김0한 FINAL 공통 22번
심층 분석

오르비 김0한

우선 Final 공통 22번 문제는 학생들이

상당히 까다로워 할 만한 발상을 갖고 있다.

보이지 않은 새로운 점을 설정하여 새로운 도형을 만들어 내는 문제를

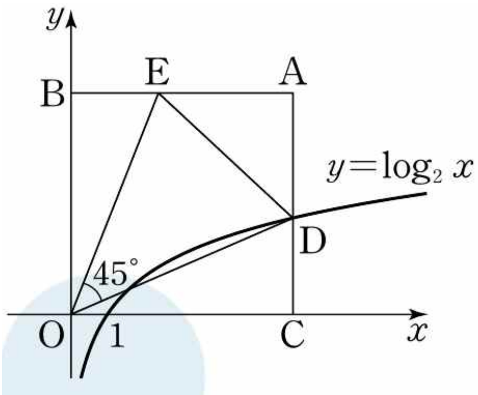
학생들이 많이 접해보지 못하였기 때문이다.

하지만 대한민국 수험생이라면 누구나 수능특강을 공부한다.

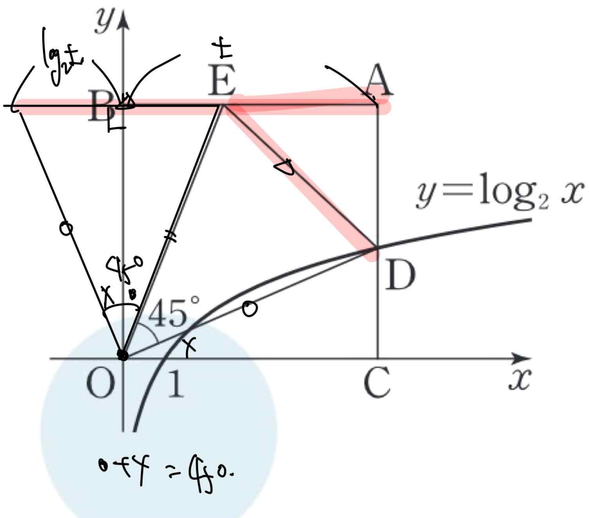
수능특강을 공부 했다면, 올해 수능특강에 있었던 다음 문제가 기억이 날 것이다.

다음 문제를 한번 다시 풀어보고 오도록 하자.

그림과 같이 실수 $t\ (t>1)$에 대하여 네 점 $\mathrm{A}\,(t,\ t)$, $\mathrm{B}\,(0,\ t)$, $\mathrm{O}\,(0,\ 0)$, $\mathrm{C}\,(t,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABOC가 있다. 곡선 $y=\log_2 x$가 선분 AC와 만나는 점을 D라 하고, $\angle\mathrm{DOE}=45^\circ$가 되도록 하는 선분 AB 위에 점 E를 잡는다. $f(t)=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{ED}}$라 할 때, $f(k)-k=2$를 만족시키는 양수 k의 값은? [25008-0056]



① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$



이 문제는 선분 AB를 연장하여 삼각형 ODE와 닮음인 삼각형을

찾아야 문제를 해결할 수 있었다. 문제가 상당히 발상적이라고 느낄 것이다.

따라서 수능에 출제하기에는 매우 부담스럽다.

이유는 문제풀이의 개연성이 매우 떨어지고 지나치게 발상적이기 때문이다.

하지만 이러한 스타일의 문제가 수능에 안나올 것이라는 보장은 없다.

왜냐하면 평가원은 충분히 선분을 연장하여 새로운 도형을 만들어 해결해야만 하는

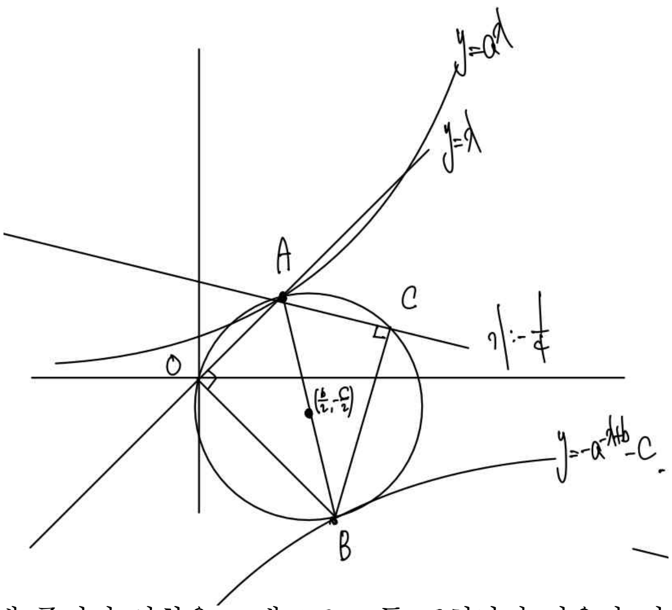
문제를 풀이의 개연성 즉, 반드시 이렇게 선분을 연장해야만 하는 당위성을 부여한다면,

충분히 출제가 가능하다.

김0한 Final 22번 문항은 이러한 문제풀이의 개연성(당위성)을 부여하여

논리적으로 조건을 보고 해야할 사고를 한다면, 반드시 풀리게 설계하였다.

그렇다면 지금부터 김0한 Final 공통 22번 문항을 어떠한 식으로 당위성 있게
접근해야 하는지 그 접근방식에 대해서 알아보자.



우선 문제에 주어진 상황을 그래프로 모두 표현하면 다음과 같다.

그리고 아래에 있는 첫 번째 조건을 해석을 해보면

원의 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{b}{2}, -\dfrac{c}{2}\right)$라고 주어져 있는데

두 지수함수 $y=a^{x}$과 $y=-a^{-x+b}-c$는 점 $\left(\dfrac{b}{2}, -\dfrac{c}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 A와 점 B는 두 지수함수의 대응점이라는 것을 알 수 있다.

그 다음 조건에서 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{BC}}:(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}})$라고 되어 있다.

자, 그러면 이 비례식을 어떻게 해석해야 할지 생각해야한다.

이것을 있는 그대로 계산식으로 받아들일지,
아니면 비율로서 기하적으로 바라볼지를 생각해야한다.

자, 만약 이 조건을 계산식으로 해석한다고 생각해보자.

그렇다면 우리가 표현해야할 선분은 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$로 총 5개다.

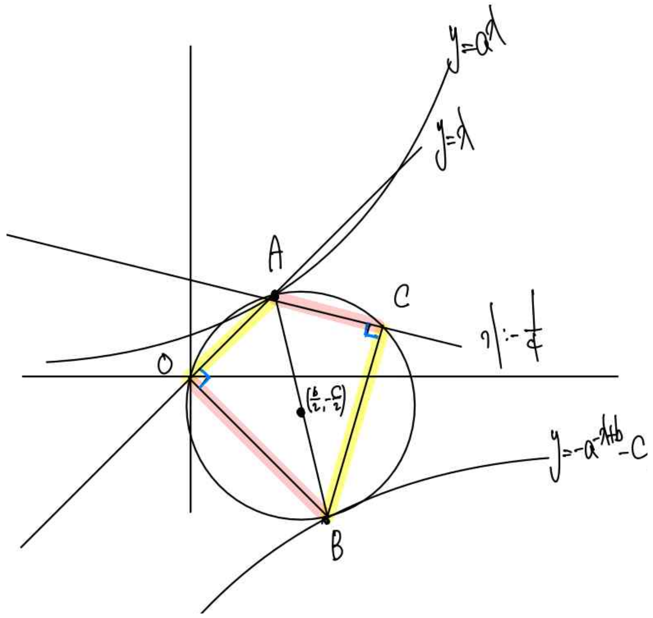
설마, 출제자가 이 5개의 선분을 모두 나타내고 계산하라고 했을까?

여기서 출제자의 의도가 강하게 드러난다.

출제자가 의도적으로 선분을 5개 부여함으로써

절대로 계산으로 접근하지 말라고 여러분에게 외치고 있다.

그렇다면 남은 것은 저 식을 비율로 보고 기하적으로 해석할 생각을 하는 것이다.



우리가 우선 따져야하는 것은 선분 OA와 OB이다.

선분 OA와 OB는 서로 수직이고 삼각형 AOB를 이루고 있다.

따라서 $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{BC} : (\overline{AB} + \overline{AC})$라는 이 조건을 통해 출제자는

$\overline{OA} : \overline{OB}$와 같은 비율을 이루는 삼각형을 찾아달라고 말하고 있다는 것을 알 수 있다.

즉, 삼각형 AOB와 닮음인 삼각형을 찾아달라고 말하는 것이다.

이에 따라 선분 BC, AB, AC를 따져보았더니

하필이면 선분 BC와 선분 AC가 수직을 이루는 것을 알 수 있다.

우리는 삼각형 AOB와 닮음인 삼각형을 찾는 것이 목표인데

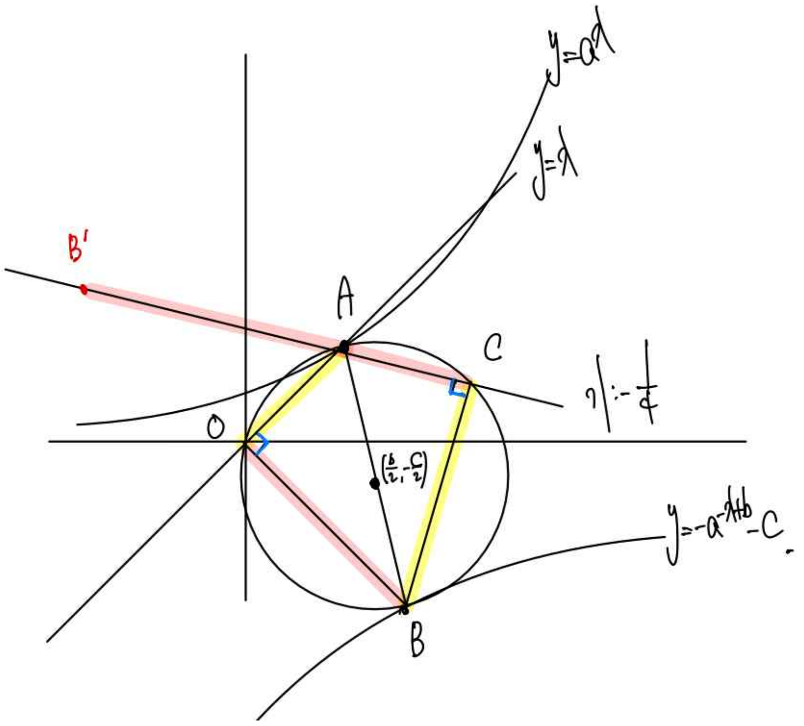
그 중 닮음인 삼각형이 되기 위한 첫 번째 조건인 각도가 ∠AOB와 동일한 각도인 ∠BCA를 찾는데에 성공했다.

그 다음에 닮음인 삼각형이 되기 위한 두 번째 조건인 그 끼인각을 이루는 두 선분의 비율이 동일한 것을 찾아야한다.

표면적으로 그림을 통해 드러나는 비율은 현재 $\overline{BC}:\overline{AC}$가 있다.

하지만 우리가 원하는 비율은 $\overline{BC}:\overline{AC}$가 아닌 $\overline{BC}:(\overline{AB}+\overline{AC})$이다.

여기서 우리는 임의의 점을 설정하여 삼각형 AOB와 닮음인 삼각형을 만들어야겠다는 생각을 해야 한다.

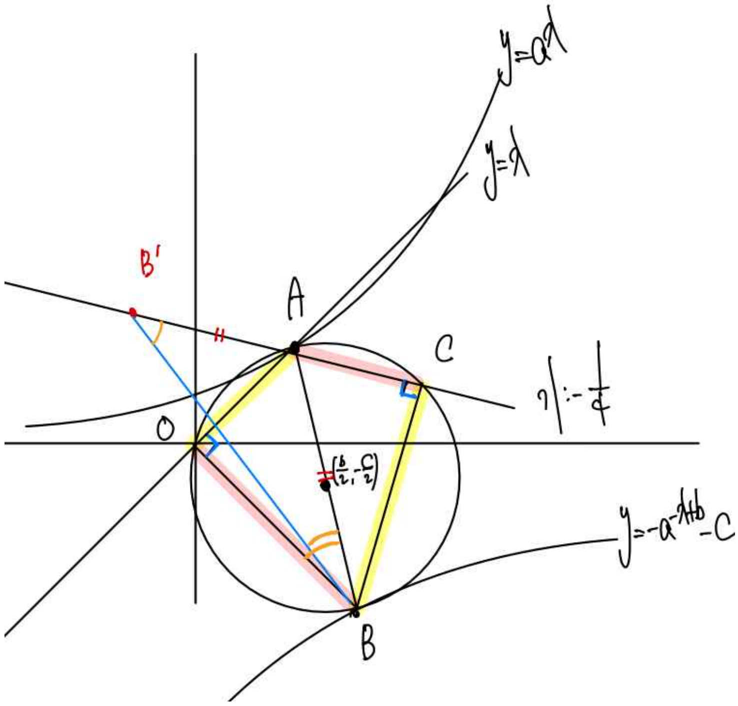


따라서 점 $\mathrm{B'}$**을 다음 그림과 같이** $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{AC}}$**이 되면서**

선분 $\mathrm{B'C}$**가 선분** BC**와 수직이 되도록 잡아야만 한다.**

이렇게 하여 삼각형 BAB′이 삼각형 AOB와 닮음이 되도록 설정하였다.

일단, 두 점 B, B′을 이어보면 다음 그림과 같다.

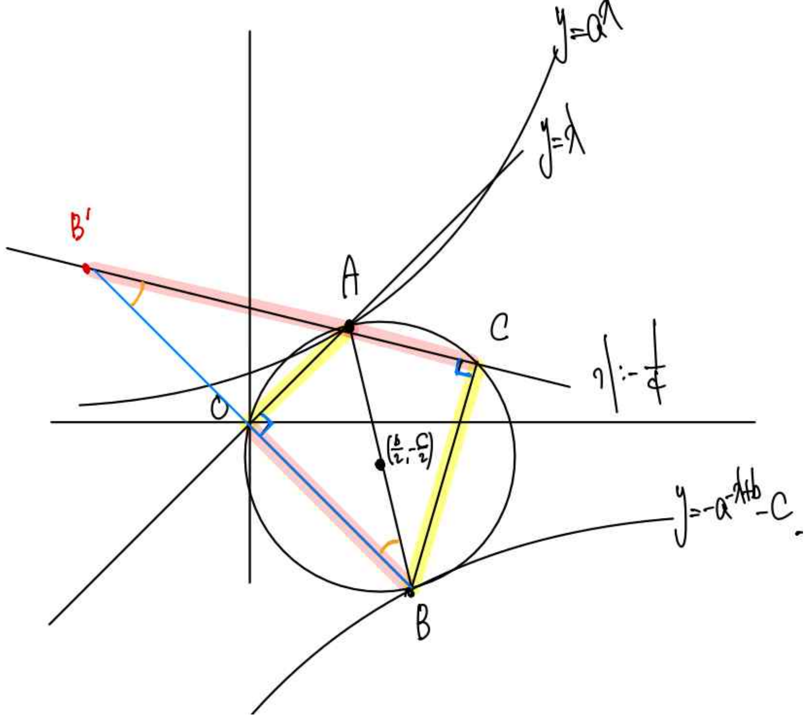


삼각형 AOB와 삼각형 BAB′는 닮음이므로 $\angle \mathrm{OBA}=\angle \mathrm{CB'B}$이다.

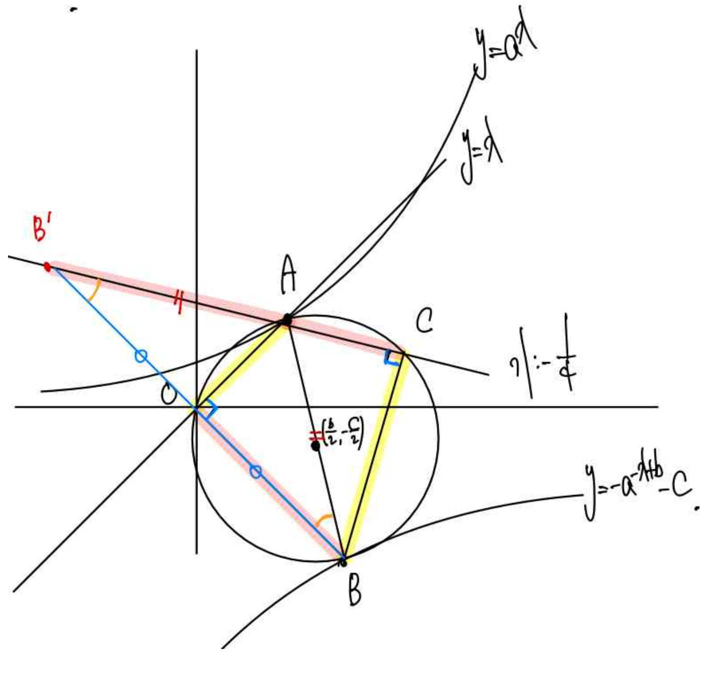
그리고 삼각형 BAB′는 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{AB'}}$인 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{CB'B}=\angle \mathrm{CBB'}$이다.

따라서 $\angle \mathrm{OBA}=\angle \mathrm{CBB'}$이므로 위의 그림은 모순이고,

다음과 같이 세 점 O, B, B′가 한 직선 위에 있다는 사실을 알 수 있다.



여기서 또 관찰 할 수 있는 것은 이등변삼각형 BAB′에서 선분 BB′에 내린 수선의 발이 원점 O라는 사실을 통해서 $\overline{OB}=\overline{OB'}$이라는 사실을 알 수 있다.



자, 출제자가 이 짓을 시키는 이유가 있을 것이다.

'점 B′이 도대체 그래서 뭐야? 나머지 점들이랑 무슨 관련이 있는거야?'라는

의문점이 들 수 있다.

그 해답은 방금 알아낸 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OB'}}$를 통해서 알 수 있다.

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OB'}}$이고, 세 점 O, B, B′가 한 직선 위에 있으므로

점 B**와** B′**은 원점 대칭 관계**라는 것을 알 수 있다.

지금까지 모은 정보를 종합해보면, 점 B′은 직선 AC 위에 설정을 했고,

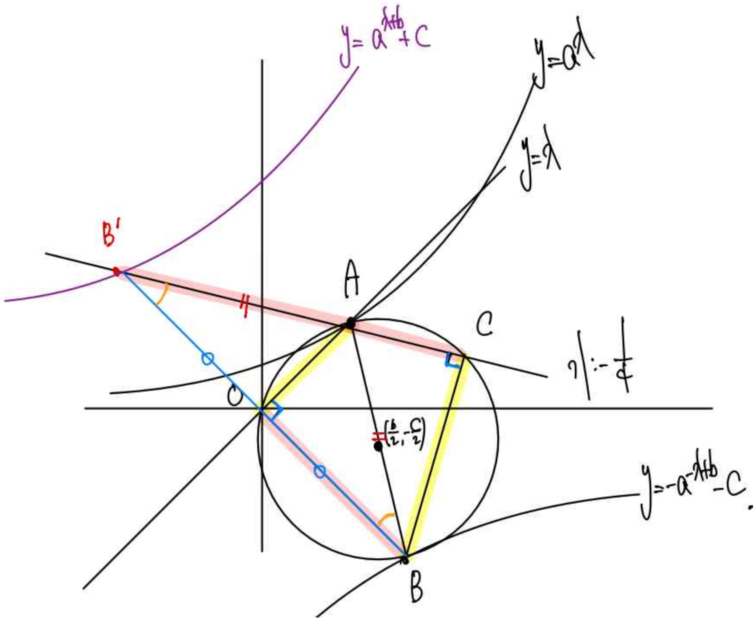
점 B와 B′은 원점 대칭 관계이므로 최종적으로 다음과 같은 결과를 얻어낼 수 있다.

점 B**를 원점 대칭이동한 점은 점** A**를 지나고 기울기가** $-\frac{1}{4}$**인 직선 위에 있다.**

출제자는 이 말을 하고 싶어서 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{BC}}:(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}})$라는 조건을 부여한 것이다.

자, 이제 다음과 같은 사실을 이용하여 문제를 풀어보자.

점 B′은 점 B와 원점 대칭 관계에 놓여져 있다.
점 B는 곡선 $y=-a^{-x+b}-c$ 위에 있으므로, 점 B를 원점 대칭이동한
점 B′**은 곡선** $y=a^{x+b}+c$ **위에 있음을 알 수 있다.**



그리고 나서 곡선 $y=a^x$와 $y=a^{x+b}+c$의 관계를 분석해보면,

곡선 $y=a^x$를 x축 방향으로 $-b$만큼 y축 방향으로 c만큼 평행이동한 곡선이

$y=a^{x+b}+c$라는 것을 알 수 있다.

그렇다면 여기서 한가지 질문을 하겠다.

점 A에서 x축 방향으로 $-b$만큼 y축 방향으로 c만큼

평행이동한 점이 점 B′이라고 단정할 수 있을까?

정답은 단정할 수 없다이다.

이유는 점 A와 B′가 두 지수함수의 대응점일 때만 위의 관계가 성립하기 때문이다.

따라서 점 A와 B′가 대응점이라는 것을 밝혀야 평행이동 관계를 사용할 수 있다.

여기서 우리가 첫 번째 조건해석을 어떻게 하고 지나갔는지를 떠올려야 한다.

우리는 분명 **'점 A와 점 B는 두 지수함수의 대응점'** 이라고 조건해석을 하고 지나갔다.

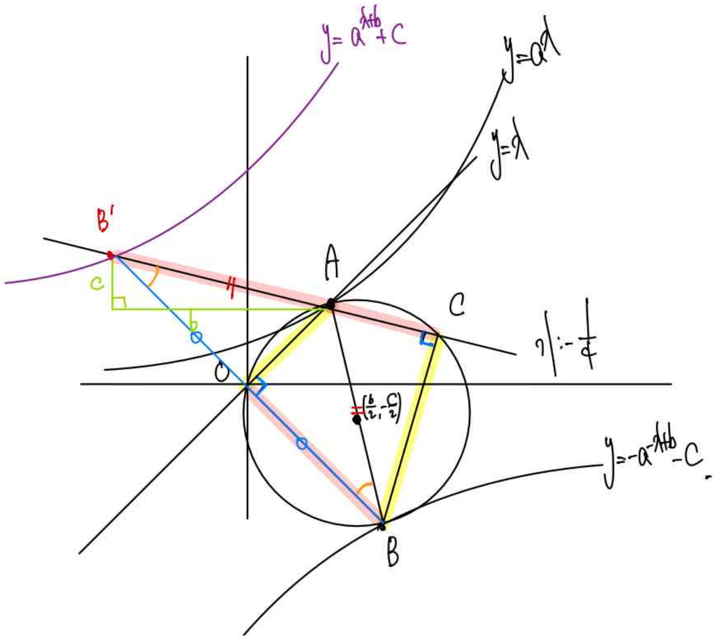
그런데 우리는 곡선 $y=a^{x+b}+c$를 곡선 $y=-a^{-x+b}-c$가 원점 대칭이동한 곡선이라고 설정한 것이고 그 곡선 위에 점 B′이 있다고 한 것이므로

점 B와 B′은 두 지수함수의 대응점이라는 것을 알 수 있다.

따라서 점 A와 B가 대응점이고, 점 B와 B′가 대응점이므로

점 A와 B′이 서로 대응점이라는 것을 알 수 있다.

점 A와 B′이 대응점이라는 것을 파악했으므로 평행이동 관계를 비로소 사용할 수 있다.



따라서 점 A에서 x축 방향으로 $-b$만큼 y축 방향으로 c만큼

평행이동한 점이 점 B′이라는 사실을 얻을 수 있다.

이 평행이동은 기울기가 $-\dfrac{1}{4}$인 직선 위에서 이루어졌으므로

$$\frac{c}{-b}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \therefore b=4c$$

라는 관계식을 얻을 수 있다.

이 이후 좌표를 잡고 단순 계산 과정을 거치면

점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{3c}{2}, \dfrac{3c}{2}\right)$, 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{5c}{2}, -\dfrac{5c}{2}\right)$이라는 것을 알 수 있다.

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{15}{4}c^2=5 \Rightarrow \therefore c^2=\dfrac{4}{3}$, $\quad a^{\frac{3}{2}c}=\dfrac{3}{2}c \Rightarrow a^{3c}=\dfrac{9}{4}c^2$

구하는 값은 $a^{3c}\times b\times c=\dfrac{9}{4}c^2\times 4c\times c=9c^4=16$이 나오면서 정답은 16이 된다.

이 문항을 22번에 출제한 이유는 다음과 같다.

I) 확대·축소 관계는 사교육에서 너무 많이 다루기 때문에 출제에서 배제하였습니다. II) 수능에서 변별력을 확보하기 위해서는 도형의 성질을 다룰 것으로 예상하였습니다. III) 도형을 새로 만드는 발상이 EBS 수능특강에 나와 출제될 확률이 있습니다.

물론 EBS 문항에서 도형을 새로 만드는 발상은 당위성이 떨어지지만

김0한 Final 공통 22번 문항은 수능에 맞게 당위성을 부여하여 출제하였습니다.


Orbi KIM O Han