a_2+1=80 \Rightarrow 3a_2=79$ (X)

a_2 짝 $a_2+\frac{1}{4}a_2=40$. $\frac{5}{4}a_2=40$ $a_2=32$.

$a_2=32$ $a_1=31$ (O) $a_1=64$ (O)

20

$95+77 \rightarrow 172$

112. ③

060

(가) $a_5=5$

(나) $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n\geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{100}a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하는 문제이다.

$n\geq 5$이면 a_n이 하나의 값으로 정해지므로

$\sum_{k=5}^{100}a_k=A$는 상수이다.

즉, $\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{4}a_k+A$이므로 최댓값과 최솟값을 결정하는 것은 $\sum_{k=1}^{4}a_k$이다.

Tip a_1부터 미지수로 놓고 풀면 case가 굉장히 복잡하므로 역으로 a_5부터 출발하는 방법을 택하는게 유리하다.

$a_5=5=\begin{cases} a_4-6 & (a_4\geq 0) \\ -2a_4+3 & (a_4<0) \end{cases}$ 이므로

$a_4=11$ or $a_4=-1$

① $a_4=11$일 때

$a_4=11=\begin{cases} a_3-6 & (a_3\geq 0) \\ -2a_3+3 & (a_3<0) \end{cases}$ 이므로

$a_3=17$ or $a_3=-4$

①-(1) $a_3=17$일 때

$$a_3=17=\begin{cases} a_2-6 & (a_2\geq 0) \\ -2a_2+3 & (a_2<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_2=23$ or $a_2=-7$

①-(1)-❶ $a_2=23$일 때

$$a_2=23=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_1=29$ or $a_1=-10$

①-(1)-❷ $a_2=-7$

$$a_2=-7=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0)\end{cases}$$ 를

만족시키는 a_1는 존재하지 않는다.

①-(2) $a_3=-4$일 때

$$a_3=-4=\begin{cases} a_2-6 & (a_2\geq 0) \\ -2a_2+3 & (a_2<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_2=2$

$$a_2=2=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_1=8$

② $a_4=-1$일 때

$$a_4=-1=\begin{cases} a_3-6 & (a_3\geq 0) \\ -2a_3+3 & (a_3<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_3=5$

$$a_3=5=\begin{cases} a_2-6 & (a_2\geq 0) \\ -2a_2+3 & (a_2<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_2=11$ or $a_2=-1$

②-(1) $a_2=11$일 때

$$a_2=11=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_1=17$ or $a_1=-4$

②-(2) $a_2=-1$일 때

$$a_2=-1=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0)\end{cases}$$ 이므로

$a_1=5$

따라서 서로 다른 $\sum_{k=1}^{4}a_k$의 값은 다음과 같다.

i) $a_4+a_3+a_2+a_1=11+17+23+29=80$

ii) $a_4+a_3+a_2+a_1=11+17+23+(-10)=41$

iii) $a_4+a_3+a_2+a_1=11+(-4)+2+8=17$

iv) $a_4+a_3+a_2+a_1=(-1)+5+11+17=32$

v) $a_4+a_3+a_2+a_1=(-1)+5+11+(-4)=11$

vi) $a_4+a_3+a_2+a_1=(-1)+5+(-1)+5=8$

$M=80+\sum_{k=5}^{100}a_k=80+A$, $m=8+\sum_{k=5}^{100}a_k=8+A$ 이므로

$M-m=72$이다.

답 ③

113. 63

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 최댓값과 최솟값의 합을 추론한다.

$a_1=3$ 이므로 $a_2=a_1-10+k=k-7$

(i) $a_2<0$ 인 경우, $k-7<0$ 에서 $k<7$

$a_3=|a_2+2|=|k-5|$

$a_3\ge 0$ 이므로 $a_4=a_3-10+k=|k-5|-10+k$

① $k<5$ 일 때

$a_4=-(k-5)-10+k=-5$

$a_5=|a_4+4|=1$ 이므로

$a_4\times a_5=0$ 을 만족하는 k 의 값은 존재하지 않는다.

② $5\le k<7$ 일 때

$a_4=(k-5)-10+k=2k-15$ 에서

$-5\le 2k-15<-1$

$a_5=|a_4+4|=|(2k-15)+4|=|2k-11|$

$a_4\ne 0$ 이므로 $a_5=0$ 이어야 한다.

$|2k-11|=0$ 에서 $k=\frac{11}{2}$

(ii) $a_2\ge 0$ 인 경우, $k-7\ge 0$ 에서 $k\ge 7$

$a_3=a_2-10+k=2k-17$

① $7\le k<\frac{17}{2}$ 일 때

$a_3<0$ 이므로

$a_4=|a_3+3|=|(2k-17)+3|=2k-14$

$a_4\ge 0$ 이므로

$a_5=a_4-10+k=(2k-14)-10+k=3k-24$

$a_4\times a_5=(2k-14)(3k-24)=0$ 이어야 하므로

$k=7$ 또는 $k=8$

② $k\ge\frac{17}{2}$ 일 때

$a_3\ge 0$ 이므로

$a_4=a_3-10+k=(2k-17)-10+k=3k-27$

$\frac{17}{2}\le k<9$ 일 때, $a_4<0$ 이므로

$a_5=|a_4+4|=|(3k-27)+4|=3k-23$ 이고,

$\frac{5}{2}\le a_5<4$

그러므로 $a_4\times a_5=0$ 을 만족하는 k 의 값은 존재하지 않는다.

$k\ge 9$ 일 때, $a_4\ge 0$ 이므로

$a_5=a_4-10+k=(3k-27)-10+k=4k-37$

$a_4\times a_5=(3k-27)(4k-37)=0$ 이어야 하므로

$k=9$ 또는 $k=\frac{37}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 k 의 값은 $\frac{11}{2}$, 7, 8, 9, $\frac{37}{4}$ 이므로

$M=\frac{37}{4}$, $m=\frac{11}{2}$ 에서 $M+m=\frac{59}{4}$

따라서 $p=4$, $q=59$ 이므로 $p+q=63$