28.

[정답] ① $-\frac{3}{2}$

[출제 의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 음함수의 형태로 구하고 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

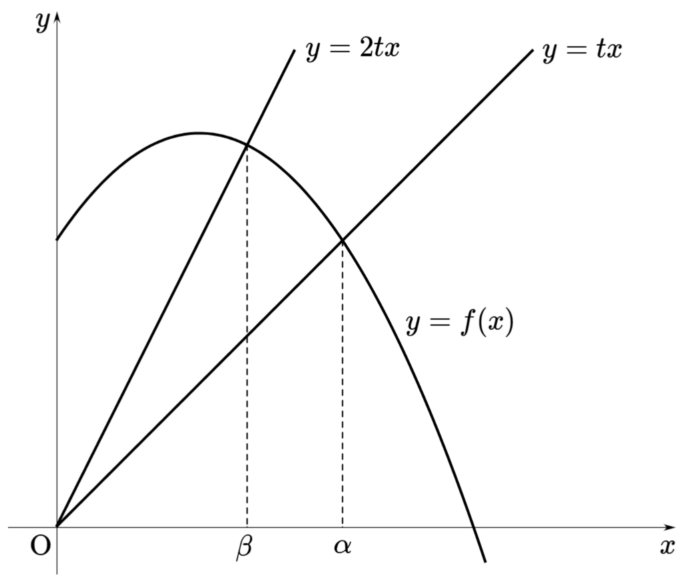
원점 $(0, 0)$은 $y<\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$인 영역에 있으므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=tx$가 만나는 점의 x좌표를 α,

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2tx$가 만나는 점의 x좌표를 β라 하면

$$t\alpha=f(\alpha),\quad 2t\beta=f(\beta),\quad \beta<\alpha$$

이다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=tx$, $y=2tx$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$g(t)=\frac{1}{2}\beta f(\beta)+\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx-\frac{1}{2}\alpha f(\alpha)$$

이다. α와 β가 t에 관한 변수이므로

$$g'(t)=\frac{1}{2}\frac{d\beta}{dt}f(\beta)+\frac{1}{2}\beta f'(\beta)\frac{d\beta}{dt}+f(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}-f(\beta)\frac{d\beta}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dt}f(\alpha)-\frac{1}{2}\alpha f'(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$

이고, $t\alpha=f(\alpha)$, $2t\beta=f(\beta)$의 양변을 미분하면

$$\alpha+t\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}f'(\alpha),\quad 2\beta+2t\frac{d\beta}{dt}=\frac{d\beta}{dt}f'(\beta)$$

이다. 위 식들을 정리하면

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{1}{2}\frac{d\beta}{dt}f(\beta)+\frac{1}{2}\beta f'(\beta)\frac{d\beta}{dt}+f(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}-f(\beta)\frac{d\beta}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dt}f(\alpha)-\frac{1}{2}\alpha f'(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\\&=\frac{1}{2}\beta\frac{d\beta}{dt}f'(\beta)-\frac{1}{2}f(\beta)\frac{d\beta}{dt}-\frac{1}{2}\alpha\frac{d\alpha}{dt}f'(\alpha)+\frac{1}{2}f(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\\&=\frac{1}{2}\beta\left(2\beta+2t\frac{d\beta}{dt}\right)-\frac{1}{2}\times(2t\beta)\times\frac{d\beta}{dt}-\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+t\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{1}{2}\times(t\alpha)\times\frac{d\alpha}{dt}\\&=\beta^2+\beta t\frac{d\beta}{dt}-\beta t\frac{d\beta}{dt}-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha t\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}\alpha t\frac{d\alpha}{dt}\\&=\beta^2-\frac{1}{2}\alpha^2\end{aligned}$$

이다.

$t=1$일 때

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3=x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3=\frac{1}{2}(x+2)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow \alpha=3,$$

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3=2x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3=\frac{1}{2}(x-2)(x+3)=0$$

$$\Rightarrow \beta=2$$

이므로 $g'(1)=\beta^2-\frac{1}{2}\alpha^2=2^2-\frac{1}{2}\times3^2=-\frac{1}{2}$

$t=2$일 때

$$\alpha=2,$$

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3=4x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3=\frac{1}{2}(x-1)(x+5)=0$$

$$\Rightarrow \beta=1$$

이므로 $g'(2)=\beta^2-\frac{1}{2}\alpha^2=1^2-\frac{1}{2}\times2^2=-1$이다.

$\therefore\ g'(1)+g'(2)=-\frac{3}{2}$