〈 공통 〉

01

[풀이]

$5^{\sqrt{2}+1}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$

$=5^{\sqrt{2}+1}\times5^{-\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}=5$

답 ④

02

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x-4$

미분계수의 정의에 의하여

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$

$=2\times4-4=4$

답 ④

03

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$\sum\limits_{k=1}^{6}(2a_k-1)$

$=2\sum\limits_{k=1}^{6}a_k-1\times6=30$

$\therefore\ \sum\limits_{k=1}^{6}a_k=18$

답 ⑤

04

[풀이]

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-1+2=1$

답 ①

05

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f(x)=2x(x^2+x-3)+(x^2+2)(2x+1)$

$\therefore\ f'(1)=2\times(-1)+3\times3=7$

답 ②

06

[풀이]

$\cos(\theta-\pi)=\cos(-(\pi-\theta))$

$=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}(<0)$

그런데 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로

θ는 제2사분면의 각이다.

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{4}{5}$

답 ⑤

07

[풀이]

주어진 함수의 도함수는

$y'=3x^2-10x+6$, $y'|_{x=3}=3$

접선의 방정식은

$y=3(x-3)+0$, 즉 $y=3x-9$

이 직선이 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$a=3\times5-9=6$

$\therefore\ a=6$

답 ①

08

[풀이1]

$\log_2 a = A$, $\log_2 b = B$로 두면

$2\log_2 a + \log_2 b = 2$, $2A + B = 2$

$\log_2 a + 2\log_2 b = 7$, $A + 2B = 7$

연립하면

$A + 2(2-2A) = 7$, $3A = -3$, $A = -1$, $B = 4$

즉, $\log_2 a = -1$, $\log_2 b = 4$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 16$

$\therefore\ a \times b = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

답 ③

[풀이2]

문제에서 주어진 두 등식을 정리하면

$2\log_2 a + \log_2 b = 2$, $\log_2 a + 2\log_2 b = 7$, 즉

$\log_2 a^2 b = 2$, $\log_2 ab^2 = 7$,

$a^2 b = 2^2$, $ab^2 = 2^7$

위의 두 등식을 변변히 곱하면

$a^3 b^3 = 2^9$, $(ab)^3 = (2^3)^3$, $ab = 2^3$

$\therefore\ a \times b = 8$

답 ③

09

[풀이]

$F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x) = f(x)$

$G(x)$가 $2f(x)+1$의 한 부정적분이므로

$G'(x) = 2f(x) + 1$

위의 두 등식에서

$G'(x) = 2F'(x) + 1$, 즉 $G'(x) - 2F'(x) = 1$

$G(x) - 2F(x)$

$= \int (G'(x) - 2F'(x))dx = x + C$

(단, C는 적분상수)

위의 등식에 $x = 3$을 대입하면

$G(3) - 2F(3) = 3 + C = 0$ ($\because G(3) = 2F(3)$)

즉, $C = -3$

같은 등식에 $x = 5$를 대입하면

$\therefore\ G(5) - 2F(5) = 5 - 3 = 2$

답 ②

[참고]

다음과 같이 방정식

$G(x) - 2F(x) = x + C$(단, C는 적분상수)

을 유도할 수도 있다.

$\int f(x)dx = F(x) + C_1$,

$\int (2f(x)+1)dx = G(x) + C_2$, 즉 $\cdots$㉠

$2\int f(x)dx + \int dx = 2F(x) + 2C_1 + x + C_3$ $\cdots$㉡

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

㉠=㉡:

즉, $G(x) - 2F(x) = x + 2C_1 - C_2 + C_3$

여기서 $2C_1 - C_2 + C_3 = C$로 두면

$G(x) - 2F(x) = x + C$

10

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.

문제에서 이 수열의 모든 항이 양수라고 하였으므로

$a_1 > 0$, $r > 0$

문제에서 주어진 조건에서

$a_2 = 1 = a_1 r$, $a_1 = \frac{1}{r}$

$\sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k$

$= (-S_1 + S_2) + (-S_3 + S_4)(-S_5 + S_6)$

$= a_2 + a_4 + a_6$

$= 1 + r^2 + r^4 = 21$, $r^4 + r^2 - 20 = 0$,

$(r^2+5)(r^2-4) = 0$, $r^2 = 4$, $r = 2$

$$\therefore\ S_2+S_7=\frac{1}{2}+1+\frac{\frac{1}{2}(2^7-1)}{2-1}=65$$

답 ③

11

[풀이]

ㄱ. (참)

$v(1)=0$이고, $t=1$의 좌우에서

$v(t)=(3t-7)(t-1)$

의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로

$t=1$일 때, 점 P의 운동 방향은 오른쪽에서 왼쪽으로 바뀐다.

ㄴ. (참)

$$x(t)=\int v(t)dt=t^3-5t^2+7t+C$$

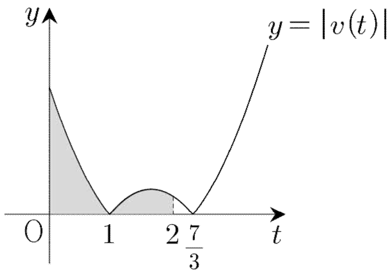
(단, C는 적분상수)

$x(0)=C=0$이므로

$x(t)=t^3-5t^2+7t$

$\therefore\ x(1)=3$

ㄷ. (참)



움직인 거리는 위의 그림에서 어둡게 색칠된 도형의 넓이와 같다.

$$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2(-v(t))dt$$

$$=\int_0^1(3t^2-10t+7)dt+\int_1^2(-3t^2+10t-7)dt$$

$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1+\left[-t^3+5t^2-7t\right]_1^2$$

$=3+1=4$

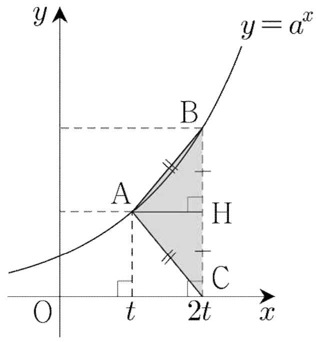
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12

[풀이]

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



이등변삼각형의 성질에 의하여

직선 AH는 선분 BC의 수직이등분선이다. 즉,

$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{HC}}$

위의 그림처럼

(점 B의 y좌표)$=2\times$(점 A의 y좌표), 즉

$a^{2t}=2\times a^t$, $a^t=2$

$$(\triangle \text{ACB의 넓이})=\frac{1}{2}\times t\times a^{2t}$$

$$=\frac{1}{2}\times t\times(a^t)^2=\frac{1}{2}\times t\times 2^2=2t=8,\ t=4$$

$a^4=2$에서 $a=2^{\frac{1}{4}}$

$$\therefore\ a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times 4=2^{\frac{1}{4}}\times 2^2=2^{\frac{1}{4}+2}=2^{\frac{9}{4}}$$

답 ①

13

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(x)=(x+3)^2+3>0$

이므로 $f(x)\neq 0$이다.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{f(x)\{f(x)-k(x+2)\}}\qquad\cdots(*)$$

의 극한값이 모든 실수 a에 대하여 존재하기 위한 필요충

분조건은

'$f(x)-k(x+2)\neq 0$(…㉠) 또는

$f(x)-k(x+2)=x^2$(…㉡)'

이차방정식 $f(x)-k(x+2)=0$의 근의 분리를 하자.

- 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x)-k(x+2)=(x-\alpha)(x-\beta)$(단, $\alpha\neq\beta$)

이때, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$이면 (*)은 $a=\alpha$, β일 때, 값을 갖지 않는다.

$\alpha=0(\beta\neq 0)$이면 (*)은 $a=\beta$일 때, 값을 갖지 않는다.

$\beta=0(\alpha\neq 0)$이면 (*)은 $a=\alpha$일 때, 값을 갖지 않는다.

즉, (*)의 값이 존재하지 않는 a의 값이 항상 있다.

- 중근을 갖는다. (㉡의 경우)

$f(x)-k(x+2)=(x-\alpha)^2$

(*)의 값이 항상 존재하려면 $\alpha=0$이어야 한다.

$\alpha=0$일 때,

$$(*)=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{f(x)x^2}=\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(a)}$$

(이때, $f(a)>0$)

항등식 $f(x)-k(x+2)=x^2$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-2k=0$, $k=\dfrac{f(0)}{2}=6$ (1개)

- 서로 다른 두 허근을 갖는다. (㉠의 경우)

$f(x)-k(x+2)\neq 0$

그런데 이차식 $f(x)-k(x+2)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$f(x)-k(x+2)>0$

이때, (*)의 값은 항상 존재한다.

이차방정식

$f(x)-k(x+2)=x^2+(6-k)x+12-2k=0$

의 판별식을 D라고 하면

$D=(6-k)^2-4(12-2k)<0$,

$k^2-4k-12<0$, $(k-6)(k+2)<0$,

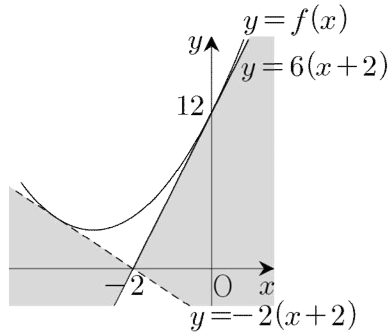
$-2<k<6$, $k=-1$, 0, 1, 2, 3, 4, 5 (7개)

이상에서 정수 k의 개수는 $1+7=8$이다.

답 ④

[참고]

풀이의 후반부를 기하적으로 해석해 보자.



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k(x+2)$가 만나지 않거나(…㉠),

점 $(0,\ 12)$에서 접하면(…㉡)

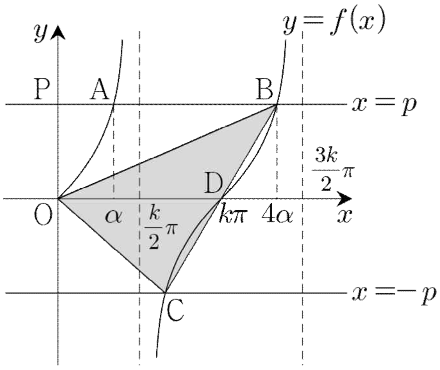
(*)의 극한값은 항상 존재한다.

14

[풀이]

함수 $f(x)=\tan\dfrac{x}{k}$의 주기는 $k\pi$이고,

두 직선 $x=\dfrac{k}{2}\pi$, $x=\dfrac{3k}{2}\pi$는 점근선이다. (아래 그림)



(단, $D(k\pi,\ 0)$)

점 A의 x좌표를 α로 두면

$\overline{AB}=3\overline{PA}$에서 $k\pi=3\alpha$, 즉 $\alpha=\dfrac{k}{3}\pi$

($\because$ 선분 AB의 길이는 함수 $f(x)$의 주기와 같다.)

점 $A\left(\dfrac{k}{3}\pi,\ p\right)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$p=\tan\left(\dfrac{1}{k}\times\dfrac{k}{3}\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

($\triangle$OCB의 넓이)

$=$($\triangle$OBD의 넓이)$+$($\triangle$OCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times k\pi\times p+\frac{1}{2}\times k\pi\times p$

$=\sqrt{3}k\pi=\frac{5\pi}{3},\ k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\therefore\ k+p=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}=\frac{14\sqrt{3}}{9}$

답 ③

15

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=|f(x)|-|x|$

$g'(0)=|f(0)|-|0|=0(\because f(0)=0)$

(나): $g'(2)=g'(6)=0$

이상에서

$g'(0)=g'(2)=g'(6)=0$

(가): $g'(\alpha)=0$ (단, $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 2,\ \alpha\neq 6$)

인 상수 α가 존재한다. 즉,

$g'(0)=g'(2)=g'(6)=g'(\alpha)=0$

(단, $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 2,\ \alpha\neq 6$)

방정식

$g'(x)=0(\cdots(*))\Leftrightarrow |f(x)|=|x|$

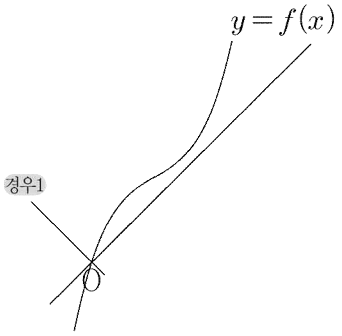
$\Leftrightarrow f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$

이때, 방정식 (*)는 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.

이제 삼차함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x,\ y=-x$의 위치 관계를 따지자.

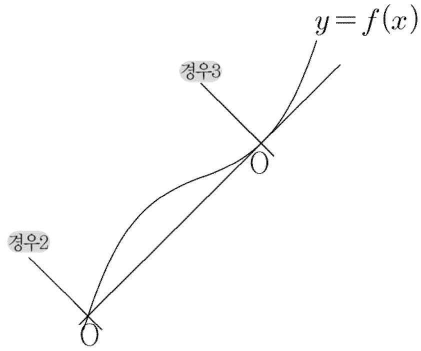
• 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우 (×)

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 한 점에서 만날 때,



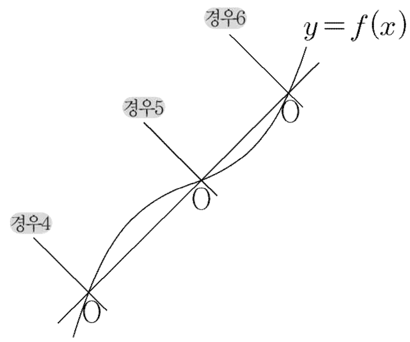
위의 그림에서 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 두 점에서 만날 때,



위의 그림에서 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 세 점에서 만날 때,

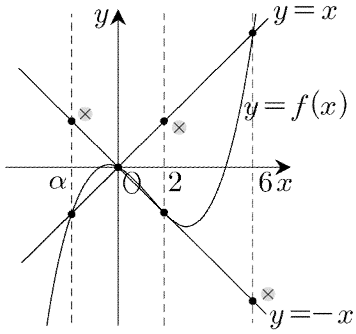


위의 그림에서 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

이상에서 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가져야 한다. (귀류법)

• 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우 (○)

(1) $\alpha<0$인 경우



만약 곡선 $y=f(x)$가 점 $(\alpha,\ -\alpha)$를 지나면

$x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로

사잇값의 정리에 의하여

곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 $(\beta,\ \beta)$에서 만날 수밖에 없다.

(단, $\beta<\alpha$)

이때, 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 5 이상이다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

마찬가지의 이유로 곡선 $y=f(x)$는 $(6,\ -6)$을 지날 수 없고, 반드시 점 $(6,\ 6)$을 지나야 한다.

삼차함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$ 위의 서로 다른 네 점을 동시에 지날 수 없으므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2,\ 2)$를 지나지 않는다.

그리고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ -2)$에서 직선 $y=-x$에 접하지 않으면

방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 5가 된다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

그런데 $x=2$의 좌우에서

$g'(x)=|f(x)|-|x|$

의 부호는 변하지 않으므로

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

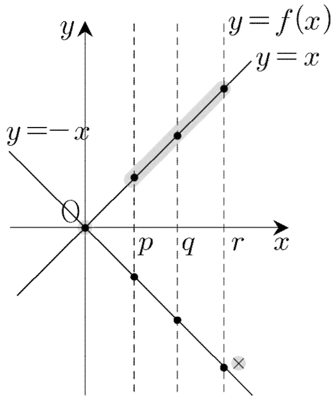
이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha>0$이다. (귀류법)

(2) $\alpha>0$인 경우

세 수 2, 6, α를 가장 작은 것부터 크기 순서대로 나열하면 p, q, r이라고 하자.

(예를 들어 $2<\alpha<6$이면 $p=2$, $q=\alpha$, $r=6$)



만약 곡선 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(r,\ -r)$을 지나면

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로

사잇값의 정리에 의하여

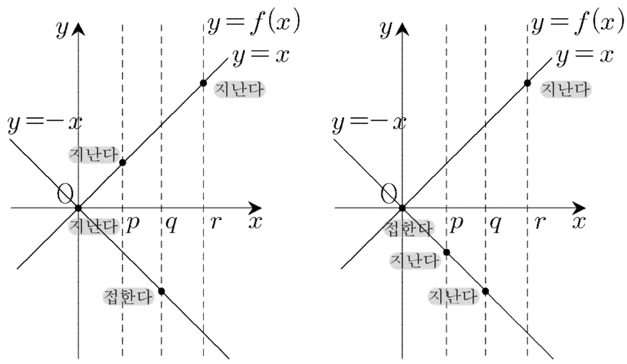
곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 $(\delta,\ \delta)$에서 만날 수밖에 없다.

(단, $r<\delta$)

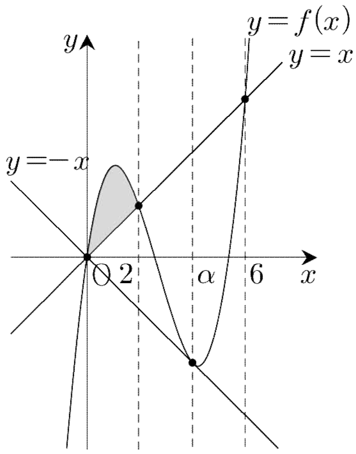
방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 5 이상이다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$는 반드시 점 $(\gamma,\ \gamma)$를 지나야 한다.

삼차함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$ 위의 서로 다른 네 점을 동시에 지날 수 없으므로 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.



우선 왼쪽 그래프 개형부터 따져보자.



조건 (나)에서 $p=2$, $q=\alpha$, $r=6$, 즉

$2<\alpha<6$

이어야 한다.

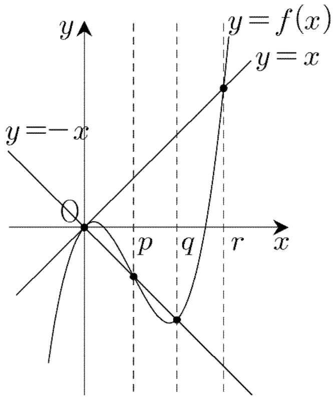
위의 그림에서 $f(6)>0$,

$$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt>0$$

이므로 $f(6)\times g(2)>0$

이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$r\neq 6$이라고 가정하면

$p=2,\ q=6,\ r=\alpha$

위의 그림에서

$f(6)=f(q)<0$,

$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt<0$

이므로 $f(6)\times g(2)>0$

이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $r=6,\ p=2,\ q=\alpha$이다.

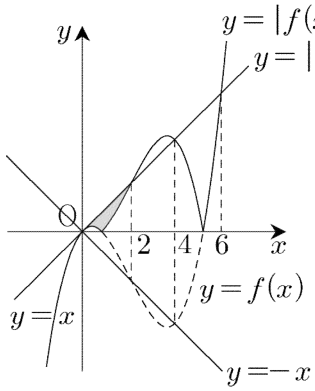
이제 함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$f(x)-x=ax^2(x-6)$

곡선 $y=f(x)$는 점 $(2,\ -2)$를 지나므로

$f(2)=a\times4\times(-4)+2=-2,\ a=\frac{1}{4}$,

$f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-6)+x$



위의 그림에서

$f(6)>0$,

$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt<0$

이므로 $f(6)\times g(2)<0$

이로써 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 찾았다.

$\therefore\ f(8)=\frac{1}{4}\times64\times2+8=40$

답 ⑤

[참고]

다음의 네 경우로 나누어서 문제를 해결해도 좋다.

(풀이 과정은 대동소이)

$f(0)=0,\ f(2)=2,\ f(6)=6$인 경우

$f(0)=0,\ f(2)=2,\ f(6)=-6$인 경우

$f(0)=0,\ f(2)=-2,\ f(6)=6$인 경우

$f(0)=0,\ f(2)=-2,\ f(6)=-6$인 경우

16

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_2=1\times a_1+2=3$,

$a_3=2\times a_2+2=8$

$\therefore\ a_3=8$

답 8

17

[풀이]

$f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

$f(1)=3+C=6,\ C=3$

$\therefore\ f(2)=14+3=17$

답 17

18

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$2a_5-a_4=a_5+(a_5-a_4)$

$=a_3+2d+d=6+3d=15,\ d=3$

$a_3=a_1+2d=a_1+6=6,\ a_1=0$

$\therefore\ a_{11}=3\times10=30$

답 30

19

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=a(\neq0)$

$a<0$이라고 가정하자.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$f(0)=5a=a,\ a=0$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $a>0$

$a>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$f(a)=2a^3-3a^3+5a=a,\ a^3=4a,\ a^2=4,\ a=2$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

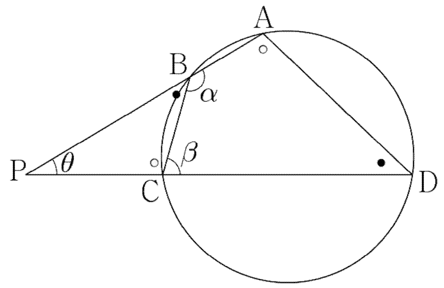
$f(0)=5a=10$

답 10

20

[풀이]

[과정]



$\angle\mathrm{BPC}=\theta$라 할 때,

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{BC}}=7:5:\sqrt{14}$이므로

삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{7^2+5^2-(\sqrt{14})^2}{2\times7\times5}=\dfrac{6}{7}$이다.

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=7:5$에서 $\overline{\mathrm{PB}}=7k,\ \overline{\mathrm{PC}}=5k,$

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=l,\ \overline{\mathrm{CD}}=3l$이라 하자.

원의 성질에 의하여

삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로

($\because$ 위의 그림에서$\bullet+\alpha=\pi,\ \circ+\beta=\pi$이므로

$\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{PDA},\ \angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{PAD}$)

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PA}}$, 즉

$7k:5k=(5k+3l):(7k+l)$

$5(5k+3l)=7(7k+l)$이고, $l=\boxed{3}\times k$이다.

삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{2}$이므로

($\because\ \overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{PA}}=5k:10k=1:2$)

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{\boxed{2}}\times\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{13}$이다. (이때, $k=2,\ l=6$)

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,

삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2\sqrt{13}}{\sin\theta}=2R$, 즉 $R=\dfrac{\sqrt{13}}{\dfrac{\sqrt{13}}{7}}=7\left(\because\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{13}}{7}\right)$

$R=\boxed{7}$이다.

(가): $p=3$

(나): $q=2$

(다): $r=7$

$\therefore\ p+q+r=12$

답 12

21

[풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이므로

$\dfrac{f'(x)}{2}+x^2-2=\dfrac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2$

$=\dfrac{5}{2}x^2+ax+\dfrac{b}{2}-2$,

$\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x}=\dfrac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x}$

$=4x^2+2ax+b$

이를 문제에서 주어진 연립부등식에 대입하면

$\dfrac{5}{2}x^2+ax+\dfrac{b}{2}-2\le 4x^2+2ax+b\le x^4$

정리하면

$-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}(2ax+b)-2\le 2ax+b\le x^4-4x^2$

왼쪽 부등식을 정리하면

$-3x^2-4\le 2ax+b$

따라서 연립부등식을 다시 쓰면

$-3x^2-4\le 2ax+b\le x^4-4x^2 \qquad \cdots(*)$

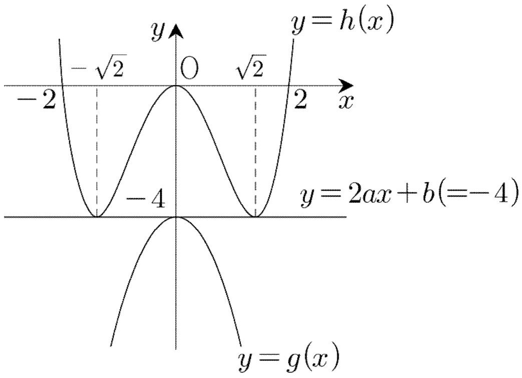
$g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$로 두자.

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$

사차함수 $h(x)$는 $x=\pm\sqrt{2}$에서 극솟값 -4를 갖고, $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다. (그리고 이 함수는 y축에 대하여 대칭이다.)

두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 한 평면 위에 나타내면



위의 그림처럼 직선 $y=2ax+b$가 $y=-4$이어야 연립부등식 (*)이 성립한다. 즉, $a=0$, $b=-4$

$f'(x)=3x^2-4$

$\therefore\ f'(10)=296$

답 296

[참고1]

연립부등식 (*)를 다음과 같이 유도할 수도 있다.

두 함수 $f(x)$, $p(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,

$p(x)=ax^2+bx+c$

로 두면

$f(x)=x^3+p(x)$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x}=\dfrac{(2x)^3+p(2x)-p(0)}{2x}$

$=4x^2+p'(x)$

이므로

$\dfrac{3x^2+p'(x)}{2}+x^2-2\le 4x^2+p'(x)\le x^4$

$-3x^2-4\le p'(x)\le x^4-4x^2$, 즉

$-3x^2-4\le 2ax+b\le x^4-4x^2$

[참고2]

다음과 같이 답을 구할 수도 있긴 하다. (당연히 권장하지 않음.)

문제에서 주어진 연립부등식에서

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{2}+x^2-2\right)\le\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}$

$\displaystyle\le\lim_{x\to 0}x^4$, 즉

$\dfrac{f'(0)}{2}-2\le f'(0)\le 0$

정리하면

$-4\le f'(0)\le 0$

삼차함수 $f(x)$의 변곡점이 $(0,\ f(0))$이고, $f'(0)=-4$라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f'(x)=3x^2-4$

$f(x)=x^3-4x+C$ (단, C는 적분상수)

이를 문제에서 주어진 연립부등식에 대입하면

$\dfrac{3x^2-4}{2}+x^2-2\le\dfrac{8x^3-8x}{2x}\le x^4$

정리하면

$\dfrac{5x^2-8}{2}\le 4x^2-4\le x^4$

왼쪽 부등식: $3x^2\ge 0$ (○)

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

오른쪽 부등식: $x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2 \geq 0$ (○)

(단, 등호는 $x=\pm\sqrt{2}$일 때 성립한다.)

어차피 함수 $f(x)$는 유일하게 결정되므로

$f'(x)=3x^2-4$

이다.

$\therefore\ f'(10)=296$

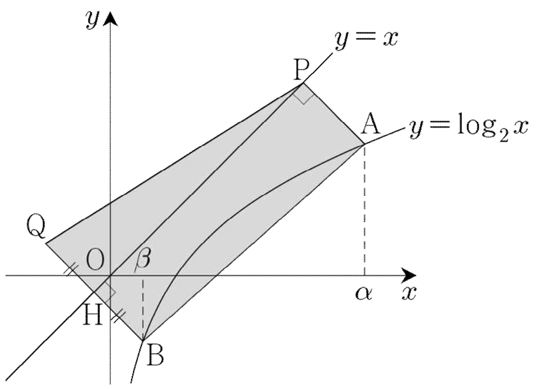
22

[풀이]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β,

두 직선 BQ, $y=x$의 교점을 H라고 하자.

이때, $\overline{\mathrm{PH}} \perp \overline{\mathrm{BQ}}$



두 직선 AP, BQ의 방정식을 각각

$y=-x+k_a$, $y=-x+k_b$

라고 하면 조건 (가)에 의하여

$k_a-k_b=\dfrac{13}{2}$

(나): $\mathrm{A}(\alpha,\ -\alpha+k_a)$, $\mathrm{B}(\beta,\ -\beta+k_b)$

이므로

(직선 AB의 기울기)

$=\dfrac{(-\alpha+k_a)-(-\beta+k_b)}{\alpha-\beta}$

$=\dfrac{(k_a-k_b)-(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$

$=\dfrac{\frac{13}{2}-(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\dfrac{6}{7}$, $\alpha-\beta=\dfrac{7}{2}$ …㉠

한편

(점 A의 y좌표)$=-\alpha+k_a=\log_2\alpha$,

(점 B의 y좌표)$=-\beta+k_b=\log_2\beta$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$\beta-\alpha+k_a-k_b=\log_2\dfrac{\alpha}{\beta}$, 즉

$-\dfrac{7}{2}+\dfrac{13}{2}=3=\log_2\dfrac{\alpha}{\beta}$,

$\dfrac{\alpha}{\beta}=2^3=8$, $\alpha=8\beta$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\alpha=4$, $\beta=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=2\overline{\mathrm{BH}}=2\times\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

그리고

$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{k_a-k_b}{\sqrt{2}}=\dfrac{13}{2\sqrt{2}}$

(□APQB의 넓이)$=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}\times\dfrac{13}{2\sqrt{2}}=\dfrac{65}{8}$

$\therefore\ p+q=73$

답 73

2026 이동훈 기출 https://atom.ac/books/12829
오르비 https://orbi.kr/

〈 확률과 통계 〉

23

[풀이]

중복조합의 수에 의하여

$_{3}\Pi_{4} = 3^4 = 81$

답 ④

24

[풀이]

$A \cup (A^C \cap B) = A \cup (B - A) = A \cup B$,

$A \cap (A^C \cap B) = A \cap (B - A) = \varnothing$

이므로

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A^C \cap B)$

$= \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

여사건의 확률에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

답 ③

25

[풀이]

1학년 학생, 2학년 학생, 3학년 학생을 각각 1명, 2명, 2명 선택할 확률을 구하면 된다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{_{3}\mathrm{C}_{2} \times {}_{4}\mathrm{C}_{2}}{_{8}\mathrm{C}_{3}} = \frac{9}{28}$

답 ⑤

26

[풀이]

문제에서 주어진 조건에서

$c = 1.96 \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{128}} = 0.49$

답 ②

27

[풀이]

$1-1 = 2-2 = 3-3 = 0$

이므로

$\mathrm{P}(X=0)$

$= \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}_{1-1=0} + \underbrace{\frac{2}{4} \times \frac{2}{4}}_{2-2=0} + \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}_{3-3=0} = \frac{3}{8}$

$3-1=2$이므로

$\mathrm{P}(X=2)$

$= \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}_{3-1=2} + \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}_{|1-3|=2} = \frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(X=1) = 1 - \mathrm{P}(X=0) - \mathrm{P}(X=2)$

$= 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

확률변수 X의 확률밀도함수를 표로 정리하면

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$

$= 0 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8}$

$- \left(0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8}\right)^2$

$= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

답 ④

[참고]

세 사건 $X=0$, $X=1$, $X=2$의 확률을 다음과 같이 구해도 좋다.

두 상자를 각각 A, B라고 하자.

그리고 상자 A의 각 면에 적혀 있는 숫자를

1_{A}, 2_{A}, 2_{AA}, 3_{A},
상자 B의 각 면에 적혀 있는 숫자를
1_{B}, 2_{B}, 2_{BB}, 3_{B}
라고 하자.

- $X=0$인 경우

$1_{\mathrm{A}}-1_{\mathrm{B}}$
$=2_{\mathrm{A}}-2_{\mathrm{B}}=2_{\mathrm{AA}}-2_{\mathrm{B}}=2_{\mathrm{A}}-2_{\mathrm{BB}}=2_{\mathrm{AA}}-2_{\mathrm{BB}}$
$=3_{\mathrm{A}}-3_{\mathrm{B}}$
$=0$,

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1+4+1}{16}=\frac{3}{8}$$

- $X=2$인 경우

$|1_{\mathrm{A}}-3_{\mathrm{B}}|=|3_{\mathrm{A}}-1_{\mathrm{B}}|=2$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

- $X=1$인 경우

$\mathrm{P}(X=1)=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=2)$

$$=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

28

[풀이]
빨간색 카드를 R, 파란색 카드를 B,
노란색 카드를 Y, 보라색 카드를 P
라고 하자.
문제에서 주어진 8장의 카드를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_3\times{}_3\mathrm{H}_3$
$={}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2$
$=3\times3\times10\times10$
$=900$ (즉, 전체 경우의 수)
우선 조건 (가)를 만족시키지 않는 경우의 수를 구하자. (아래의 표)

A	B	C	
×	1개 이상		⋯(경우1)
1개 이상	×		⋯(경우2)
×	×		⋯(경우3)

(단, ×는 0개의 공을 받는 경우이다.)
(경우1)
문제에서 주어진 8장의 카드를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수에서 8장의 카드를 학생 C에게만 주는 경우의 수를 빼면 된다. 즉,
${}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3-1$
$={}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1-1$
$=2\times2\times4\times4-1$
$=63$
(경우2)
(경우1)과 마찬가지로 경우의 수는 63이다.
(경우3)
경우의 수는 1이다.
따라서 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는
$900-(63+63+1)=773$
이제 조건 (가)를 만족시키지만, 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수를 구하자.
학생 A가 받는 카드의 색의 가짓수가 4라고 하자.

A	B	C
R, B, Y, P		

노란색 카드 2장, 보라색 카드 2장을 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수에서 노란색 카드 2장, 보라색 카드 2장을 두 학생 A, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 빼면 된다. 즉,
${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2-{}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2$
$={}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2-{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1$
$=6\times6-3\times3$
$=27$
따라서 구하는 경우의 수는
$773-27=746$

답 ②

29

[풀이]

• 교집합의 원소의 개수가 1인 경우

교집합의 원소가 2:

$\{2\}(\in A)$, $\{2\}(\in B)$ (이하 모두 $\in A$, $\in B$의 순서)

$\{2,\ 3\}$, $\{2\}$

$\{2,\ 4\}$, $\{2\}$

$\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{2\}$

$\{2\}$, $\{2,\ 3\}$

$\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$

총 6경우이다.

교집합의 원소가 3:

위와 마찬가지의 방법으로 세면 총 6경우이다.

(다 써보면

$\{3\}(\in A)$, $\{3\}(\in B)$ (이하 모두 $\in A$, $\in B$의 순서)

$\{3,\ 2\}$, $\{3\}$

$\{3,\ 4\}$, $\{3\}$

$\{3,\ 2,\ 4\}$, $\{3\}$

$\{3\}$, $\{3,\ 2\}$

$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 2\}$)

• 교집합의 원소의 개수가 2인 경우

교집합의 원소가 $2,\ 3$:

$\{2,\ 3\}(\in A)$, $\{2,\ 3\}(\in B)$ (이하 모두 $\in A$, $\in B$의 순서)

$\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$

총 2경우이다.

• 교집합의 원소의 개수가 0인 경우

총 $8\times4-(6+6+2)=18$경우이다.

기록한 수가 1인 횟수를 X라고 하면

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15360,\ \dfrac{3}{8}\right)$을 따른다.

(이때, $p=\dfrac{6+6}{32}=\dfrac{3}{8}$로 계산한 것이다.)

$m=np=5760$, $\sigma^2=npq=3600(\sigma=60)$

이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(5760,\ 60^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-5760}{60}$으로 두면 확률분포 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$k=\mathrm{P}(X\geq5880)$

$=\mathrm{P}\left(X\geq\dfrac{5880-5760}{60}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=0.5-0.477$

$=0.023$

$\therefore\ 1000\times k=23$

답 23

30

[풀이]

• 카드를 내려놓은 학생이 2명이면 더 큰 수가 적힌 카드를 내려놓은 학생만 귤을 받는다.

학생 A가 8이 적힌 카드를 선택하고, 학생 B가 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$이 적힌 카드 중에서 하나를 선택한다.

확률은 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n-1}{6}$ (학생 A가 귤을 받는다.)

이때, $\dfrac{1}{2}$인 학생 A가 8이 적힌 카드를 선택할 확률이고, $\dfrac{n-1}{6}$은 학생 B가 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$이 적힌 카드 중에서 하나를 선택할 확률이다.

• 카드를 내려놓은 학생이 1명이면 카드를 내려놓지 않은 학생만 귤을 받는다.

학생 A가 8이 적힌 카드를 선택하고, 학생 B가 $n+1,\ \cdots,\ 7$이 적힌 카드를 선택한다.

확률은 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7-n}{6}$ (학생 B가 귤을 받는다.)

학생 A가 1이 적힌 카드를 선택하고, 학생 B가 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$이 적힌 카드 중에서 하나를 선택한다.

확률은 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n-1}{6}$ (학생 A가 귤을 받는다.)

문제에서 주어진 조건

$p=q$, 즉

$\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{7-n}{6}$,

$2n-2=7-n$, $n=3$, $p=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 24(n+p)=80$

답 80

〈 미적분 〉

23

[풀이]

$f(x)=e^x$로 두면 $f'(x)=e^x$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=e$

답 ①

24

[풀이]

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=0$, $x=\frac{3\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t e^{\sin t}dt$

($\sin t=x$로 두면 $\cos t dt=dx$이고,

$t=0$일 때 $x=0$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=1$)

$=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

답 ④

25

[풀이]

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3n^{1-b}}$

(이때, $1-b=2$, 즉 $b=-1$이어야 극한값이 존재한다.)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3n^2}$$

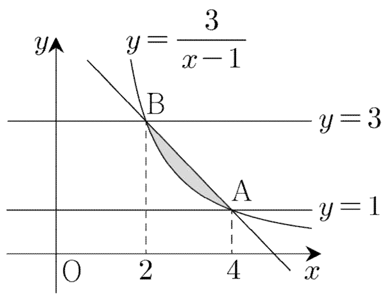
$=\dfrac{2a}{3}=6$, $a=9$

$\therefore\ a+b=9-1=8$

답 ②

26

[풀이]



구하는 넓이를 S라고 하면

$S=$(네 점 A, B, (2, 0), (4, 0)을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이)$-\displaystyle\int_2^4\frac{3}{x-1}dx$

$=\dfrac{1+3}{2}\times 2-[3\ln(x-1)]_2^4$

$=4-(3\ln 3-0)$

$=4-3\ln 3$

답 ①

27

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

$g(f(x^3+x))=x$ $\cdots(*)$

위의 등식에 $x=1$을 대입하면

$g(f(2))=1$, 즉 $g(1)=1(\because f(2)=1)$

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x^3+x))f'(x^3+x)(3x^2+1)=1$

위의 등식에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(2))f'(2)\times 4=1$, 즉 $g'(1)f'(2)=\dfrac{1}{4}$

문제에서 주어진 등식 $f'(2)=8g'(1)-1$과 연립하면

$g'(1)(8g'(1)-1)=\dfrac{1}{4}$,

$32(g'(1))^2-4g'(1)-1=0$,

$(4g'(1)-1)(8g'(1)+1)=1$, $\therefore\ g'(1)=\dfrac{1}{4}$

($\because$ 만약 $g'(1)=-\dfrac{1}{8}$이면 $f'(2)=-2<0$

이므로 조건 '$f'(x)>0$'을 만족시키지 않는다.)

$\therefore\ g(1)+g'(1)=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

답 ①

28

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=g'(x)-g'(x)\sec^2 g(x)$

$=-g'(x)\tan^2 g(x)$ $\cdots(*)$

$(\because 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta)$

(가): $f(0)=g(0)-\tan g(0)=0$,

$g(0)=\tan g(0)$

이므로 $g(0)$은 곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이다.

(가)+(나):

$\sin g(\pi)=0 \Leftrightarrow g(\pi)=\cdots,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ \cdots$

$f(\pi)=g(\pi)-\tan g(\pi)=g(\pi)$, 즉 $f(\pi)=g(\pi)$

이므로

$f(\pi)=\cdots,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ \cdots$

한편

$f'(\pi)=-g'(\pi)\tan^2 g(\pi)=0$

$(\because \tan g(\pi)=0)$

이고, 조건 (가)에서 $f''(\pi)=0$이므로

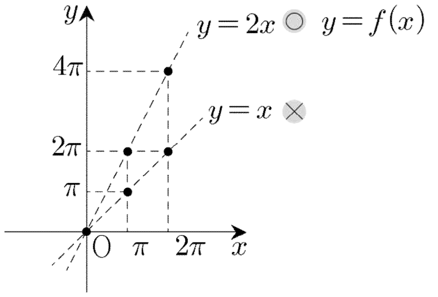
(즉, 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 π이다.)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$f(x)=a(x-\pi)^3+a\pi^3$ (단, $a\neq 0$)

$(\because f(0)=0$(가))

아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$는 점 $(\pi,\ f(\pi))$에 대하여 대칭이다.



$f'(x)=3a(x-\pi)^2$을 (*)에 대입하면

$3a(x-\pi)^2=-g'(x)\tan^2 g(x)$

이므로

$a>0$이면 $g'(x)\le 0$,

즉 함수 $g(x)$는 감소함수이고, …(경우1)

$a<0$이면 $g'(x)\ge 0$,

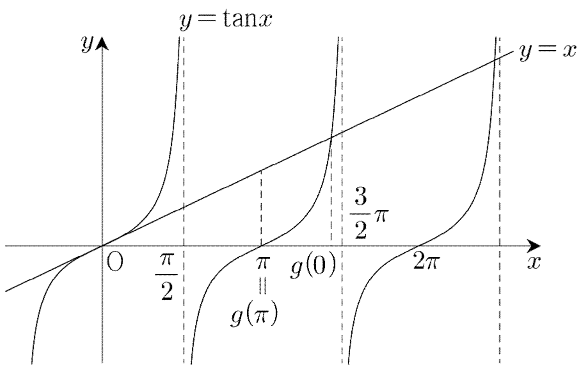
즉 함수 $g(x)$는 증가함수이다. …(경우2)

(경우1)

아래 그림처럼 함수 $g(x)$의 공역은

$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$

이고, $\frac{\pi}{2}<g(0)<\frac{3\pi}{2}$, $g(\pi)=\pi$이다.



$g(\pi)<g(0)$이므로

함수 $g(x)$는 감소함수이다.

이때, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}\ne\frac{3\pi}{2}$

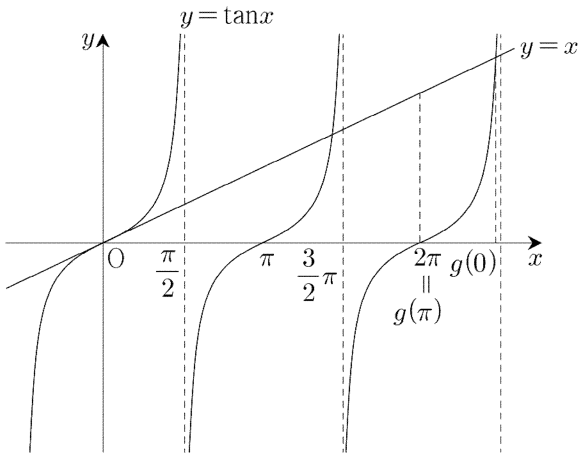
이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(경우2)

아래 그림처럼 함수 $g(x)$의 공역은

$\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right)$

이고, $\frac{3\pi}{2}<g(0)<\frac{5\pi}{2}$, $g(\pi)=2\pi$이다.



$g(\pi)<g(0)$이므로

함수 $g(x)$는 감소함수이다.

이때, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

그런데 $f(\pi)=g(\pi)=2\pi$이므로

$f(\pi)=a\pi^3=2\pi$, $a=\frac{2}{\pi^2}$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\frac{6}{\pi^2}(x-\pi)^2$

이고,

$f'(0)=-g'(0)\tan^2 g(0)$

$=-g'(0)(g(0))^2$ $(\because \tan g(0)=g(0))$

이므로 구하는 값은 $-f'(0)$과 같다.

$\therefore\ g'(0)\times(g(0))^2=-f'(0)=-6$

답 ②

29

[풀이1]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 수렴하므로

$-1<r<1$

(이때, 조건 (나)에 의하여 $a_1 \neq 0$이다.
왜냐하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0일 수 없기 때문이다.)
(나): 수열 $\{a_n\}$의 정수인 3개의 항을 a, b, c라고 하자.
(단, $|a|>|b|>|c|$)
$216=6^3=2^3 3^3$에서 $|a||b||c|=2^3 3^3$
그런데

$$2^3=\underbrace{2^3\times 2^0\times 2^0}_{㉠}=\underbrace{2^1\times 2^1\times 2^1}_{㉡}$$

$$=\underbrace{2^2\times 2^1\times 2^0}_{㉢}\text{이고,}$$

$$3^3=\underbrace{3^3\times 3^0\times 3^0}_{㉣}=\underbrace{3^1\times 3^1\times 3^1}_{㉤}$$

$$=\underbrace{3^2\times 3^1\times 3^0}_{㉥}$$

이므로 ㉠~㉥에 해당하는 경우들을 따져보자.

- ㉠ (×)

예를 들어
$|a|=2^3\times 3^2$, $|b|=2^0\times 3^1$, $|c|=2^0\times 3^0$
라고 하자.

$$\frac{|b|}{|a|}=\frac{1}{2^3\times 3^1}=|r|^p,\ \frac{|c|}{|b|}=\frac{1}{3^1}=|r|^q$$

(단, p, q는 자연수이다.)

$$|r|^{pq}=\left(\frac{1}{2^3\times 3^1}\right)^q=\left(\frac{1}{3^1}\right)^p,\ \text{즉}$$

$3^p=2^{3q}\times 3^q$
그런데 위의 등식을 만족시키는 자연수 q는 존재하지 않는다.
따라서 ㉠의 경우는 제외한다.
(마찬가지의 이유로 ㉣의 경우도 제외한다.)

- ㉡ (×)

$|a|=2^1\times 3^2$, $|b|=2^1\times 3^1$, $|c|=2^1\times 3^0$
이면 $|a|(=18)$, $|b|(=6)$, $|c|(=2)$는
이 순서대로 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$r=\frac{1}{3}$: $18(=a_1)$, $6(=a_2)$, $2(=a_3)$, $\cdots$

$a_1+a_2=24>10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$r=-\frac{1}{3}$: $18(=a_1)$, $-6(=a_2)$, $2(=a_3)$, $\cdots$

$a_1a_2a_3<0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$|a|=2^1\times 3^1$, $|b|=2^1\times 3^1$, $|c|=2^1\times 3^1$
이면 $|a|=|b|=|c|=6$이므로 $|r|=1$
그런데 $|r|<1$이므로 가정에 모순이다.
따라서 ㉡의 경우는 제외한다.
(마찬가지의 이유로 ㉤의 경우도 제외한다.
왜냐하면
$|a|(=12)$, $|b|(=6)$, $|c|(=3)$
일 때, $r=\frac{1}{2}$이면 $a_1+a_2=18>10$,
$r=-\frac{1}{2}$이면 $a_1a_2a_3<0$이다.)

- ㉢ & ㉥ (○)

세 수 $|a|$, $|b|$, $|c|$는 이 순서대로 공비가 $|r|$인 등비수열이다.
$|a|=2^2\times 3^2$, $|b|=2^1\times 3^1$, $|c|=2^0\times 3^0$
이면 $|a|(=36)$, $|b|(=6)$, $|c|(=1)$는
이 순서대로 공비가 $\frac{1}{6}$인 등비수열을 이룬다.

$r=\frac{1}{6}$: $36(=a_1)$, $6(=a_2)$, $1(=a_3)$, $\cdots$

$a_1+a_2=42>10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$r=-\frac{1}{6}$: $36(=a_1)$, $-6(=a_2)$, $1(=a_3)$, $\cdots$

$a_1a_2a_3<0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$|a|=2^0\times 3^2$, $|b|=2^1\times 3^1$, $|c|=2^2\times 3^0$
이면 $|a|(=9)$, $|b|(=6)$, $|c|(=4)$는
이 순서대로 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$r=\frac{2}{3}$: $9(=a_1)$, $6(=a_2)$, $4(=a_3)$, $\cdots$

$a_1+a_2=15>10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$r=-\frac{2}{3}$: $\frac{27}{2}(=a_1)$, $-9(=a_2)$, $6(=a_3)$,
$-4(=a_4)$, $\cdots$

$a_1+a_2=\frac{9}{2}<10$이고, $a_2a_3a_4>0$이므로

문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.

이상에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{27}{2}$이고, 공비가 $-\frac{2}{3}$

인 등비수열이다.

$$\frac{q}{p}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{81}{10}$$

$\therefore\ p+q=10+81=91$

답 91

[풀이2]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$가 수렴하므로

$-1<r<1$

(이때, 조건 (나)에 의하여 $a_1\neq 0$이다.

왜냐하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0일 수 없기 때문이다.)

조건 (나)에서 주어진 세 정수 각각의 절댓값을

$2^{p_1}3^{q_1}$, $2^{p_2}3^{q_2}$, $2^{p_3}3^{q_3}$ $\cdots(*)$

(단, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3은 음이 아닌 정수)

라고 하면, 이 세 자연수 중에서 어느 두 수도 서로 같지 않다.

$(\because -1<r<1)$

$2^{p_1+p_2+p_3}3^{q_1+q_2+q_3}=2^33^3(=216)$

즉, $p_1+p_2+p_3=3$, $q_1+q_2+q_3=3$

• p_1, p_2, p_3이 모두 같은 경우 (×)

$p_1=p_2=p_3=1$이라고 가정하자.

(*)의 세 수는

$2^13^{q_1}$, $2^13^{q_2}$, $2^13^{q_3}$

이때, $q_1>q_2>q_3\geq 0$이라고 하면

$q_1+q_2+q_3=3$

이므로

$q_1=2$, $q_2=1$, $q_3=0$

의 경우만 가능하다.

(*)의 세 수

2^13^2, 2^13^1, 2^13^0 (이때, $|r|=\frac{1}{3}$)

에 대하여

$|a_2|=2^13^2$으로 두면 $a_1=2^13^3$이므로

수열 $\{a_n\}$에서 정수인 항의 개수는 4이다.

마찬가지 이유로 $n\geq 3$일 때, $|a_n|\neq 2^13^2$이다.

따라서 $a_1=2^13^2$이다.

$a_1=2^13^2$, $r=\frac{1}{3}$이면 $a_1+a_2=18+6=24>10$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다. (×)

$a_1=2^13^2$, $r=-\frac{1}{3}$이면 $a_1+a_2=18-6=12>10$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다. (×)

따라서 $(p_1,\ p_2,\ p_3)\neq(1,\ 1,\ 1)$

• p_1, p_2, p_3 중에서 어느 두 수가 같고, 나머지 한 수는 다른 경우 (×)

$p_1=3$, $p_2=p_3=0$이라고 가정하자.

(*)의 세 수는

$2^33^{q_1}$, $2^03^{q_2}$, $2^03^{q_3}$

$q_1=q_2=q_3=1$: 2^33^1, $2^03^1(=3)$, $2^03^1(=3)$

$q_1=3$, $q_2=q_3=0$: 2^33^3, $2^03^0(=1)$, $2^03^0(=1)$

위의 경우 모두 $-1<r<1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$q_2=3$, $q_1=q_3=0$: $2^33^0(=8)$, $2^03^3(=27)$, $2^03^0(=1)$

$q_3=3$, $q_1=q_2=0$: $2^33^0(=8)$, $2^03^0(=1)$, $2^03^3(=27)$

$q_1=0$, $q_2=1$, $q_3=2$: $2^33^0(=8)$, $2^03^1(=3)$, $2^03^2(=9)$

$q_1=0$, $q_2=2$, $q_3=1$: $2^33^0(=8)$, $2^03^2(=9)$, $2^03^1(=3)$

$q_1=1$, $q_2=0$, $q_3=2$: $2^33^1(=24)$, $2^03^0(=1)$, $2^03^2(=9)$

$q_1=1$, $q_2=2$, $q_3=0$: $2^33^1(=24)$, $2^03^2(=9)$, $2^03^0(=1)$

$q_1=2$, $q_2=0$, $q_3=1$: $2^33^2(=72)$, $2^03^0(=1)$,

$2^0 3^1 (=3)$

$q_1 = 2,\ \ q_2 = 1,\ \ q_3 = 0$: $2^3 3^2 (=72),\ \ 2^0 3^1 (=3),$
$2^0 3^0 (=1)$

위의 경우 모두 유리수 r은 존재하지 않는다.

($\because$ 마지막 경우만 보자.

$$|r^k| = \frac{3}{72} = \frac{1}{\boxed{2^3} \times 3},\ \ |r^l| = \frac{1}{3}$$

을 동시에 만족시키는 자연수 k, l은 존재하지 않는다.)

따라서 세 수 p_1, p_2, p_3 중에서 어느 두 수도 서로 같지 않다. (귀류법)

마찬가지의 방법으로 세 수 q_1, q_2, q_3 중에서 어느 두 수도 서로 같지 않다.

즉, $\{p_1,\ p_2,\ p_3\} = \{q_1,\ q_2,\ q_3\} = \{0,\ 1,\ 2\}$

여기서 $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$라고 해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

(*)의 세 수를 다시 쓰면

$2^2 3^{q_1}$, $2^1 3^{q_2}$, $2^0 3^{q_3}$

위의 세 수는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

($\because$ 수열 $\{a_n\}$의 이웃한 세 항일 수밖에 없음)

등비중항의 정의에 의하여

$(2^1 3^{q_2})^2 = 2^2 3^{q_1} \times 2^1 3^{q_3}$, 즉

$3^{2q_2} = 3^{q_1 + q_3}$, $2q_2 = q_1 + q_3$

$(q_1,\ q_2,\ q_3) = (2,\ 1,\ 0)$ 또는 $(0,\ 1,\ 2)$

(*)의 세 수를 다시 쓰면

$2^2 3^2$, $2^1 3^1$, $2^0 3^0$ $\cdots$(경우1)

또는 $2^2 3^0$, $2^1 3^1$, $2^0 3^2$ $\cdots$(경우2)

(경우1)

$a_1 = 36$, $|r| = \dfrac{1}{6}$이다.

($\because$ 만약 $n \geq 2$일 때, $|a_n| = 36$이면 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 4 이상이기 때문이다.)

$36(=a_1)$, $6(=a_2)$, $1(=a_3)$

: $r = \dfrac{1}{6}$, $a_1 + a_2 = 42 > 10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$36(=a_1)$, $-6(=a_2)$, $1(=a_3)$

: $r = -\dfrac{1}{6}$이다. 그런데 $a_1 a_2 a_3 < 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(경우2)

$|r| = \dfrac{2}{3}$이다.

$\dfrac{27}{2}(=a_1)$, $9(=a_2)$, $6(=a_3)$, $4(=a_4)$

: $r = \dfrac{2}{3}$, $a_1 + a_2 = \dfrac{45}{2} > 10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$9(=a_l)$, $-6(=a_{l+1})$, $4(=a_{l+2})$

: $r = -\dfrac{2}{3}$이다. 그런데 $a_l a_{l+1} a_{l+2} < 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\dfrac{27}{2}(=a_1)$, $-9(=a_2)$, $6(=a_3)$, $-4(=a_4)$

: $r = -\dfrac{2}{3}$, $a_1 + a_2 = \dfrac{9}{2} < 10$, $a_2 a_3 a_4 > 0$이므로 모든 조건을 만족시킨다. (○)

$-9(=a_l)$, $-6(=a_{l+1})$, $-4(=a_{l+2})$

: $r = \dfrac{2}{3}$이다. $a_l a_{l+1} a_{l+2} < 0$(단, $l \geq 2$)이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이상에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{27}{2}$이고, 공비가 $-\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다.

$$\frac{q}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{27}{2}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{81}{10}$$

$\therefore\ p + q = 10 + 81 = 91$

답 91

[풀이3]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면

등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 수렴하므로

$-1 < r < 1$

(이때, 조건 (나)에 의하여 $a_1 \neq 0$이다.

왜냐하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0일 수 없기 때문이다.)

(나): 수열 $\{a_n\}$의 정수인 3개의 항을 a, b, c라고 하자.

(단, $|a|>|b|>|c|$)

$216=6^3=2^3 3^3$에서 $|a||b||c|=2^3 3^3$

이제 세 수 a, b, c의 값을 결정하자.

(1) $|a|=2^3 3^k$인 경우 (단, $k=0$, 1, 2, 3)

$\|a\|$	$\|b\|$	$\|c\|$	
$2^3 3^3$	×	×	×
$2^3 3^2$	3	1	×
$2^3 3^1$	9	1	×
$2^3 3^0$	27	1	×
	9	3	×

맨 위에서부터 차례대로 불가능한 이유를 쓰면 다음과 같다.

- $|a|>|b|>|c|$을 만족시키는 b, c는 없다.
- $\dfrac{|b|}{|a|}=\dfrac{3}{2^3 3^2}=r^{k_1}$, $\dfrac{|c|}{|b|}=\dfrac{1}{3}=r^{k_2}$로 두면

(단, k_1, k_2는 자연수)

$r=\left(\dfrac{1}{2^3 3}\right)^{\frac{1}{k_1}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{k_2}}$, 즉 $\left(\dfrac{1}{2^3 3}\right)^{k_2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k_1}$,

$3^{k_1}=2^{3k_2}3^{k_2}$, $3^{k_1-k_2}=2^{3k_2}$

이 등식을 만족시키는 두 자연수 k_1, k_2는 없다.

즉, 유리수 공비 r은 존재하지 않는다. 이는 가정에 모순이다.

- 유리수 공비 r은 존재하지 않는다.
- 유리수 공비 r은 존재하지 않는다.
- 유리수 공비 r은 존재하지 않는다.

(2) $|a|=2^2 3^k$인 경우 (단, $k=0$, 1, 2, 3)

$\|a\|$	$\|b\|$	$\|c\|$	
$2^2 3^3$	2	1	r×
$2^2 3^2$	6	1	㉠
	3	2	r×
$2^2 3^1$	9	2	r×
	6	3	㉡
$2^2 3^0$	×	×	×

㉠: $|a|=36$, $|b|=6$, $|c|=1$

$a=36$, $b=6$, $c=1$

: $r=\dfrac{1}{6}$, $a_1=36$, $a_1+a_2=42>10$ (×)

$a=36$, $b=-6$, $c=-1$: r이 없음. (×)

$a=-36$, $b=6$, $c=-1$

: $r=-\dfrac{1}{6}$, $a_1=-36<0$ (×)

$a=-36$, $b=-6$, $c=1$: r이 없음. (×)

㉡: $|a|=12$, $|b|=6$, $|c|=3$

$a=12$, $b=6$, $c=3$

: $r=\dfrac{1}{2}$, $a_1=12$, $a_1+a_2=18>10$ (×)

$a=12$, $b=-6$, $c=3$: $abc<0$ (×)

$a=-12$, $b=6$, $c=-3$

: $r=-\dfrac{1}{2}$, $a_1=24$이면 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 4이다. (×)

$a=-12$, $b=-6$, $c=-3$: $abc<0$ (×)

(3) $|a|=2^1 3^k$인 경우 (단, $k=0$, 1, 2, 3)

$\|a\|$	$\|b\|$	$\|c\|$	
$2^1 3^3$	4	1	r×
$2^1 3^2$	12	1	r×
	6	2	㉢
	4	3	r×
$2^1 3^1$	×	×	×
$2^1 3^0$	×	×	×

㉢: $|a|=18$, $|b|=6$, $|c|=2$

$a=18$, $b=6$, $c=2$

: $r=\dfrac{1}{3}$, $a_1=18$, $a_1+a_2=24>10$ (×)

$a=18$, $b=-6$, $c=-2$: r이 없음. (×)

$a=-18$, $b=6$, $c=-2$:

$r=-\dfrac{1}{3}$, $a_1=54$이면 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 4이다. (×)

$a=-18$, $b=-6$, $c=2$: r이 없음. (×)

(4) $|a|=2^0 3^k$인 경우 (단, $k=0$, 1, 2, 3)

$\lvert a \rvert$	$\lvert b \rvert$	$\lvert c \rvert$	
$2^0 3^3$	8	1	r×
	4	2	r×
$2^0 3^2$	8	3	r×
	6	4	㉣
$2^0 3^1$	×	×	×
$2^0 3^0$	×	×	×

㉣: $|a|=9$, $|b|=6$, $|c|=4$

$a=9$, $b=6$, $c=4$

: $r=\dfrac{2}{3}$, $9+6=15>10$이므로

$a_1+a_2<10$인 a_1은 존재하지 않는다. (×)

$a=9$, $b=-6$, $c=-4$: r이 없다. (×)

$a=-9$, $b=6$, $c=-4$

: $r=-\dfrac{2}{3}$, $a_1=(-9)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{2}$이면

$a_1+a_2=\dfrac{27}{2}-9=\dfrac{9}{2}<10$ (○)

$a=-9$, $b=-6$, $c=4$: r이 없다. (×)

이상에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{27}{2}$이고, 공비가 $-\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다.

$$\frac{q}{p}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{81}{10}$$

$\therefore$ $p+q=10+81=91$

답 91

30

[풀이]

$f(x)=\ln\left(\dfrac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{g(x)}{1+xf'(x)}$

$\Leftrightarrow g(x)=(1+xf'(x))e^{f(x)}$

$$\int g(x)dx=\int(1+xf'(x))e^{f(x)}dx$$

$=xe^{f(x)}+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$$\int_1^2 g(x)dx=\left[xe^{f(x)}\right]_1^2$$

$=2e^{f(2)}-e^{f(1)}=2e^{f(2)}-16=34$ ($\because f(1)=4\ln 2$)

에서 $f(2)=\ln 25$

$$\int_1^2 xg(x)dx=\int_1^2(x+x^2f'(x))e^{f(x)}dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}dx+\int_1^2 x^2f'(x)e^{f(x)}dx$$

(여기서 정적분의 부분적분법을 적용하자.)

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}dx+\left[x^2e^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 2xe^{f(x)}dx$$

$$=-\int_1^2 xe^{f(x)}dx+4e^{f(2)}-e^{f(1)}$$

$$=-\int_1^2 xe^{f(x)}dx+4\times25-16=53$$

$$\therefore \int_1^2 xe^{f(x)}dx=31$$

답 31

2026 이동훈 기출 https://atom.ac/books/12829
오르비 https://orbi.kr/

〈 기하 〉

23

[풀이]

주어진 포물선의 방정식은

$y^2 = 4 \times 2 \times x$

이므로 초점은 $(2,\ 0)$이다.

$\therefore\ p = 2$

답 ②

24

[풀이]

두 직선의 방향벡터는 각각 $(2,\ 1)$, $(8,\ a)$이므로

$(8,\ a) = 4(2,\ 1)$에서 $\therefore\ a = 4$

답 ④

25

[풀이]

$\mathrm{B}(4,\ 3,\ 9)$, $\mathrm{C}(-4,\ -3,\ 9)$

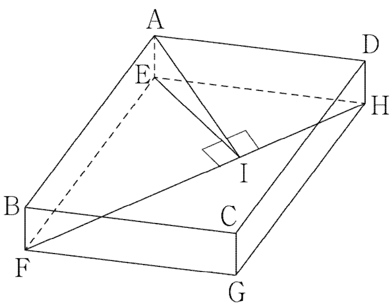
$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

답 ①

26

[풀이]

점 E에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



$\overline{\mathrm{AE}} \perp$(평면EFGH), $\overline{\mathrm{EI}} \perp \overline{\mathrm{FH}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AI}} \perp \overline{\mathrm{FH}}$

($\triangle$EFH의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times 10 \times 5 = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{125} \times \overline{\mathrm{EI}}$, $\overline{\mathrm{EI}} = 2\sqrt{5}$

직각삼각형 AEI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AI}} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{21}$

답 ①

27

[풀이]

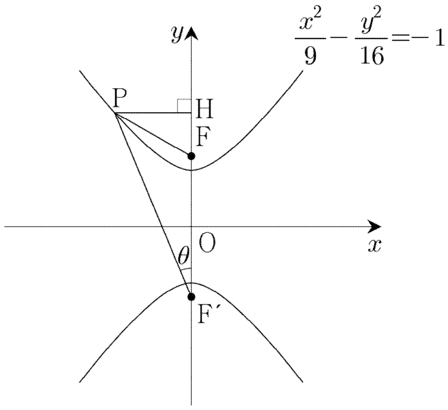
$c^2 = 9 + 16 = 25$, $c = 5$

주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F}'(0,\ -5)$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H,

$\angle \mathrm{PF'F} = \theta$라고 하자.



($\triangle$PF′F의 둘레의 길이)

$= \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} + 10 = 30$, $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 20$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 8$

위의 두 등식을 연립하면

$\overline{\mathrm{PF'}} = 14$, $\overline{\mathrm{PF}} = 6$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{14^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 14 \times 10} = \dfrac{13}{14}$, $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

직각삼각형 PF′H에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=14\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=3\sqrt{3}$

이므로 점 P의 x좌표는 $-3\sqrt{3}$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(-3\sqrt{3},\ 8)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{-3\sqrt{3}x}{9}-\dfrac{8y}{16}=-1$

이 직선의 기울기는 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ②

[참고]

점 P의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.

점 P의 좌표를 $(s,\ t)$라고 하자.

$\overline{\mathrm{PF}}^2=s^2+(t-5)^2=36$,

$\overline{\mathrm{PF'}}^2=s^2+(t+5)^2=196$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$20t=160$, $t=8$

이를 맨 위의 등식에 대입하면

$s=-3\sqrt{3}$ $(\because s<0)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(-3\sqrt{3},\ 8)$

28

[풀이]

직선 AB가 xy평면과 만나는 점을 D,

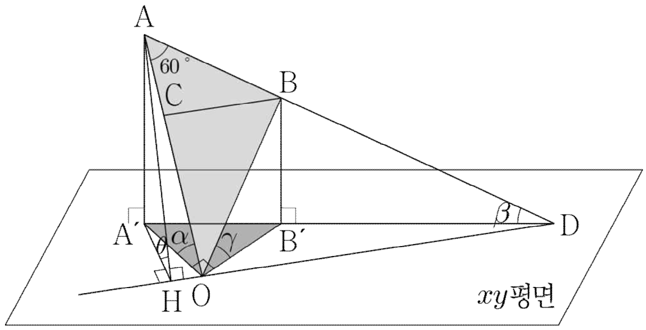
두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′,

점 A′에서 직선 DO에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

(이때, 이면각의 정의에 의하여 $\angle \mathrm{AHA'}=\theta$)

그리고 $\angle \mathrm{BOB'}=\gamma$라고 하자.

이때, γ는 직선 BO와 xy평면이 이루는 각의 크기이다.



(가): $\overline{\mathrm{CB}}//(xy$평면)이고,

직선 OD는 평면 AOD과 xy평면의 교선이므로

$\overline{\mathrm{CB}}//\overline{\mathrm{OD}}$

(나): 직선과 평면이 이루는 각의 크기의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{AOA'}=\alpha$, $\angle \mathrm{ADA'}=\beta$

$\sin\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$, $\sin\beta=\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{DA}}}$이므로

등식 $\sin\alpha=3\sin\beta$에 대입하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=3\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{DA}}}$, $\overline{\mathrm{AD}}=3\overline{\mathrm{AO}}=3\times6=18$

서로 닮음인 두 삼각형 ACB, AOD의 닮음비는

$1:3(=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AO}})$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=6(=\dfrac{18}{3})$

그런데 원의 정의에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}(=6)$이므로

삼각형 AOB는 정삼각형이다. 즉, $\angle \mathrm{BAO}=60^\circ$

위의 그림에서 $\alpha>\gamma>\beta$이므로

($\because$ 두 직각삼각형 BOB′, BDB′의 빗변의 길이는 전자가 더 짧으므로 $\gamma>\beta$,

두 직각삼각형 AOA′, BOB′에서 빗변의 길이가 같고, $\overline{\mathrm{AA'}}>\overline{\mathrm{BB'}}$이므로 $\alpha>\gamma$이다.)

$\cos\alpha<\cos\gamma<\cos\beta$, 즉

$\dfrac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{AO}}}<\dfrac{\overline{\mathrm{OB'}}}{\overline{\mathrm{BO}}}<\dfrac{\overline{\mathrm{B'A'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$

이때, $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BO}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{OA'}}<\overline{\mathrm{OB'}}<\overline{\mathrm{B'A'}}$

따라서 직각삼각형 A′OB′에서 빗변은 A′B′이고,

$\angle \mathrm{A'OB'}=90^\circ$

$\overline{\mathrm{OA'}}=6\cos\alpha$,

$\overline{OB'}=6\cos\gamma=6\sqrt{1-4\sin^2\beta}$,

$(\because \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OB}}=\dfrac{12}{6}=2$,

$\sin^2\gamma=4\sin^2\beta,\ 1-\cos^2\gamma=4\sin^2\beta$,

$\cos\gamma=\sqrt{1-4\sin^2\beta})$

$\overline{B'A'}=6\cos\beta$

직각삼각형 $A'OB'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$36\cos^2\beta=36\cos^2\alpha+36(1-4\sin^2\beta)$,

$1-\sin^2\beta=1-\sin^2\alpha+1-4\sin^2\beta$,

$-\sin^2\beta=-9\sin^2\beta+1-4\sin^2\beta$

$(\because \sin\alpha=3\sin\beta)$

$\sin\beta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\cos\beta=\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}})$,

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos\alpha=\dfrac{1}{2})$

$\overline{OA'}=6\cos\alpha=6\times\dfrac{1}{2}=3$,

$\overline{OB'}=6\cos\gamma$

$=6\times\sqrt{1-4\times\dfrac{1}{12}}=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$,

$(\because \cos\gamma=\sqrt{1-4\sin^2\beta})$

두 삼각형 OAB, $OA'B'$의 넓이를 각각 S, S'라고 하면

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$,

$S'=\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

정사영의 넓이에 대한 정의에 의하여

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{S'}{S}=\dfrac{3\sqrt{6}}{9\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

답 ④

[참고]

이면각의 크기를 구하는 방법은 두 가지이다.

(1) 이면각의 정의

(2) 정사영의 넓이

이 문제는 (2)가 계산량이 적었다.

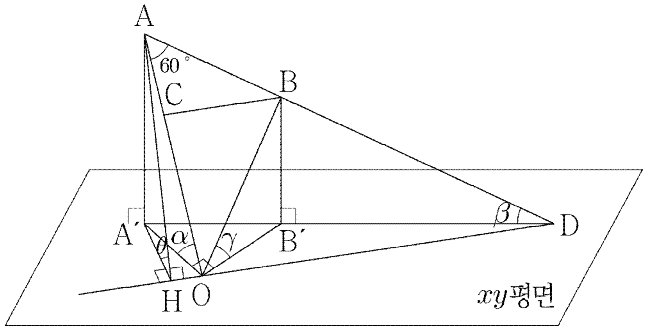
(1)의 방법으로 $\cos\theta$의 값을 구해보자.

우선

$\sin\beta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\cos\beta=\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}})$,

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos\alpha=\dfrac{1}{2})$

의 결과를 얻은 상태라고 하자.



삼각형 AOD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OD}^2=6^2+18^2-2\times6\times18\times\cos60°$,

$\overline{OD}=6\sqrt{7}$

직각삼각형 OAA'에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AA'}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

삼각형 $A'OD$에서 코사인법칙을 적용하자.

$\overline{A'D}=\overline{AD}\times\cos\beta=18\times\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{33}$,

$\overline{A'O}=\overline{AO}\times\cos\alpha=6\times\dfrac{1}{2}=3,\ \overline{OD}=6\sqrt{7}$

이므로

$\cos(\angle A'DO)=\dfrac{(6\sqrt{7})^2+(3\sqrt{33})^2-3^2}{2\times6\sqrt{7}\times3\sqrt{33}}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{77}},\ \sin(\angle A'DO)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{77}}$

직각삼각형 $A'HO$에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{A'H}=\overline{A'D}\times\sin(\angle A'DO)$

$=3\sqrt{33}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{77}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

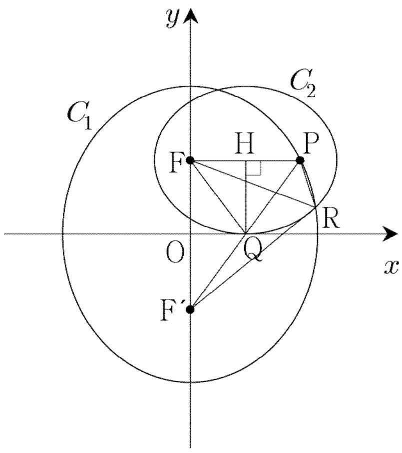
$\tan\theta=\dfrac{\overline{A'A}}{\overline{HA'}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

29

[풀이]

점 Q에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라고 하면
점 H는 선분 PF의 중점이다.



두 타원 C_1, C_2의 장축의 길이를 각각 k, l이라고 하자.
타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RF}}+\overline{\mathrm{RF'}}=k$

$\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{RF}}=l$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{PR}}=k-l=7\sqrt{2}$

그런데 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=l$이므로

($\because$ $\triangle\mathrm{PQH}\sim\triangle\mathrm{PF'F}$이고, 닮음비는 $1:2$이다.)

직각삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$l^2=12^2+(k-l)^2$ ($\because$ $\overline{\mathrm{PF}}=k-\overline{\mathrm{PF'}}=k-l$)

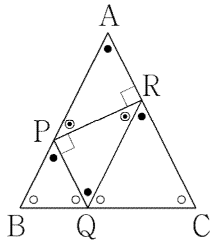
$=12^2+(7\sqrt{2})^2=242$, $l=11\sqrt{2}$, $k=18\sqrt{2}$

$\therefore$ $k\times l=396$

답 396

30

[풀이]



(가): $(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{PQ}}//\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

즉, 삼각형 PBQ는 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다.

$(\overrightarrow{\mathrm{RC}}+\overrightarrow{\mathrm{RQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$에서도 마찬가지의 이유로

삼각형 RQC는 $\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{RC}}$인 이등변삼각형이다.

따라서 이등변삼각형의 성질, 평행선의 성질, '삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.' 에 의하여 위의 그림처럼 각의 크기가 결정된다.

(나): $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2$

내적의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{RPQ}=90^\circ$

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{(8\sqrt{5})^2+(8\sqrt{5})^2-16^2}{2\times8\sqrt{5}\times8\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$$

직각삼각형 APR에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{PAR})=\frac{\overline{\mathrm{AR}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{8\sqrt{5}-\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{3}{5}$$

($\because$ $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}=8\sqrt{5}-\overline{\mathrm{PA}}$)

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PA}}=5\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{PR}}=4\sqrt{5}$

이제 점 X의 자취를 결정하자.

$\overrightarrow{\mathrm{O'X}}=\vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{O'P}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{O'R}}=\vec{r}$

문제에서 주어진 등식을 변형하면

$|3\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$

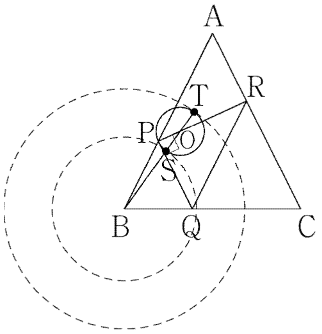
$|3(\vec{p}-\vec{x})+\vec{r}-\vec{x}|=4\sqrt{5}$

$$\left|\vec{x}-\frac{3\vec{p}+\vec{r}}{4}\right|=\sqrt{5}$$

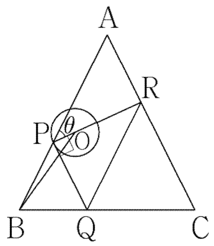
여기서 선분 PR을 $1:3$으로 내분하는 점을 O라고 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{O'X}}-\overrightarrow{\mathrm{O'O}}|=\sqrt{5}$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=\sqrt{5}$

따라서 점 X의 자취는 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다. 이 원을 C라고 하자.
이때, 점 P와 '선분 PR의 중점'은 원 C의 지름의 양 끝점이다.
직선 BO가 원 C와 만나는 두 점 중에서 점 B에 가까운 점을 S, 나머지 한 점을 T라고 하자. (아래 그림)



위의 그림에서
$(m=)\overline{\mathrm{BS}} \le |\overrightarrow{\mathrm{BX}}| \le \overline{\mathrm{BT}}(=M)$
이제 $\angle \mathrm{APR}=\theta$로 두고, 선분 BO의 길이를 구하자.



삼각형 PBO에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{BO}}^2=(3\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2\times3\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos(\pi-\theta)$
$=50+30\times\dfrac{4}{5}=74$, $\overline{\mathrm{BO}}=\sqrt{74}$
$M=\sqrt{74}+\sqrt{5}$, $m=\sqrt{74}-\sqrt{5}$
$\therefore\ M\times m=74-5=69$
답 69