손풀이

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 2^{-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2 \times \frac{1}{2} = 1$

2. 함수 $f(x)=x^2+3x+5$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 2x+3$

$f'(1) = 5$

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 + a_2 = 12$$

을 만족시킬 때, k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k + k^2 = 12$

$k = 3 \ (k > 0)$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 7x - a & (x < 1) \\ x^2 + a & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$7 - a = 1 + a$

$a = 3$

5. $\int_{-3}^{3}(x^3+3x^2+5x-3)\,dx$ 의 값은? [3점]

① 18　② 24　③ 30　④ 36　⑤ 42

$2\int_0^3 (3x^2-3)\,dx$

$2\left[x^3-3x\right]_0^3 = 36$

6. $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{4}$ 일 때, $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{7}{12}$　③ $-\frac{1}{12}$　④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{7}{4}$

$\sin\theta = -\frac{3}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{7}{16}$

$\frac{\frac{7}{16}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{7}{12}$

7. 점 $(-1,\,-2)$ 에서 곡선 $y=x^3+4x^2+4x+2$ 에 그은 접선을 $y=g(x)$ 라 할 때, $g(1)$ 의 값은? [3점]

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

$3t^2+8t+4 = \frac{t^3+4t^2+4t+4}{t+1}$

$(3t^2+8t)(t+1) = t^3+4t^2$

$t(3t^2+11t+8) = t(t^2+4t)$

$t(2t^2+7t+8) = 0$

$t=0,\quad g(x) = 4x+2$

8. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\dfrac{2^a - \log_2 b}{a - b} = -1$을 만족할 때, $\dfrac{\log_2 b}{a}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^a + a = b + \log_2 b$

$b = 2^a$

9. 다항함수 $f(x)+2x$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하고, 함수 $2xf'(x)+3x^2$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 하자. $F(x) = G(x) + 4$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

$f(x) + 2x = 2xf'(x) + 3x^2$

최고차항 2차

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$ax^2 + (b+2)x + c = 2x(2ax+b) + 3x^2$

$a = -1$

$b = 2$

$f(x) = -x^2 + 2x$

10. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - 4k) b_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - 3^k) a_k$$

을 만족시킨다. $a_1 = 8$일 때, b_3의 값은? [4점]

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72

$(a_n - 4n)b_n = (b_n - 3^n)a_n$

$4n \cdot b_n = 3^n \cdot a_n$

$a_1 = 8 \Rightarrow a_n = 8n$

$b_n = 2 \cdot 3^n$, $b_3 = 54$

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P, 점 Q의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자.
시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 $f(t)$, $g(t)$가

$$f(t)=t^3-4t^2-2t+4,\quad g(t)=2t^2-14t+12$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 점 P가 출발 이후 속도가 0이 될 때는 한 번뿐이다.
ㄴ. 점 P와 점 Q가 만나는 시각에서, 점 P의 속도가 점 Q의 속도보다 크다.
ㄷ. 점 P의 속도는 점 Q의 속도보다 항상 크거나 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

$f(t)-g(t)=t^3-6t^2+12t-8=(t-2)^3$

ㄱ. $f'(t)=3t^2-8t-2$

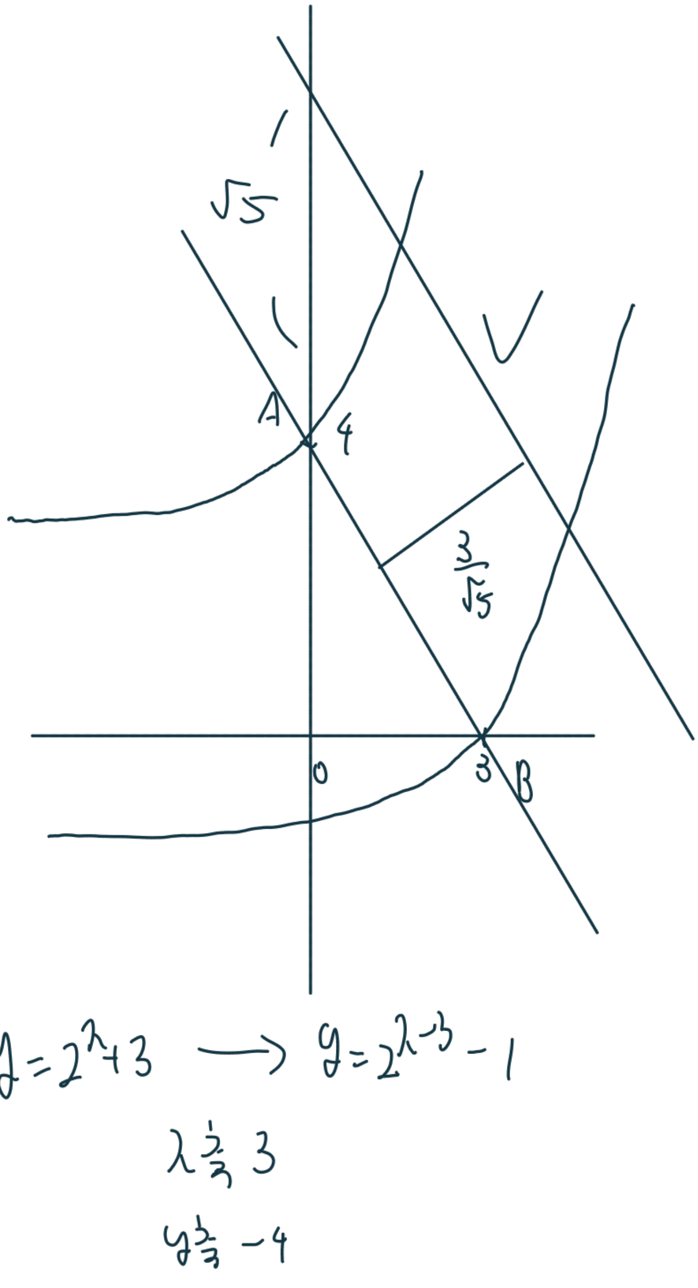
$t=\frac{4\pm\sqrt{22}}{3}$

ㄴ. $t=2$, $f'(2)=g'(2)$

ㄷ. $f'(t)-g'(t)=3(t-2)^2$

12. 좌표평면 상에 두 곡선 $y=2^x+3$, $y=2^{x-3}-1$이 존재한다.
곡선 $y=2^x+3$과 y축이 만나는 점을 점 A,
곡선 $y=2^{x-3}-1$과 x축이 만나는 점을 점 B라 하고,
직선 AB와 평행한 직선 l에 대해 두 곡선과 직선 AB, 직선 l로 둘러싸인 영역의 넓이가 $3\sqrt{5}$일 때, 가능한 직선 l의 y절편을 모두 곱한 값은? [4점]

① -9 ② -4 ③ 1 ④ 6 ⑤ 11



$y=2^x+3 \longrightarrow y=2^{x-3}-1$

x축 3

y축 -4

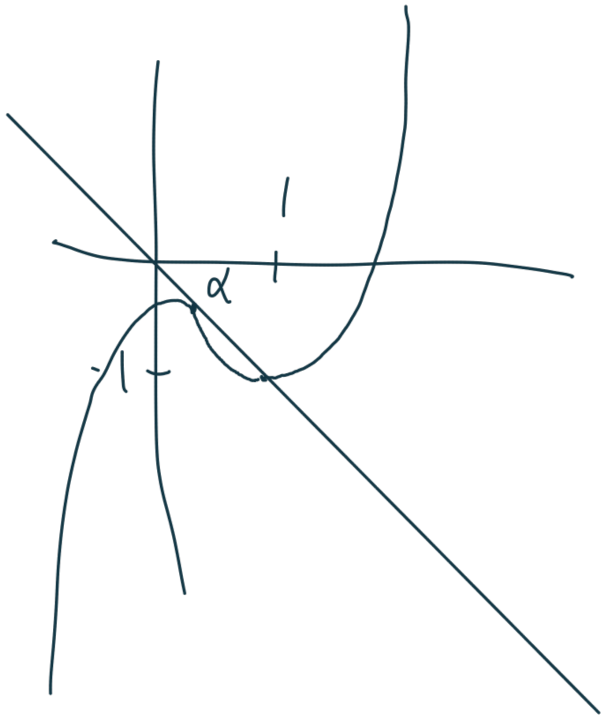
$(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})=11$

13. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)+1} = \infty$ $\to \lim_{x \to 1} (f(x)+1) = 0+$
>
> (나) $f(x)+x=0$의 실근이 2개이다.

$f(2)$의 값은? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19



$f(x)+x = 4(x-1)(x-\alpha)^2$

$f'(1) = 0$

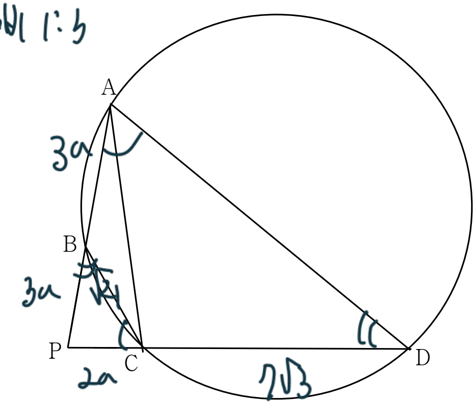
$f'(1)+1 = 4(1-\alpha)^2$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$f(2) = 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = 7$

14. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자. 삼각형 BCP와 삼각형 ADP의 넓이의 비가 $1:9$이고, $\sin(\angle BCP) : \sin(\angle ADC) = 3:2$이다. $\overline{BC} = \sqrt{21}$, $\overline{CD} = 7\sqrt{3}$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]

↳ 닮음비 1:3



① $8\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{3}$
④ $11\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{3}$

$7a = 7\sqrt{3}$, $a = \sqrt{3}$

$\cos(\angle BPC) = \frac{27+12-21}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\triangle APC = \frac{1}{2}\cdot 6a\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

15. 상수 a와 최고차항의 계수의 절댓값이 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+ax-f(x) & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

(연속 X)

이 다음 조건을 만족시킨다.

$g'(x)$ ($g(x)$가 정의 없으면 우미와 좌미 의미)

(가) $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+2h)-g(x+h)}{h}=1$을 만족시키는 실수 x는 -2와 1뿐이다. (나) $\lim_{h\to 0-}\frac{g'(1+h)+g'(1-h)-2}{h}<0$

$\lim_{h\to 0+}\frac{g'(1+h)+g'(1-h)-2}{h}>0$

$g(1)=1$일 때, $g(-4)$의 값은? [4점]

① $\frac{47}{6}$ ② $\frac{95}{12}$ ③ 8 ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{49}{6}$

$g'(1)=1 \to f'(1)=1,\ a=1$

$g'(-2)=1 \to f'(-2)=-2$

$f'(x)=x$ 의 근 $1, -2$

$f'(x)-x=3(x-1)(x+2)$

or

$-3(x-1)(x+2)$

$\lim_{h\to 0+}\frac{g'(1+h)+g'(1-h)-2}{h}>0$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f'(1+h)+(2-h)-f'(1-h)-2}{h}>0$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f'(1+h)-f'(1-h)}{h}>1$

$\to f'(x)-x=3(x-1)(x+2)$

$f(x)=x^3+2x^2-6x+4$ $g(-4)=8$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x^2-4x+5)=\log_6(-x^2+4x-3)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\log_3((x-2)^2+1)=\log_6(-(x-2)^2+1)$

$x=2$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x$이고 $f(0)=6$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3+x^2+6$

$f(1)=9$

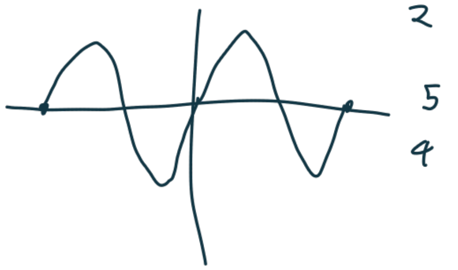
18. $-2\pi \le \theta \le 2\pi$에서

$$\sin^3\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

를 만족시키는 θ의 개수를 구하시오. [3점]

$2\sin^3\theta - \sin^2\theta - \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) = 0$

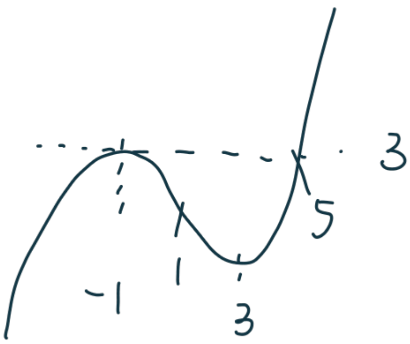


$\boxed{11}$

19. 상수 a에 대해 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$ 라 하자. $y = f(x)$와 $y = n$의 교점의 개수를 $g(n)$ 이라 할 때, 상수 b에 대해 $g(n) + n = b$를 만족하는 n의 값은 2, 3, 4이다. 이때, $f(b)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$

$b = 5$



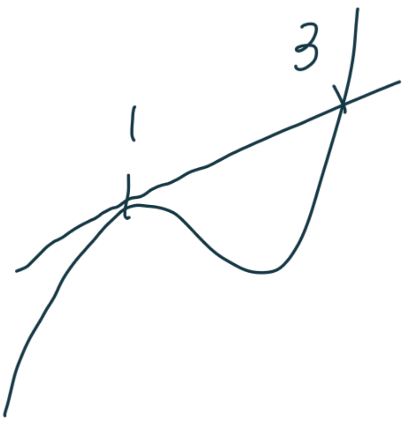
$\boxed{3}$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 실수 k에 대해 $f(k+2) - f(k) > 2f'(k)$를 성립시키는 k의 범위는 $k > 1$이다.

$f'(3) = 15$일 때, $f'(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$$\frac{f(k+2) - f(k)}{2} > f'(k)$$



$f(x) = (x-1)^2(x-5) + f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(x) = 2(x-1)(x-5) + (x-1)^2 + f'(1)$

$f'(5) - f'(3) = 28$

$f'(5) = 43$

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 가능한 a_1 값의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} 3a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 홀수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
>
> (나) $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은 40이하의 자연수이다.

i) a_1 = 홀수

$a_2 = 3a_1+1$

$1\to4\to2\to1\to4$ (o)

$3\to10\to5\to16\to8$ (x)

$5\to16\to8\to4\to2$ (o)

$7\to22\to11\to34\to17$ (x)

⋮ (x)

ii) a_1 = 짝수

$2\to1\to4\to2\to1$ (o)

$4\to2\to1\to4\to2$ (o)

$6\to3\to10\to5\to16$ (o)

$8\to4\to2\to1\to4$ (o)

$10\to5\to16\to8\to4$ (x)

$12\to6\to3\to10\to5$ (o)

$14\to7\to22\to11\to34$ (x)

$16\to8\to4\to2\to1$ (o)

⋮ (x)

iii) $a_1 \neq$ 정수

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

$\frac{31}{16}a_1 = 40$ 이하의 자연수

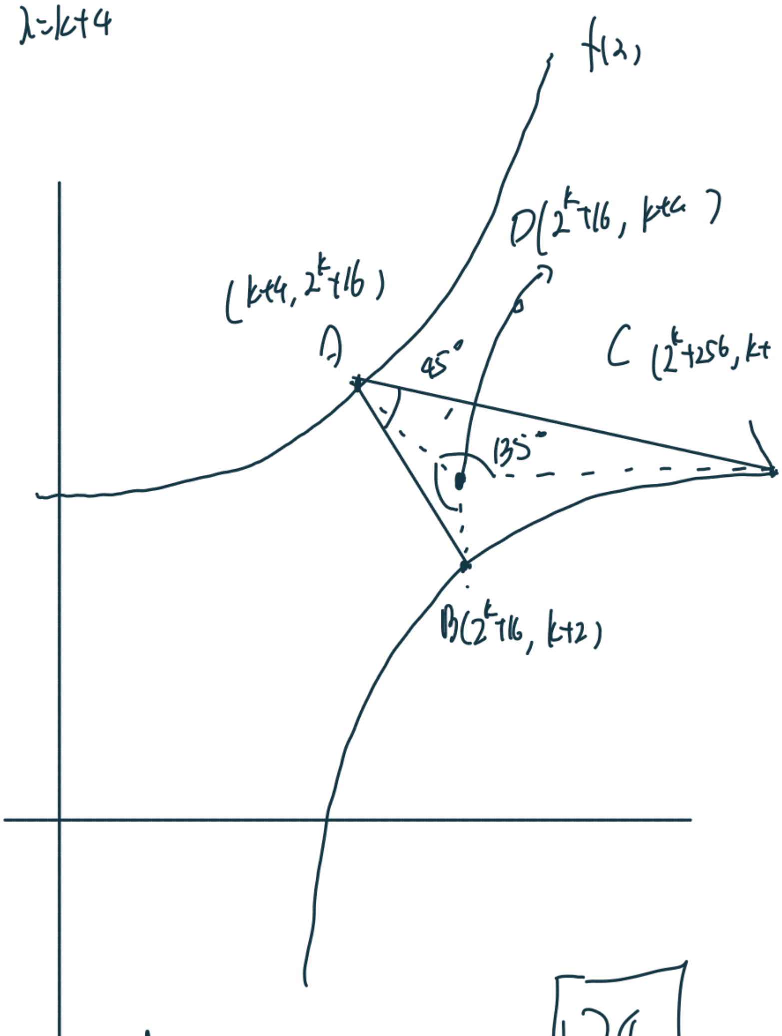
→ 39개 (1~40, 31은 제외)

$\boxed{47}$

22. 양의 상수 k에 대해 함수 $f(x)=2^{x-k}+2^k$, 함수 $g(x)=\log_4(x-2^k)+k$, 함수 $h(x)=4^{k+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+16$라 하자. $y=f(x)$와 $y=h(x)$의 교점을 점 A라 하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 중 x좌표가 점 A의 y좌표와 같은 점을 점 B, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 중 y좌표가 점 A의 x좌표와 같은 점을 점 C라 하자. 선분 AB와 선분 AC가 이루는 예각의 크기가 45°일 때, $(h(k+4)-g(f(k+8)))^2$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)=h(x)$, $4^{k+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+16=f(x)$ (2^{-x+k+4})

$x=k+4$



$\triangle ABD \sim \triangle CAD$

$\boxed{240}$

$\overline{AD}=\sqrt{2\times240}$

$2^k-k-12=4\sqrt{15}$

$(h(k+4)-g(f(k+8)))^2=240$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x}$ 의 값은? [2점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$

24. $\int_0^6 \frac{2x+3}{x+1} dx$ 의 값은? [3점]

① $12 + \ln 5$ ② $12 + \ln 6$ ③ $12 + \ln 7$
④ $12 + 3\ln 2$ ⑤ $12 + 2\ln 3$

$\int_0^6 \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) dx$

$= 12 + \ln 7$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+5}=\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n{}^2+n}-\sqrt{a_n{}^2-n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{a_n{}^2+n}+\sqrt{a_n{}^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2-\frac{1}{n}}}=2$$

26. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 시각 $t\ (t>0)$에서 $x=2t^2+3$, $y=t^4-\ln t$를 만족할 때, 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 $x=5$에서 $x=11$까지 이동한 거리는? [3점]

① $15+\ln 2$ ② $15+2\ln 2$ ③ $16+\ln 2$
④ $16+2\ln 2$ ⑤ $16+3\ln 2$

$$\int_1^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^2\sqrt{(4t)^2+\left(4t^3-\frac{1}{t}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^2\left(4t^3+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=15+\ln 2$$

27. 실수 전체 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대해

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$에서

$$f(e^{\sin x}+\sin x)=x$$

가 성립할 때, $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f'(e^{\sin x}+\sin x)\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\ln(\sqrt{3}-1)$ ② $\ln(2\sqrt{3}-1)$ ③ 1 ④ $\ln(1+\sqrt{3})$ ⑤ $\ln(2+\sqrt{3})$

$f'(e^{\sin x}+\sin x)\cdot\cos x(e^{\sin x}+1)=1$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(e^{\sin x}+1)}\,dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{\cos x(e^{\sin x}+1)}\,dx$$

$(\tan t+\sec t)'$
$=\sec^2 t+\sec t\cdot\tan t$
$=\sec t(\sec t+\tan t)$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{-1}{\cos t(e^{-\sin t}+1)}\,dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sin t}}{\cos t(e^{\sin t}+1)}\,dt$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t}\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sec t\,dt$$

$$=\Big[\ln(\sec t+\tan t)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3})$$

28. 1이 아닌 자연수 n에 대해

$$S(n)=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\dots+\frac{1}{3n-1}-\frac{n-1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\dots\dots$$

라고 할 때, $\frac{S_2+S_8}{S_4}$ 의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $2\ln 2$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{kn-1}-\frac{n-1}{kn}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)-n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\cdots\frac{1}{kn}\right)$

$=\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{kn}$

$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)$

$=\int_{0}^{n-1}\frac{1}{1+x}\,dx=\ln n$

$\frac{S_2+S_8}{S_4}=\frac{\ln 2+\ln 8}{\ln 4}=2$

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$, 수열 $\{b_n\}$에 대해 수열 $\{a_nb_n\}$이 등비수열을 이루고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \frac{1}{4}a_1b_1 - \frac{3}{2}a_2b_2 = 54$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대해 a_n, b_n 중 적어도 하나는 정수이다.

모든 자연수 n에 대해 $b_n < a_n \le a_1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 최댓값이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{a_1b_1}{1-r} = \frac{1}{4}a_1b_1 - \frac{3}{2}a_1b_1 \cdot r = 54$

$\boxed{29}$

$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}r$

$6r^2-7r-3=0$ $(2r-3)(3r+1)=0$

$r=-\frac{1}{3}$, $a_1b_1=72$ b_n 합이 최대

a_nb_n = 양수 → a_n, b_n 모두 양수

a_nb_n = 음수 → b_n은 절댓값 최소 음수

a_n	b_n	a_nb_n
a_1	$72/a_1$	72
a_1	$-24/a_1$	-24
3	$8/3$	8
a_1	$-8/3a_1$	$-\frac{8}{3}$
1	$8/9$	$\frac{8}{9}$

$a_1=9$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - \frac{8}{27} + \frac{8}{9} \cdots$

$= 8 + \frac{\frac{8}{9}}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{26}{3}$

30. 실수 전체 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$와 사차함수 $g(x)$가 모든 실수 t에 대해

$$g(t) = \int_0^t tf(x^2+2)\,dx$$

를 만족시킨다.

$f(2)=6$, $\int_2^6 f(x)\,dx = 36$일 때, $g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(t) = t\int_0^t f(x^2+2)\,dx$

$g(-t) = -t\int_0^{-t} f(x^2+2)\,dx$ $x=-k$

$= -t\int_0^t -f(k^2+2)\,dk$

$= t\int_0^t f(k^2+2)\,dk = g(t)$

$g(t) = at^4+bt^2$

$3at^2+b = f(t^2+2)$

$t^2+2 = s$ $(s \ge 2)$

$3as+b-6a = f(s)$

$\int_2^6 f(s)\,ds = \int_2^6 3as+b-6a = 48a+4b-24a$

$=24a+4b=36$

$f(2)=6$, $b=6$, $a=\frac{1}{2}$

$g(2)=16a+4b=32$

$\boxed{32}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.