제 2 교시

수학 영역

KSM

5 지 선 다 형

1. $\sqrt[3]{3} \times 9^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3+2x+1$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2+2$

$f'(1) = 5$

3. 첫째항이 8이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 a_3 = 2a_2 a_4$$

를 만족시킬 때, a_5 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\frac{1}{r^2} = 2$, $r^2 = \frac{1}{2}$, $a_5 = ar^4 = 2$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x < 3) \\ x + 2a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$9+a = 3+2a$, $a=6$

5. 함수 $f(x)=(x^2-x)(2x^2-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$f'(x)=(2x-1)(2x^2-5)+(x^2-x)(4x)$

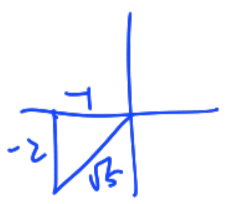
$f'(2)=\quad 9+16$

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan(\pi-\theta)=-2$일 때, $\cos\theta-\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=2$



$\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{-2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

7. 곡선 $y=x^3-6x+7$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y'=3x^2-6$

$y'_{x=1}=-3$ $\quad y=-3(x-1)+2$

$y=-3x+5$

8. 두 실수 a, b가

$$3a+b=\log_3 45, \quad a+b=\log_9 5$$

를 만족시킬 때, $a-b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3a+b=\log_3 45$
$-\ \ 2a+2b=\log_3 5$
$a-b=\log_3 9=2$

9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1=-t^3+7t^2-10t, \quad x_2=t^2+2t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$-3t^2+14t-10=2t+2$

$3t^2-12t+12=0$

$t^2-4t+4=0$, $t=2$

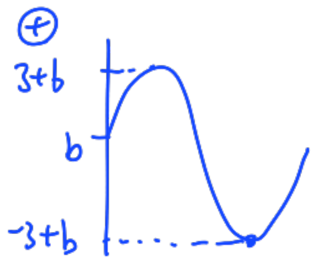
$x_1(2)=0$
$x_2(2)=8$) 8

10. 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$에서 정의된 함수

$$f(x)=3\sin\frac{\pi x}{a}+b$$ 주기 : $2a$

의 그래프가 x축과 오직 한 점 $(2, 0)$에서 만날 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



$(2,0)=\left(\frac{3a}{2}, -3+b\right)$

$\therefore a=\frac{4}{3}, b=3$

11. 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x+3)f(x)=\int_{-3}^{x}(4f(t)-2t^2)dt$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? [4점]

① 24　② 25　③ 26　④ 27　⑤ 28

$f(x)+(x+3)f'(x)=4f(x)-2x^2$

$3f(x)-(x+3)f'(x)=2x^2$

$x=-3 \to f(-3)=6$

$x=0 \to 3f(0)-3f'(0)=0$

$f(0)=f'(0)$　$f(x)=ax^2+bx+b$

최고차항 계수 $3a-2a=2$

$a=2$

$f(-3)=18-2b=6$

$b=6$

$f(x)=2x^2+6x+6$

$f(2)=8+12+6=26$

12. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

모든 자연수 n에 대하여 $3{a_n}^2+2na_n-8n^2=0$이다.

① 540　② 550　③ 560　④ 570　⑤ 580

$(3a_n-4n)(a_n+2n)=0$

$a_n=\frac{4n}{3}$ or $a_n=-2n$

$a_{3n-2}=-2(3n-2)=-6n+4$

$a_{3n-1}=-2(3n-1)=-6n+2$] 일정 $\Rightarrow M-m=0$

$a_{3n}=\frac{4}{3}(3n)$ or $-2(3n)$

$=4n$ or $-6n$

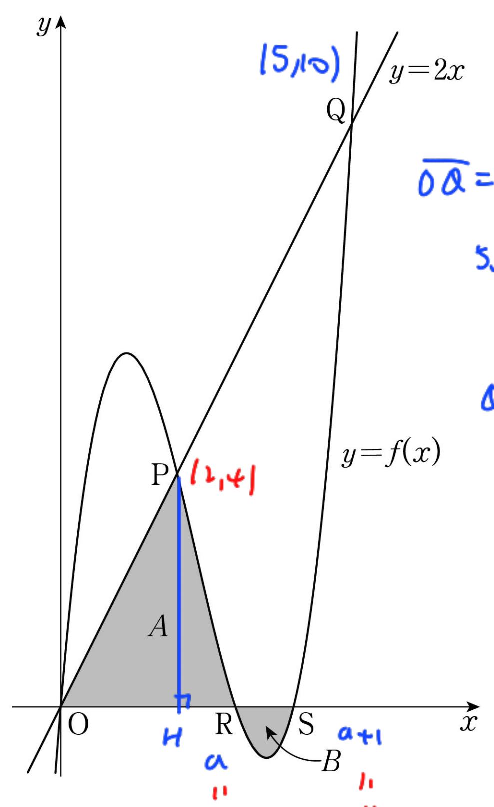
$M-m=\sum_{n=1}^{10}|4n-(-6n)|=10\times55=550$

13. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f(a)=f(a+1)=0$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 세 점 O, P, Q($\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$)에서 만난다. 두 점 R$(a,0)$, S$(a+1,0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OP, OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 RS로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=5\sqrt{5}$일 때, $A-B$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{61}{12}$ ② $\frac{31}{6}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{65}{12}$



$\overline{OQ}=5\sqrt{5}$

$Q(5,10)$

$f(x)=x(x-a)(x-a-1)$

$f(5)=5(5-a)(4-a)=10$

$a^2-9a+18=0 \quad a=3,6 \quad \therefore a=3$

$0+3+4=0+5+p \quad p=2 \quad P(2,4)$

$A-B=\triangle OAH+\int_2^4 f(x)dx$

$=4+\int_2^4 x(x-3)(x-4)dx$

$=4+\int_0^2 (x+2)(x-1)(x-2)dx \quad (x^2-2)(x-1)=x^3-x^2-2x+2$

$=4+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^2$

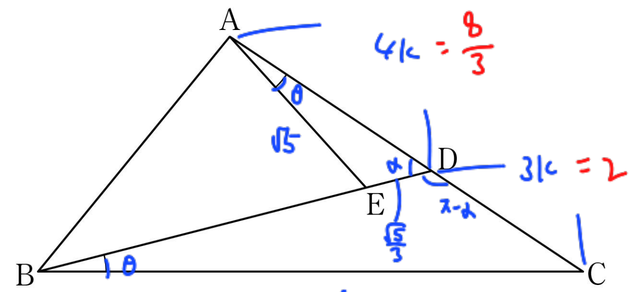
$=4+4-\frac{8}{3}-4+4=\frac{16}{3}$

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $4:3$으로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 BD 위의 점 E가

$$\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{DBC},\quad \sin(\angle\mathrm{DAE}):\sin(\angle\mathrm{EDA})=1:3$$

을 만족시킨다. $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{5}$일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는? [4점]

$\overline{DE}:\overline{AE}=1:3 \Downarrow \overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

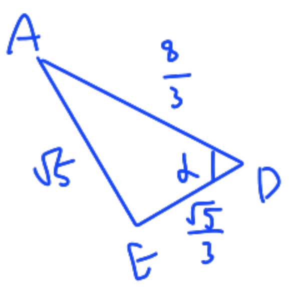


① $\frac{180}{11}\pi$ ② $\frac{195}{11}\pi$ ③ $\frac{210}{11}\pi$ ④ $\frac{225}{11}\pi$ ⑤ $\frac{240}{11}\pi$

$\sin(\angle DAE):\sin(\angle EDA)=1:3$

$\Rightarrow \sin(\angle DBC):\sin(\angle CDB)=1:3$

$\Rightarrow \overline{CD}:\overline{BC}=1:3 \quad \therefore 3k=2 \quad \overline{CD}=2,\ \overline{AD}=\frac{8}{3}$



$\cos\alpha=\dfrac{\frac{64}{9}+\frac{5}{9}-5}{2\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{\frac{24}{9}}{\frac{16}{9}\sqrt{5}}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$

$\dfrac{6}{\sin\alpha}=2R,\quad \pi R^2=\dfrac{9}{\sin^2\alpha}\pi=\dfrac{180}{11}\pi$

15. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

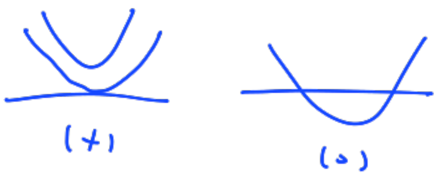
$$g(x)=\int_0^x |f(t)|dt+\left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

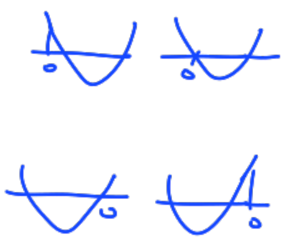
라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $-7\le x\le 0$이다.
(나) 양수 p에 대하여 $g(x)=81$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $4p\le x\le 7p$이다.

$f(-10)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

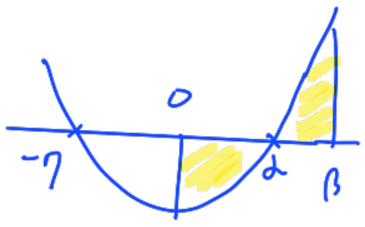

(+) (-)



$x\le 0 \Rightarrow g(x)=0$
(가) ×

$x\ge 0$ $g(x)$ 증가
(나) ×

∴ $f(x)$



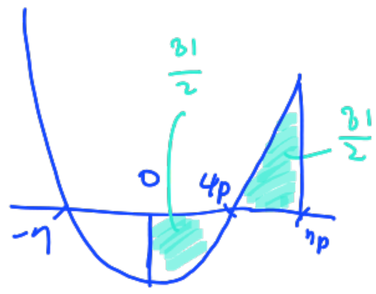
$-7\le x\le 0 \Rightarrow g(x)=0$

$0\le x\le \alpha \Rightarrow g(x)$ 증가

$\alpha\le x\le \beta \Rightarrow g(x)$ 상수

$\left(\int_0^\beta g(x)dx=0\right)$

∴ $\alpha=4p,\ \beta=7p$



$\int_0^{7p} f(x)dx=0,\ \int_0^{4p} f(x)dx=-\frac{81}{2}$

$f(x)=a(x+7)(x-4p)$
$=a(x^2+(7-4p)x-28p)$

$\int_0^{7p} f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3+\left(\frac{7}{2}-2p\right)x^2-28px\right]_0^{7p}$
$=a\left[\frac{1}{3}7^3p^3+\frac{7^3}{2}p^2-2p\cdot 7^2p^2-4\cdot 7^2p^2\right]=0$
∴ $\frac{7}{3}p+\frac{7}{2}-2p-4=0,\ \frac{p}{3}=\frac{1}{2},\ p=\frac{3}{2}$

$f(x)=a(x^2+x-42)$

$\int_0^{4p} f=\int_0^6 f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-42x\right]_0^6$
$=a(72+18-252)=-\frac{81}{2}$
$a=\frac{1}{4}$

∴ $f(-10)=\frac{1}{4}(100-10-42)=12$

단답형

16. 방정식

$$\log_4(x+2)+\log_4 2=\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>2$

$\boxed{6}$

$\log_4 2(x+2)=\log_4(x-2)^2$

$2x+4=x^2-4x+4$

$x^2-6x=0$ $x=6$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{14}$

$f(x)=2x^3-x^2+2$

$f(2)=16-4+2=14$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{7}(a_n-2)(b_n-2)=60, \quad \sum_{n=1}^{7}(a_n+b_n)=44$$

일 때, $\sum_{n=1}^{7}a_nb_n$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{120}$

$\sum_1^7 (a_nb_n-2(a_n+b_n)+4)=60$

$\sum_1^7 a_nb_n \; -88+28=60$

$\therefore \sum_1^7 a_nb_n=120$

19. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-6x^2+ax+b$$

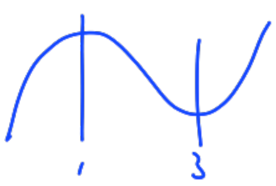
라 하자. 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖고, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 8이다. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{11}$

$f'(x)=3x^2-12x+a$

$f'(3)=a-9=0, \; a=9$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$



$f(1)=b+4$

$f(3)=b$

$2b+4=8$

$\therefore b=2$

$a+b=11$

20. 상수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+2}+7 & (x<-2) \\ -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-a}+10 & (x\geq-2) \end{cases}$$

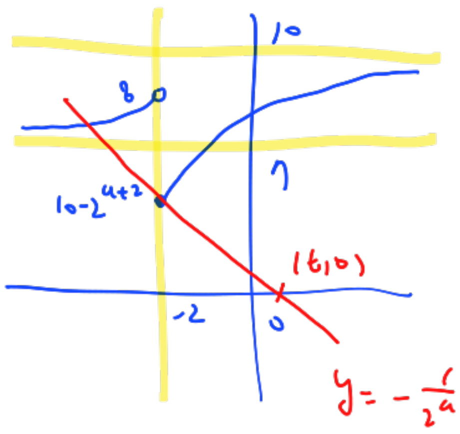
가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x+2^ay-t=0$이 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)=2$를 만족시키는 t의 최솟값이 함수 $f(x)$의 최솟값과 같도록 하는 모든 2^a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

$-(\frac{1}{2})^{-2-a}+10\le 7$

$3\le 2^{a+2}$

$2^a\ge\frac{3}{4}$

$\boxed{3}$



$y=-\frac{1}{2^a}x+\frac{t}{2^a}$

$t=10-2^{a+2}$, $(-2, 10-2^{a+2})$

$10-2^{a+2}=2^{1-a}+\frac{10-2^{a+2}}{2^a}$

$2^a=t \to 10-4t=\frac{2}{t}+\frac{10}{t}-4$

$4t^2-14t+12=0$

$2t^2-7t+6=0$

$(2t-3)(t-2)=0$

$t=\frac{3}{2}, 2$ $\quad 2^a=\frac{3}{2}, 2$ $\quad 2^a\ge\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{3}{2}\times 2=3$

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $$\lim_{x\to k}\frac{2x^2f(x)-(f(k))^2}{x-k}=\lim_{x\to k}\frac{(f(x))^2-(f(k))^2}{x-k}$$
> 을 만족시키는 실수 k는 t, $-t\,(t>1)$뿐이다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 17일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{81}$

i) $2k^2f(k)-(f(k))^2=0$ $f(k)(2k^2-f(k))=0$

$f(k)=0$ or $f(k)=2k^2$

(X) (∵ $f(k)\ge 17$)

$\to f(k)(2x^2-f(k))=2k^2\times 2(x^2-k^2)$

ii) $\lim_{x\to k}\frac{2x^2(f(x)-f(k))+2x^2f(k)-(f(k))^2}{x-k}=\lim_{x\to k}\frac{(f(x)-f(k))(f(x)+f(k))}{x-k}$

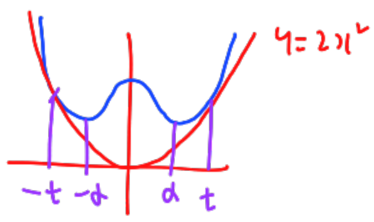
$=2k^2f'(k)+2k^2\times2\times2k=f'(k)\times2f(k)=4k^2f'(k)$

$\Rightarrow 2k^2f'(k)+8k^3=4k^2f'(k)$

$\Rightarrow f'(k)=4k$

$\begin{cases}f(k)=2k^2\\ f'(k)=4k\end{cases}\Rightarrow k=t,-t$

$f(x)=2x^2$ 중근 $t,-t$



$f(x)-2x^2=(x-t)^2(x+t)^2=(x^2-t^2)^2$

$f'(x)=2(x^2-t^2)\cdot2x+4x=4x(x^2-t^2+1)=0$

$x^2=t^2-1$ $\alpha^2=t^2-1$

$f(\alpha)=(\alpha^2-t^2)^2+2\alpha^2=17$

$\Rightarrow 1+2\alpha^2=17$

$\therefore \alpha^2=8,\ t^2=9$

$f(x)=(x^2-9)^2+2x^2$

$f(4)=49+32=81$

22. 실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}|a_n+n| & (a_n<0)\\ a_n-10+k & (a_n\ge0)\end{cases}$$
> 이다.

$a_4\times a_5=0$이 되도록 하는 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{63}$

$a_4\times a_5=0\Rightarrow a_4=0$ or $a_5=0\Rightarrow a_4=-4$
$a_4=10-k\ (k\le10)$

$\therefore a_4=0$ or -4 or $10-k$

a_1 a_2 a_3 a_4

3 $k-7$ $|k-5|$ ($k<7$) $|k-5|-10+k=0\to|k-5|=10-k\to k=\frac{15}{2}$ (X)
$=-4\to|k-5|=6-k\to k=\frac{11}{2}$ (O)
$=10-k\to|k-5|=20-2k\to k=\frac{25}{3}$ (X)

$2k-17$ ($k\ge7$) $|2k-14|=0\to k=7$ (O)   ($7\le k<\frac{17}{2}$)
$=-4\to$ (X)
$=10-k\to k=8$ (O)

$3k-27$ ($k\ge\frac{17}{2}$) $=0\to k=9$ (O)
$=-4\to k=7$ (X)
$=10-k\to k=\frac{37}{4}$ (O)

$M=\frac{37}{4}$, $m=\frac{11}{2}$ $M+m=\frac{59}{4}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5 지 선 다 형

23. 다항식 $(x^4+1)^5$의 전개식에서 x^{12}의 계수는? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

$_5C_3 = 10$

24. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점] $1-P(A)=P(A)+\frac{1}{2},\ P(A)=\frac{1}{4}$

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

$P(B)=\frac{1}{3}-P(A)=\frac{1}{12}$

25. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $|a-b|=1$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{7}{36}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

1 2
2 3
3 4
4 5
5 6

$5\times2=10$

$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

26. 어느 농장에서 수확하는 딸기 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 농장에서 수확하는 딸기 중에서 100개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $80a \le m \le 82a$이다.
이 농장에서 수확하는 딸기 중에서 25개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $78a \le m \le 80a+0.49$이다. σ의 값은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$2a = 2\times1.96\times\frac{\sigma}{10}$

$2a+0.49 = 2\times1.96\times\frac{\sigma}{5}$

$0.49 = 2\times1.96\times\frac{\sigma}{10}$

$\sigma = \frac{5}{4}$

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [3점]

(가) $a \times b \times c = 144$
(나) a는 짝수이다.

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

$144 = 2^4 \times 3^2$

${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

28. 확률변수 X가 평균이 m이고 표준편차가 $\frac{1}{2m}$인 정규분포를 따른다. 음수 a에 대하여

$m>0$

$$P(X \le a) + P(X \le a^2) = 1,$$

$$P(X \le a^2 + a) = 0.9772$$

일 때, $P\left(X \le -\frac{a}{8}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \ne 0$) [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

$a + a^2 = 2m$

$P(X \le a^2 + a) = P\left(Z \le \frac{2m - m}{\frac{1}{2m}}\right) = P(Z \le 2m^2) = 0.9772$

$2m^2 = 2$

$m = 1$

$a^2 + a - 2 = 0$ $a = -2$

$P\left(X \le \frac{1}{4}\right) = P\left(Z \le \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2}}\right) = P\left(Z \le -\frac{3}{2}\right)$

$= 0.0668$

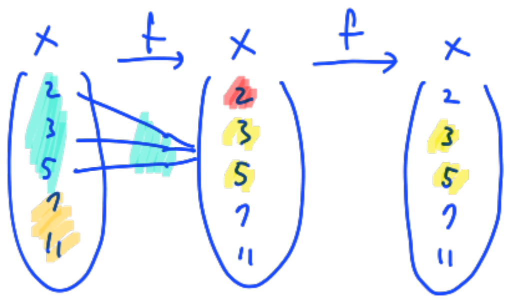
단답형

29. 집합 $X=\{2, 3, 5, 7, 11\}$과 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{180}$

(가) $n(B)=2$

(나) 집합 A의 모든 원소의 곱은 집합 B의 모든 원소의 곱의 2배이다.

$A=\{p, q, 2\}$
$B=\{p, q\}$

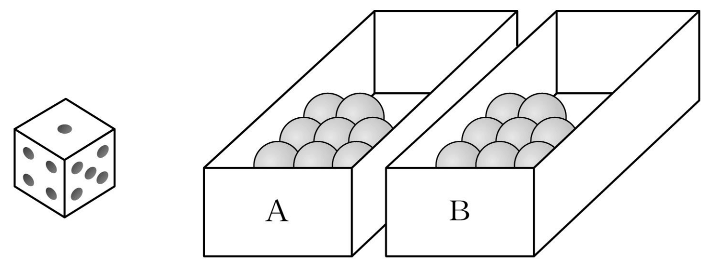


$_4C_2 \times (2^3-2) \times (3^2-2^2) = 6 \times 6 \times 5$
$= 180$
2,3,5 → 3, 5

30. 두 상자 A, B에 각각 8개의 공이 들어 있다. 두 상자 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 3의 배수이면 $\frac{1}{3}$
상자 A에서 2개의 공을 꺼내어 상자 B에 넣고,
나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 $\frac{2}{3}$
상자 B에서 1개의 공을 꺼내어 상자 A에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 상자 B에 들어 있는 공의 개수보다 많을 때, 주사위의 짝수의 눈이 4번 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{17}$



3,6　1,2,4,5

3의배수	3의배수 X	
1	3	$4 \times (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^3$
0	4	$(\frac{2}{3})^4$

$\dfrac{4 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{2}{6})^3 + (\frac{2}{6})^4}{4 \cdot \frac{8}{3^4} + \frac{16}{3^4}} = \dfrac{2+1}{32+16}$
$= \dfrac{3}{48} = \dfrac{1}{16}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{e^x - 1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k}$ 의 값은? [3점]

① $\ln \frac{3}{2}$ ② $\ln 2$ ③ $\ln \frac{5}{2}$ ④ $\ln 3$ ⑤ $\ln \frac{7}{2}$

$\frac{1}{2+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

$2+\frac{k}{n} \to x$

$\frac{1}{n} \to dx$

$\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{3}{2}$

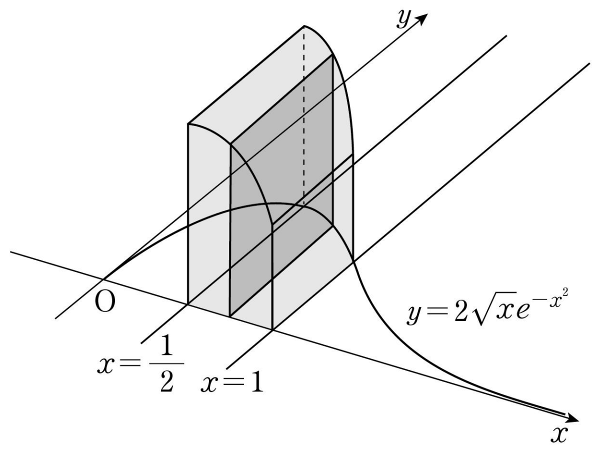
25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+2n}-a_n\right)=\frac{1}{3}$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [3점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{a_n^2+2n}+a_n}=\frac{1}{3}$　　$a_n=dn+d$

$\frac{2}{d+d}=\frac{1}{3}$　　$\therefore d=3$

26. 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{x}e^{-x^2}$과 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $e^{-1}-e^{-2}$　　② $e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$　　③ $e^{-\frac{1}{2}}-2e^{-2}$

④ $e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$　　⑤ $2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x e^{-2x^2}dx = \left[-e^{-2x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= -e^{-2}+e^{-\frac{1}{2}}$

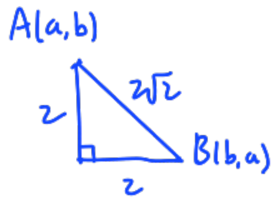
27. 세 실수 $k\,(k<-1)$, a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(b, a)$가 곡선 $C: x^2-xy+y^2+k=0$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2},\quad \tan\theta=\frac{4}{3}$$

일 때, $k+a+b$의 값은? [3점]

① -35 ② -27 ③ -19 ④ -11 ⑤ -3

A(a,b)



$2x-y-xy'+2yy'=0$

$y'=\frac{y-2x}{2y-x}$

$b-a=2$
$b=a+2$

점 A 접선 기울기 : $\tan\alpha=\frac{b-2a}{2b-a}=\frac{-a+2}{a+4}=l$

점 B 접선 기울기 : $\tan\beta=\frac{a-2b}{2a-b}=\frac{-a-4}{a-2}=\frac{1}{l}$

$\tan\theta=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{l-\frac{1}{l}}{2}\right|=\frac{4}{3}$

$\left|l-\frac{1}{l}\right|=\frac{8}{3}$ or $-\frac{8}{3}$

$3l^2-8l-3=0$ or $3l^2+8l-3=0$

$3l \quad +1$ / $l \quad -3$, $3l \quad -1$ / $l \quad +3$

$l=-\frac{1}{3}, 3$, $l=\frac{1}{3}, -3$

$l=\frac{-a+2}{a+4}=\frac{6}{a+4}-1$

$a>1 \to -1<l<\frac{1}{5}$

$\therefore l=-\frac{1}{3}$

$\frac{-a+2}{a+4}=-\frac{1}{3}$

$a+4=3a-6,\ a=5,\ b=7$

$a^2-ab+b^2+k=0$

$25-35+49+k=0,\ k=-39$

$\therefore (-39)+5+7=-27$

28. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_k^x f'(t)\ln f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 a_1, a_2, a_3이다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a_2)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.

(나) $\displaystyle\int_{a_1}^{a_3}\left(g(x)+f(x)-f(x)\ln f(x)\right)dx=\frac{3}{2}$

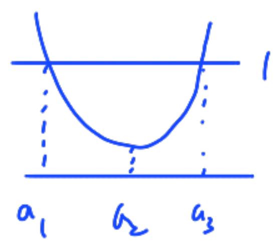
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$g(k)=0$

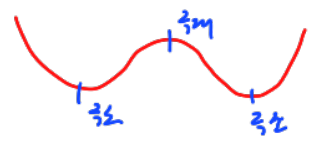
$g'(x)=f'(x)\ln f(x) \to g(x)$ 극값 3개

$f'=0$
$\ln f=0 \to f=1$

$f(x)$



g' $-$ a_1 $+$ a_2 $-$ a_3 $+$



$g(k)=0$, $g(x)\geq 0 \Rightarrow$ 극소에서 극솟값 0

$\therefore k=a_1$ or a_3

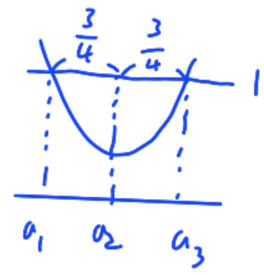
$\Rightarrow f(k)=1$

$g(x)=f(t)\ln f(t)\Big|_k^x-\int_k^x f(t)\cdot\frac{f'(t)}{f(t)}dt$

$=f(x)\ln f(x)-\cancel{f(k)\ln f(k)}-f(x)+f(k)$

$\therefore g(x)+f(x)-f(x)\ln f(x)=f(k)=1$

(나) $\int_{a_1}^{a_3}1\,dx=a_3-a_1=\frac{3}{2}$



$f(x)=(x-a_1)(x-a_3)+1$

$f(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)+1$

$=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+1=\frac{7}{16}$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}) = 5, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1} + a_{n+2}| \times \sin\frac{n\pi}{2}\right) = 2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(100a_n - ma_{3n})$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 m의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\boxed{686}$

$a_n = ar^{n-1}$ $|r|<1$

$\frac{a}{1-r} + \frac{ar}{1-r} = 5$ $\frac{a(1+r)}{1-r} = 5$ $a>0$

$|a_2+a_3| - |a_4+a_5| + |a_6+a_7| - |a_8+a_9| + \cdots = 2$

i) $a>0$, $r>0$: $\frac{ar(1+r)}{1+r^2} = 2$, $\frac{a(1+r)}{1-r} \times \frac{1+r^2}{ar(1+r)} = \frac{5}{2}$

$\frac{1+r^2}{r(1-r)} = \frac{5}{2}$, $2+2r^2 = 5r - 5r^2$

$7r^2 - 5r + 2 = 0$

$D<0$ (×)

ii) $a>0$, $r<0$: $\frac{-ar(1+r)}{1+r^2} = 2$ $\frac{1+r^2}{r(1-r)} = -\frac{5}{2}$, $-2-2r^2 = 5r - 5r^2$

$3r^2 - 5r - 2 = 0$

$r = -\frac{1}{3}$

$a(1-\frac{1}{3}) = 5(1+\frac{1}{3})$, $a = 10$

$\therefore a_n = 10 \times (-\frac{1}{3})^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(100a_n - ma_{3n}) = \frac{1000}{1+\frac{1}{3}} - m \times \frac{\frac{10}{9}}{1+\frac{1}{27}}$

$= 750 - \frac{15}{14}m = 15(50 - \frac{1}{14}m)$

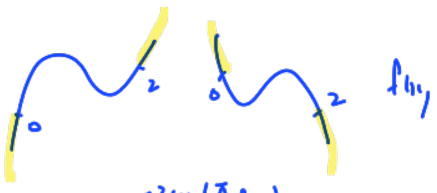
m 최댓값 $14 \times 49 = 686$

30. 함수 $f(x) = ax^3 - 2ax^2 + bx - b - 2$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 $a\,(a \neq 0)$, b에 대하여 $h'(-\sqrt{2})$의 최댓값이 $\frac{k}{\pi}$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

$h(-\sqrt{2}) = c$
$g(c) = -\sqrt{2}$, $h'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(c)}$

$\boxed{16}$

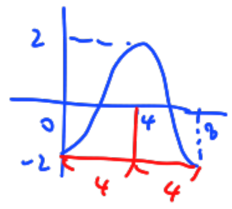
> 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
>
> $$g(x) = \begin{cases} f(x) + 2 & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{4}f(x)\right) & (0 \le x \le 2) \end{cases}$$
>
> 는 역함수 $h(x)$를 갖는다. 일대일 대응



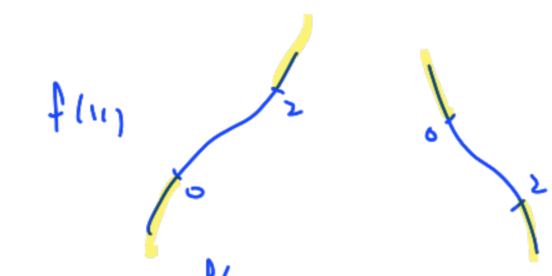
$-2\cos(\frac{\pi}{4}f(x))$ 일대일 대응X

$f(0) = -b-2$
$f(2) = b-2$

$-2\cos\frac{\pi}{4}x$



$f'(x) = 3ax^2 - 4ax + b$



f' $D/4 = 4a^2 - 3ab \le 0$

$-2\cos(\frac{\pi}{4}f(x))$ 일대일 대응

$0 < |f(2) - f(0)| \le 4$

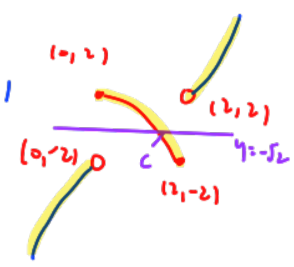
$\therefore 0 < |2b| \le 4$ $b = -2, -1, 1, 2$

$b=-2 \to 2a^2 + 3a \le 0$ $a(2a+3) \le 0$ $a=-1$
$b=-1 \to 4a^2 + 3a \le 0$ $a(4a+3) \le 0$ 정수 a (×)
$b=1 \to 4a^2 - 3a \le 0$ $a(4a-3) \le 0$ 정수 a (×)
$b=2 \to 2a^2 - 3a \le 0$ $a(2a-3) \le 0$ 정수 $a=1$

$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ or $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$
$f(0) = -4$ $g(0) = 2$
$f(2) = 0$ $g(2) = -2$

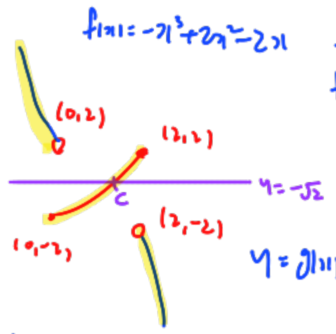
$y = g(x)$



$g(c) = -\sqrt{2}$

$g'(c) < 0$ (×)

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x$ $f(0) = 0$ $g(0) = -2$
$f(2) = -4$ $g(2) = 2$



$f' = -3x^2 + 4x - 2$

$g(c) = -2\cos(\frac{\pi}{4}f(c)) = -\sqrt{2}$ $f(0) = 0$
$\cos(\frac{\pi}{4}f(c)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f(2) = -4$

$f(c) = -1$,
$-c^3 + 2c^2 - 2c = -1$
$c^3 - 2c^2 + 2c - 1 = 0$
$(c-1)(c^2 - c + 1) = 0$
$\therefore c = 1$

$\therefore h'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(c)} = \frac{1}{g'(1)}$

$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{4}f(1)) \times f'(1)}$

$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-1)}$

$= \frac{4}{\sqrt{2}\pi}$, $k = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$k^2 = 16$

$(-2\cos(\frac{\pi}{4}f(x)))' = 2\sin(\frac{\pi}{4}f(x)) \times \frac{\pi}{4}f'(x)$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$에 대하여 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(-1,2)+(2,2)=(1,4)$

24. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4,\ 4)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

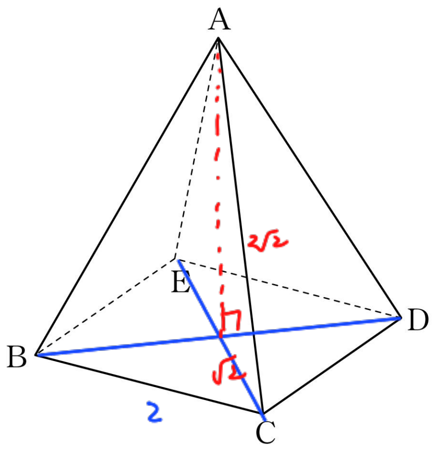
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$y_1 y = 2(x+x_1)$

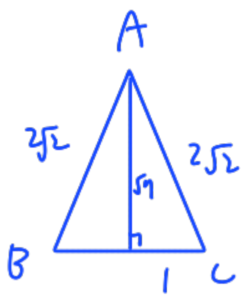
$4y = 2(x+4)$

기 $= \frac{1}{2}$

25. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 BCDE를 밑면으로 하고 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}$인 사각뿔 A−BCDE가 있다. 직선 AC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



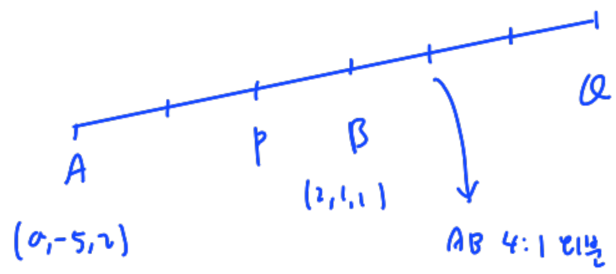
① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$



$S=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$

26. 좌표공간의 두 점 A$(a,\ -5,\ 2)$, B$(2,\ 1,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 중점을 중심으로 하는 구가 yz평면과 zx평면에 모두 접할 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



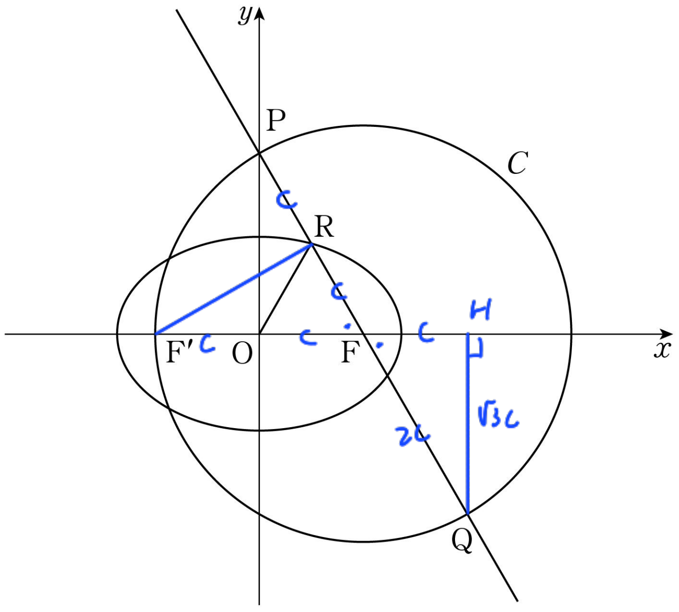
AB 4:1 외분

$\left(\frac{8-a}{3},\ 3,\ \frac{2}{3}\right)$

$|x|=|y| \rightarrow \left|\frac{8-a}{3}\right|=3$

$a=17$ ($\because a>0$)

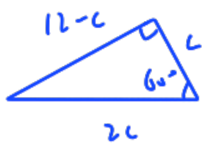
27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F를 중심으로 하고 점 F′을 지나는 원을 C라 하자. 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 P라 하고, 원 C가 직선 PF와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 타원과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 R이라 하면 점 R은 선분 PQ를 1 : 3으로 내분한다. 선분 OR의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $8\sqrt{3}-10$　② $7\sqrt{3}-8$　③ $6\sqrt{3}-6$　④ $5\sqrt{3}-4$　⑤ $4\sqrt{3}-2$

$\triangle OFP \equiv \triangle HFQ$

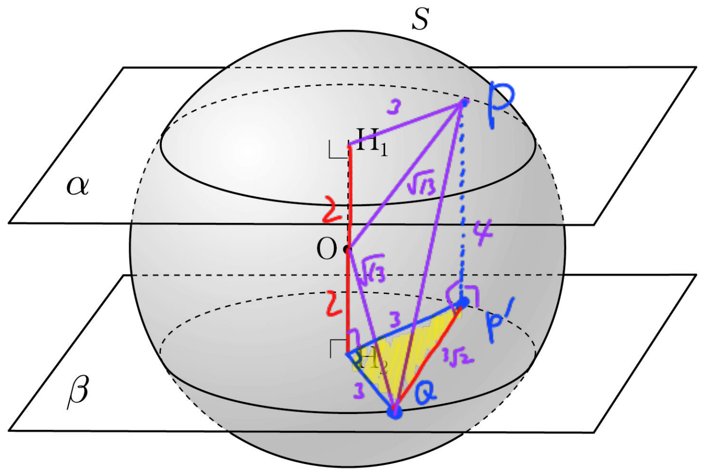
$\angle HFQ = \angle OFP = 60°$



$12-c=\sqrt{3}c$, $c=\frac{12}{\sqrt{3}+1}=6(\sqrt{3}-1)$

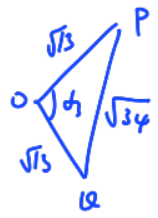
28. 좌표공간에 서로 평행한 두 평면 α, β와 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 구 S가 있다. 점 O에서 두 평면 α, β에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 $\overline{\mathrm{OH_1}}=\overline{\mathrm{OH_2}}=2$이다. 구 S가 평면 α와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점을 P, 구 S가 평면 β와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점을 Q라 하자.
삼각형 POQ의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 최대일 때, 평면 POQ와 평면 β가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 세 점 O, P, Q는 한 직선 위에 있지 않고, 직선 PQ와 직선 $\mathrm{H_1H_2}$는 서로 평행하지 않다.) [4점]

① $\frac{2\sqrt{17}}{17}$　② $\frac{5\sqrt{17}}{34}$　③ $\frac{3\sqrt{17}}{17}$　④ $\frac{7\sqrt{17}}{34}$　⑤ $\frac{4\sqrt{17}}{17}$



$\triangle P'H_2Q$ 최대 ⇒ $\angle P'H_2Q = 90°$, $\overline{PP'}=4$, $\overline{P'Q}=3\sqrt{2}$

⇒ $\overline{PQ}=\sqrt{34}$



$\cos\alpha = \frac{13+13-34}{2\cdot 13} = -\frac{4}{13}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{17}}{13}$

$\triangle POQ = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot\frac{3\sqrt{17}}{13} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

$\triangle P'H_2Q = \frac{9}{2}$

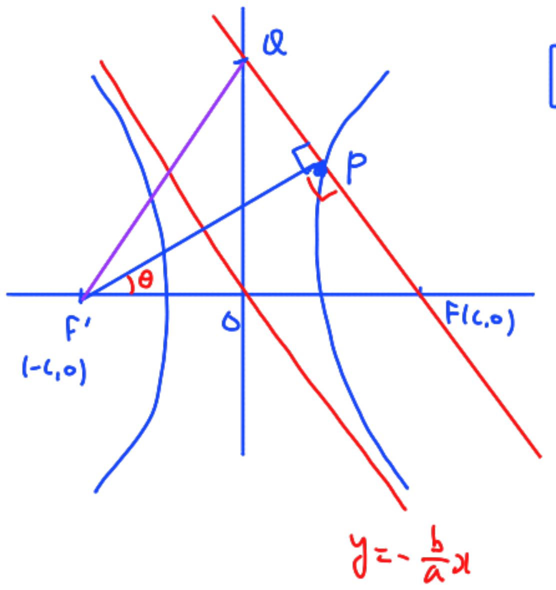
$\therefore \cos\theta = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{17}}{2}} = \frac{9}{3\sqrt{17}} = \frac{3}{17}\sqrt{17}$

단답형

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 C가 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하다. 직선 PF가 y축과 만나는 점을 Q라 할 때,

$$\angle \mathrm{QPF}' = \frac{\pi}{2}, \quad \overline{\mathrm{QF}} = 20$$

이다. 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



$\boxed{48}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2$

F'P 기울기 $=\frac{a}{b}$, $\angle PF'F=\theta$, $\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{FP}{F'P}$

$\Rightarrow \overline{F'P}=bk$, $\overline{FP}=ak$

$\triangle F'FP \Rightarrow 4c^2=b^2k^2+a^2k^2=c^2k^2$

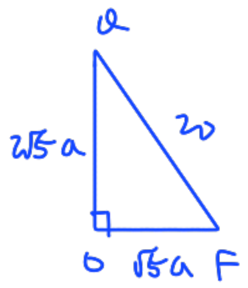
$\therefore k^2=4,\ k=2$

$F'P=2b,\ FP=2a$

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$, $2b-2a=2a$ $\quad\therefore b=2a$

$c^2=a^2+b^2=5a^2,\ c=\sqrt{5}a$

FQ기울기 : $-2 \rightarrow OQ=2OF$



$\Rightarrow 20=5a,\ a=4$
$b=8$
$c=4\sqrt{5}$

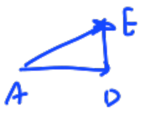
$PF=2a=8$
$QP=12$
$QP:PF=3:2$

$\therefore \triangle OPQ=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times8\sqrt{5}\times\frac{3}{5}$

$=48$

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD와

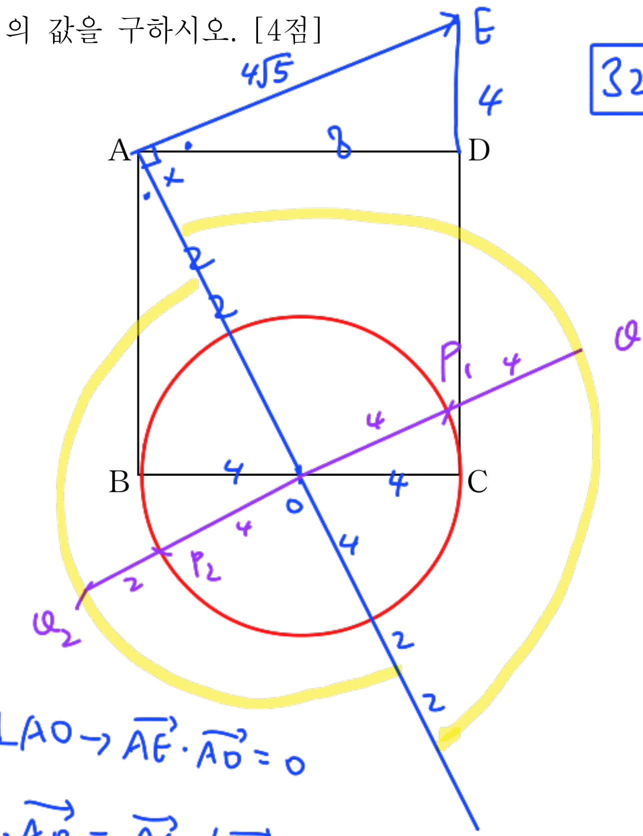
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



를 만족시키는 점 E가 있다. 선분 BC를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \geq 0$이면 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$이고, $\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$
> $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} < 0$이면 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 6\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$이다. $\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{OQ}=6\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $(M+m)^2$의 값을 구하시오. [4점]



$\boxed{320}$

$AE \perp AO \rightarrow \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AO}=0$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$

$M \Rightarrow \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{OQ_1}=4\sqrt{5}\times8\times1=32\sqrt{5}$

$m \Rightarrow \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=4\sqrt{5}\times6\times(-1)=-24\sqrt{5}$

$\therefore (M+m)^2=320$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.