1) 2025년 11월 제작 - 황보 백

두 실수 $a(a>1)$, t에 대하여 두 곡선 $y=\log_a x-t$와 $y=-a^{x-t}$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 부등식 $f(t) \le t$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합이 4일 때, a^2의 값을 구하시오.

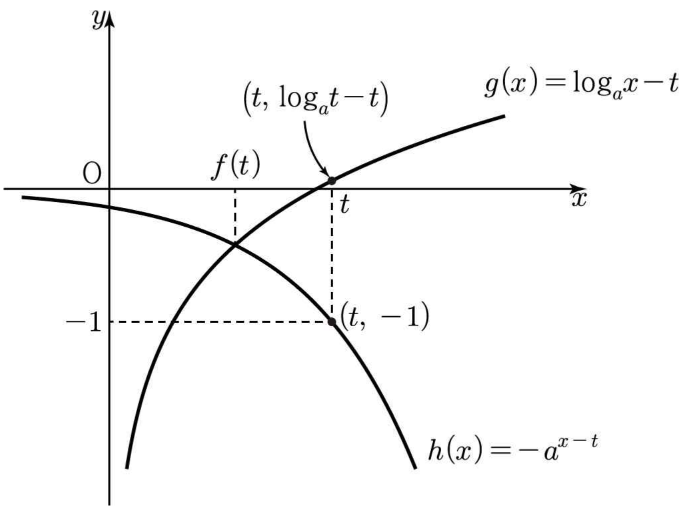
1) 정답 3

[그림 : 최성훈T]

$g(x)=\log_a x-t$, $h(x)=-a^{x-t}$라 하자.

$y=g(x)$의 그래프는 $a>1$이므로 실수 전체의 집합에서 증가하고 $y=h(x)$의 그래프는 $(t,\ -1)$을 지나고 감소하는 그래프이고

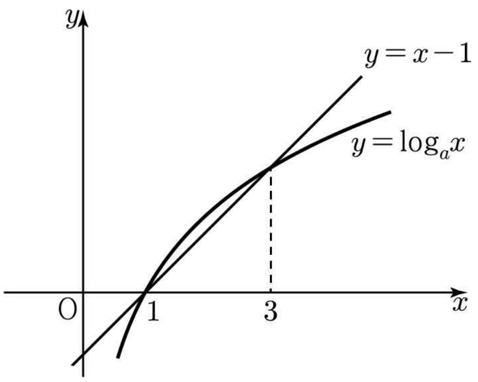
$f(t) \leq t$이기 위해서는 그림과 같다.



$g(t) \geq h(t) \rightarrow \log_a t-t \geq -1 \rightarrow \therefore \log_a t \geq t-1$

따라서 부등식 $f(t) \leq t$을 만족시키는 t의 범위는 부등식 $\log_a t \geq t-1$을 만족시키는 t의 범위와 같다.

그림과 같이 곡선 $y=\log_a x$ $(a>1)$와 직선 $y=x-1$의 관계는 다음 그림과 같다.



따라서 t의 최솟값은 1이고 t의 최댓값과 최솟값의 합이 4이므로 최댓값은 3이고 점 $(3,\,2)$가 곡선 $y=\log_a x$위의 점이므로

$\log_a 3=2$

그러므로 $a^2=3$이다.

[다른 풀이]

두 곡선 $y=\log_a x-t$와 $y=-a^{x-t}$가 만나는 점의 x좌표가 $f(t)$이므로, $x=f(t)$는 x에 대한 방정식 $\log_a x-t=-a^{x-t}$의 실근이다.

즉, $\log_a f(t)-t=-a^{f(t)-t}$가 성립한다.

함수 $g(x)=\log_a x+a^{x-t}-t$라 하면 $f(t)$는 방정식 $g(x)=0$의 해이다.

$y=\log_a x$와 $y=a^{x-t}$는 $a>1$이므로 증가함수이다. 따라서 함수 $g(x)$는 증가함수이므로 부등식 $f(t)\le t$는 $g(f(t))\le g(t)$와 동치이다.
$g(f(t))=0$이므로, 주어진 부등식은 $0\le g(t)$로 같다.

$g(t)=\log_a t+a^{t-t}-t=\log_a t+1-t$ 이므로 부등식은 $\log_a t+1-t\ge 0$ 이다.

이를 정리하면 $\log_a t\ge t-1$이다.

이 부등식을 만족시키는 t의 범위가 $\alpha\le t\le\beta$이므로, α와 β는 방정식 $\log_a t=t-1$의 두 실근이다.
방정식 $\log_a t=t-1$에서 $t=1$을 대입하면 $\log_a 1=1-1$,

즉 $0=0$이므로 $t=1$은 하나의 해이다.
$\alpha<\beta$라 가정하면 $\alpha=1$이다.
문제의 조건에서 $\alpha+\beta=4$이므로, $1+\beta=4$에서 $\beta=3$이다.
따라서 $t=3$ 또한 방정식 $\log_a t=t-1$의 해가 되어야 한다.

$t=3$을 대입하면 $\log_a 3=3-1=2$이다.

로그의 정의에 의하여 $a^2=3$이다.