2026학년도 A1 모의고사 2회 정답표

문제번호	정답	유형	배점
1	⑤	객관식	2점
2	①	객관식	2점
3	④	객관식	3점
4	④	객관식	3점
5	③	객관식	3점
6	②	객관식	3점
7	③	객관식	3점
8	①	객관식	3점
9	②	객관식	4점
10	⑤	객관식	4점
11	②	객관식	4점
12	④	객관식	4점
13	④	객관식	3점
14	⑤	객관식	3점
15	①	객관식	4점
16	7	주관식	3점
17	19	주관식	3점
18	6	주관식	3점
19	2	주관식	3점
20	108	주관식	4점
21	20	주관식	4점
22	24	주관식	4점
수학 영역(확률과 통계)			
23	②	객관식	2점
24	⑤	객관식	3점
25	③	객관식	3점
26	⑤	객관식	3점

문제번호	정답	유형	배점
27	①	객관식	3점
28	②	객관식	4점
29	25	주관식	4점
30	29	주관식	4점
수학 영역(미적분)			
23	③	객관식	2점
24	④	객관식	3점
25	①	객관식	3점
26	⑤	객관식	3점
27	②	객관식	3점
28	③	객관식	4점
29	16	주관식	4점
30	1	주관식	4점

1 문제 1번 유형: 지수법칙

$\sqrt[3]{9} \div 3^{-1/3}$의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$

② $\dfrac{1}{3}$

③ 1

④ $\sqrt{3}$

⑤ 3

정답: ⑤

설명:

1. 거듭제곱근을 유리수 지수로 변환합니다. $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = (3^2)^{1/3} = 3^{2/3}$
2. 지수법칙(나눗셈)을 적용하여 계산합니다. $3^{\frac{2}{3}} \div 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{3})} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$
3. 따라서 식의 값은 3입니다.

2 문제 2번 유형: 미분계수의 정의

함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$에 대하여, $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{h}$의 값을 구하시오.

① -12

② -10

③ -8

④ -6

⑤ -4

정답: ①

설명:

1. 주어진 극한 $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{h}$는 미분계수 $f'(2)$와 연관 짓기 위해 식을 변형해야 합니다.
2. 분모의 h를 분자의 $3h$와 일치시킵니다.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{3h} \times 3$$

3. $k = 3h$로 치환하면 $\lim_{k\to 0} \frac{f(2+k)-f(2)}{k} \times 3$ 이 되며, 이는 $f'(2) \times 3$ 과 같습니다.
4. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구합니다. $f'(x) = 3x^2 - 8x$
5. $x = 2$에서의 미분계수 $f'(2)$를 계산합니다. $f'(2) = 3(2)^2 - 8(2) = 12 - 16 = -4$
6. 최종 극한값은 $3f'(2) = 3 \times (-4) = -12$ 입니다.

3 문제 3번 유형: 등비수열

첫째항과 공비가 모두 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 가능한 공비의 값의 합은?

$$\begin{cases} (\text{가}) \quad a_1 + a_4 = 18 \\ (\text{나}) \quad a_2 + a_3 = 12 \end{cases}$$

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

정답: ④

설명:

1. 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 주어진 조건은 다음과 같습니다. (가) $a_1 + a_4 = a + ar^3 = a(1 + r^3) = 18$ (나) $a_2 + a_3 = ar + ar^2 = ar(1 + r) = 12$
2. (가) 식을 인수분해: $a(1 + r)(1 - r + r^2) = 18$.
3. (가) 식을 (나) 식으로 나눕니다. $\frac{a(1+r)(1-r+r^2)}{ar(1+r)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ $\frac{1-r+r^2}{r} = \frac{3}{2}$
4. 식을 정리하여 r에 대한 이차방정식을 만듭니다. $2(1 - r + r^2) = 3r \implies 2 - 2r + 2r^2 = 3r \implies 2r^2 - 5r + 2 = 0$
5. 인수분해하면 $(2r - 1)(r - 2) = 0$이므로, $r = 2$ 또는 $r = \frac{1}{2}$입니다.
6. 두 경우 모두 (나) 식에 대입하면 $a = 2$ (for $r = 2$) 또는 $a = 16$ (for $r = \frac{1}{2}$)으로, $a > 0$ 조건을 만족합니다.
7. 따라서 가능한 모든 공비의 합은 $2 + \frac{1}{2} = 5/2$입니다.

4 문제 4번 유형: 함수의 연속

함수 f(x)가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax-10}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

정답: ④

설명:

1. $x = 2$**에서의 연속 조건**:
함수 $f(x)$가 $x = 2$에서 연속이려면, 극한값 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$가 존재하고 그 값이 함숫값 $f(2)$와 같아야 합니다.
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax-10}{x-2} = f(2) = b$
2. **극한값 존재 조건 (미정계수 결정)**:
$x \to 2$일 때 분모가 $(x-2) \to 0$으로 수렴하므로, 극한값이 존재하기 위해서는 분자 역시 $x \to 2$일 때 0으로 수렴해야 합니다. (0/0 꼴) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-10) = 0 \implies (2)^2 + a(2) - 10 = 0 \implies 4 + 2a - 10 = 0 \implies 2a = 6 \implies a = 3$
3. **극한값 계산 (함숫값 결정)**:
$a = 3$을 원래의 극한식에 대입하여 b의 값을 구합니다.
$b = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$ 분자를 인수분해하면 $x^2+3x-10 = (x-2)(x+5)$입니다.
$b = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+5) = 2+5 = 7$
4. **최종 값 계산**:
따라서 $a = 3, b = 7$이며, $a+b = 3+7 = 10$ 입니다.

5 문제 5번 유형: 곱의 미분법

다항함수 $g(x)$와 $h(x) = x^2 - 2x + 3$의 곱으로 이루어진 함수 $f(x) = g(x)h(x)$가 있다. 함수 $y = g(x)$의 그래프 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식이 $y = 3x - 1$일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

정답: ③

설명:

1. 함수의 곱의 미분법에 따라 $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$입니다.
2. 우리가 구해야 할 값은 $f'(1) = g'(1)h(1) + g(1)h'(1)$입니다.
3. $h(x)$와 $h'(x)$의 $x = 1$에서의 값을 구합니다. $h(1) = 1^2 - 2(1) + 3 = 2$ $h'(x) = 2x - 2 \implies h'(1) = 2(1) - 2 = 0$
4. $g(x)$의 접선 조건 $y = 3x - 1$을 분석합니다. - 접점의 y좌표: $g(1) = 3(1) - 1 = 2$ 입니다. - 접선의 기울기: $g'(1) = 3$ 입니다.
5. $f'(1)$의 식에 위에서 구한 값들을 대입합니다. $f'(1) = g'(1)h(1) + g(1)h'(1) = (3)(2) + (2)(0) = 6 + 0 = 6$

6 문제 6번 유형: 삼각함수의 관계

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\frac{3}{5}$ 일 때, $\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ 의 값은? (단, $\cos\theta \neq 0$)

① $-\frac{5}{3}$
② $-\frac{3}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$
⑤ $\frac{5}{3}$

정답: ②

설명:
1. 삼각함수의 각 변환 공식에 따라 $\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos\theta$입니다.
2. 주어진 조건에서 $-\cos\theta=\frac{3}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$임을 알 수 있습니다.
3. 구하고자 하는 식의 분자를 전개합니다. $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)=1-\sin^2\theta$
4. 삼각함수 사이의 관계 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하면, $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$입니다.
5. 따라서 주어진 식은 $\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$로 간단해집니다.
6. 처음에 구한 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로, 구하는 값은 $-\frac{3}{5}$입니다.

7 문제 7번 유형: 정적분으로 정의된 함수

다항함수 $f(x)$에 대하여, $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ 가 $g(x) = x^4 - x^3 - 3x^2$ 를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

정답: ③

설명:

1. 피적분함수에 있는 x를 밖으로 빼내어 식을 전개합니다. $g(x) = \int_0^x (xf(t) - tf(t))dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$
2. 양변을 x에 대하여 미분합니다. (첫 번째 항은 곱의 미분법 적용) $g'(x) = \left(1 \cdot \int_0^x f(t)dt + x \cdot f(x)\right) - (xf(x))$ $g'(x) = \int_0^x f(t)dt$
3. 주어진 $g(x) = x^4 - x^3 - 3x^2$를 미분합니다. $g'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$
4. 따라서 $\int_0^x f(t)dt = 4x^3 - 3x^2 - 6x$ 라는 새로운 관계식을 얻습니다.
5. $f(x)$를 구하기 위해 이 관계식의 양변을 다시 한번 x에 대하여 미분합니다. $f(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 3x^2 - 6x) = 12x^2 - 6x - 6$
6. 문제에서 요구하는 $f(1)$의 값은 $f(1) = 12(1)^2 - 6(1) - 6 = 12 - 6 - 6 = 0$ 입니다.

8 문제 8번 유형: 로그의 성질

두 실수 $a = \log_2 20 - 2$, $b = \log_5 100 - 2$에 대하여, $a \times b$의 값은?

① 2

② 5/2

③ 3

④ 7/2

⑤ 4

정답: ①

설명:

1. a의 값을 계산합니다. 2를 밑이 2인 로그로 바꿉니다. $a = \log_2 20 - 2 = \log_2 20 - \log_2 2^2 = \log_2 20 - \log_2 4$ $a = \log_2\left(\frac{20}{4}\right) = \log_2 5$
2. b의 값을 계산합니다. 2를 밑이 5인 로그로 바꿉니다. $b = \log_5 100 - 2 = \log_5 100 - \log_5 5^2 = \log_5 100 - \log_5 25$ $b = \log_5\left(\frac{100}{25}\right) = \log_5 4$
3. $a \times b$의 값을 구합니다. $a \times b = (\log_2 5) \times (\log_5 4)$
4. 로그의 밑의 변환 공식을 이용합니다. $a \times b = (\log_2 5) \times \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 5}\right)$ $\log_2 5$ 항이 약분되어, $a \times b = \log_2 4 = 2$ 입니다.
5. (다른 방법) $a \times b = (\log_2 5) \times (\log_5 2^2) = (\log_2 5) \times (2\log_5 2) = 2 \times (\log_2 5 \times \log_5 2) = 2 \times 1 = 2$

9　문제 9번 유형: 정적분의 성질

삼차함수 $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$ 와 임의의 실수 k에 대하여, 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

$$\int_k^a f(x)\,dx = \int_k^0 f(x)\,dx$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

정답: ②

설명:

1. 주어진 등식 $\int_k^a f(x)\,dx = \int_k^0 f(x)\,dx$ 를 이항합니다. $\int_k^a f(x)\,dx - \int_k^0 f(x)\,dx = 0$
2. 정적분의 성질 $\int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ (즉, $\int_k^a = \int_k^0 + \int_0^a$)를 이용합니다. $\left(\int_k^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx\right) - \int_k^0 f(x)\,dx = 0$
3. 따라서 등식은 $\int_0^a f(x)\,dx = 0$ 와 같이 간단해집니다.
4. $f(x)$를 대입하여 정적분을 계산합니다. $\int_0^a (4x^3 - 12x^2 - 16x)\,dx = [x^4 - 4x^3 - 8x^2]_0^a$ $= a^4 - 4a^3 - 8a^2 = 0$
5. $a^2(a^2 - 4a - 8) = 0$ 입니다.
6. 이 방정식을 만족하는 a의 값은 $a = 0$ 또는 $a^2 - 4a - 8 = 0$ 입니다.
7. 문제에서 0이 아닌 모든 a의 값의 합을 요구하므로, 이차방정식 $a^2 - 4a - 8 = 0$ 의 두 근의 합을 구합니다.
8. 근과 계수의 관계에 의해, 두 근의 합은 $-(-4)/1 = 4$ 입니다.

10 문제 10번 유형: 삼각함수 그래프

닫힌구간 [0, 2π]에서 정의된 함수 $f(x) = a\sin(bx) - 5$는 두 자연수 a, b에 대하여 $x = \frac{5\pi}{6}$에서 최솟값 -12를 갖는다. 이 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

정답: ⑤

설명:

1. a는 자연수($a > 0$)이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a - 5$입니다.
2. 문제의 조건에서 최솟값이 -12이므로, $-a - 5 = -12$ 에서 $a = 7$을 얻습니다.
3. 또한, $x = \frac{5\pi}{6}$에서 최솟값을 가지므로, $\sin\left(b \times \frac{5\pi}{6}\right) = -1$이 성립해야 합니다.
4. 삼각방정식 $\sin\theta = -1$의 일반해는 $\theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ (단, n은 정수)입니다.
5. 따라서 $\frac{5b\pi}{6} = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ 로 놓을 수 있습니다.
6. 양변을 π로 나누고 6을 곱하면, $5b = 12n + 9$가 됩니다.
7. b는 자연수이므로, $12n + 9$는 5의 양의 배수여야 합니다. 이를 만족하는 정수 n을 찾습니다. - $n = 0$일 때, $5b = 9$ (b가 자연수가 아님) - $n = 1$일 때, $5b = 21$ (b가 자연수가 아님) - $n = 2$일 때, $5b = 33$ (b가 자연수가 아님) - $n = 3$일 때, $5b = 45 \implies b = 9$
8. b가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 9입니다.
9. 결론적으로 $a = 7$이고 b의 최솟값은 9이므로, $a + b$의 최솟값은 $7 + 9 = 16$입니다.

11 문제 11번 유형: 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가 $x(t) = t^3 + kt^2 - 5t$이다. 점 P가 $t = 1$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P의 가속도가 10이 되는 시각은? (단, k는 상수이다.)

① 1

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

정답: ②

설명:

1. 점 P의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$를 구합니다.
   $v(t) = x'(t) = 3t^2 + 2kt - 5$ $a(t) = v'(t) = 6t + 2k$
2. **점 P가** $t = 1$**에서 운동 방향을 바꾼다**는 것은 $t = 1$에서의 속도가 0임을 의미합니다. 즉, $v(1) = 0$ 입니다.
   $v(1) = 3(1)^2 + 2k(1) - 5 = 0$ $3 + 2k - 5 = 0 \implies 2k - 2 = 0 \implies k = 1$
3. 상수 $k = 1$을 가속도 함수에 대입하여 $a(t)$를 완성합니다.
   $a(t) = 6t + 2(1) = 6t + 2$
4. 가속도가 10이 되는 시각 t를 구합니다.
   $a(t) = 6t + 2 = 10 \implies 6t = 8 \implies t = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

12 문제 12번 유형: 수열의 합과 일반항

첫째항이 $a_1 = 3$인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 $b_1 = 1$인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 3(2^n - 1)$ 을 만족한다. $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 42

② 43

③ 45

④ 46

⑤ 48

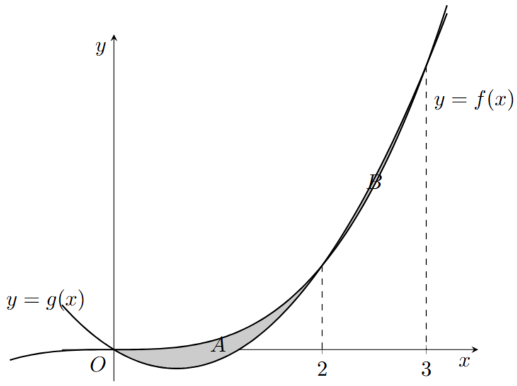
정답: ④

설명:

1. $c_n = a_n b_n$이라 하면, 주어진 식은 c_n의 제n항까지의 합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = 3(2^n - 1)$ 입니다.
2. 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 c_n을 구합니다. $n \geq 2$에 대하여, $c_n = S_n - S_{n-1} = 3(2^n - 1) - 3(2^{n-1} - 1) = 3(2^n - 2^{n-1}) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1}$
3. $n = 1$일 때, $c_1 = S_1 = 3(2^1 - 1) = 3$입니다. 위 일반항 식에 $n = 1$을 대입해도 $3 \cdot 2^0 = 3$이므로, $c_n = a_n b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$은 모든 자연수 n에 대해 성립합니다.
4. $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$인 등차수열 $(a_n = 3 + (n-1)d)$, $\{b_n\}$은 $b_1 = 1$인 등비수열 $(b_n = 1 \cdot r^{n-1})$입니다.
5. $a_n b_n = (3 + (n-1)d) \times r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ 입니다.
6. 이 식이 모든 n에 대해 성립해야 하므로, $r = 2$이고 $3 + (n-1)d = 3$ 이어야 합니다.
7. $(n-1)d = 0$이 모든 n에 대해 성립하므로, $d = 0$입니다.
8. 따라서 $a_n = 3$ (상수수열)이고, $b_n = 2^{n-1}$입니다.
9. 구하고자 하는 값은 $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k$ 입니다.
10. $\sum_{k=1}^{5} 3 = 3 \times 5 = 15$
11. $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$ (첫째항 1, 공비 2인 등비수열의 합) $= \frac{1(2^5-1)}{2-1} = 31$
12. 따라서, 구하는 값은 $15 + 31 = 46$입니다.

13 문제 13번 유형: 정적분과 넓이

삼차함수 $f(x) = x^3$이 있다. 원점을 지나는 이차함수 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선이 $y = 4x - 5$일 때, 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$는 원점 Ø를 포함하여 세 점에서 만난다. 이 교점들의 x좌표를 작은 순서대로 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_1 \le x \le x_2$ 범위에서 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, $x_2 \le x \le x_3$ 범위에서 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $A - B$의 값은?



① $\frac{5}{4}$
② $\frac{7}{4}$
③ 2
④ $\frac{9}{4}$
⑤ $\frac{11}{4}$

정답: ④

설명:

1. **이차함수 $g(x)$ 구하기**: $g(x)$는 원점을 지나므로 $g(x) = ax^2 + bx$로 놓을 수 있습니다. $g'(x) = 2ax + b$입니다.
   - 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 기울기가 4이므로, $g'(1) = 2a + b = 4$입니다.
   - 접선의 방정식은 $y - g(1) = 4(x - 1) \implies y = 4x - 4 + g(1)$입니다.
   - 이 접선이 $y = 4x - 5$와 일치하므로, $-4 + g(1) = -5$ 즉 $g(1) = -1$입니다.
   - $g(1) = a(1)^2 + b(1) = a + b = -1$입니다.
   - 연립방정식 $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a + b = -1 \end{cases}$ 을 풀면, $a = 5, b = -6$입니다. - 따라서 $g(x) = 5x^2 - 6x$입니다.

2. **교점의 x좌표 구하기**:
   $f(x) = g(x)$ 방정식을 풉니다. $x^3 = 5x^2 - 6x \implies x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ $x(x^2 - 5x + 6) = 0 \implies x(x - 2)(x - 3) = 0$ 교점의 x좌표는 $0, 2, 3$입니다. 따라서 $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$입니다.

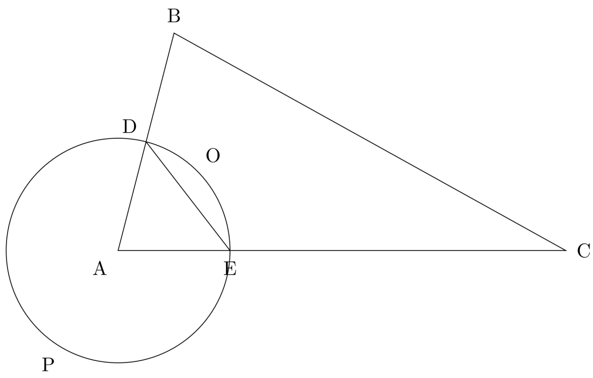
3. **넓이** A, B**와** $A - B$ **계산**:
   두 함수의 차이 함수를 $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$라 둡니다.
   - 구간 $(0, 2)$에서 $h(1) = 1 - 5 + 6 = 2 > 0$이므로, $f(x) \geq g(x)$입니다. 넓이 $A = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 h(x)dx$입니다.
   - 구간 $(2, 3)$에서 $h(2.5) < 0$이므로, $g(x) \geq f(x)$입니다.
   넓이 $B = \int_2^3 (g(x) - f(x))dx = \int_2^3 -h(x)dx$입니다.

4. $A - B$를 계산합니다. $A - B = \int_0^2 h(x)dx - \left(\int_2^3 -h(x)dx\right) = \int_0^2 h(x)dx + \int_2^3 h(x)dx$

5. 정적분의 성질에 의해 $A - B = \int_0^3 h(x)dx = \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx$ 입니다.
   $A - B = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 = \left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{5}{3}(3)^3 + 3(3)^2\right) - 0 = \frac{81}{4} - 45 + 27 = \frac{81}{4} - 18 = \frac{81-72}{4} = \frac{9}{4}$

14 문제 14번 유형: 삼각함수의 활용 (코사인법칙)

삼각형 ABC에서 점 D는 선분 AB의 중점이다. 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원 O가 선분 AC와 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비는 $1:8$이고, $\cos A = \frac{1}{4}$이다. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값이 $12\sqrt{15}+24$일 때, $\overline{BC}^2$의 값을 구하시오.



① 96

② 120

③ 150

④ 160

⑤ 192

정답: ⑤

설명:

1. **삼각형 변의 비율 관계 파악**: 원 O의 반지름 $r = \overline{AD} = \overline{AE}$입니다. 점 D는 $\overline{AB}$의 중점이므로 $r = \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$입니다.

   넓이 비: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AE}\sin A}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A} = \frac{r\cdot r}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{(\frac{1}{2}\overline{AB})^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{4}\overline{AB}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{4\overline{AC}}$

   $\frac{\overline{AB}}{4\overline{AC}} = \frac{1}{8} \implies 8\overline{AB} = 4\overline{AC} \implies \overline{AC} = 2\overline{AB}$.

2. **$\overline{BC}$를 다른 변으로 표현하기** (코사인법칙): $c = \overline{AB}$, $b = \overline{AC} = 2c$, $a = \overline{BC}$라 둡니다. $\cos A = \frac{1}{4}$을 대입합니다. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (2c)^2 + c^2 - 2(2c)(c)(\frac{1}{4}) = 4c^2 + c^2 - c^2 = 4c^2$ 따라서 $a = 2c$입니다. ($\overline{AC} = \overline{BC}$인 이등변 삼각형)

3. **넓이의 최댓값을 이용하여 c 구하기**: $\triangle PBC$의 넓이가 최대가 되는 경우는 높이가 최대일 때입니다. 높이의 최댓값 $h_{max} =$ (점 A에서 직선 BC까지의 거리 h_A)$+$(원 O의 반지름 r) 최대 넓이 $M = \frac{1}{2}\times a\times h_{max} = \frac{1}{2}a(h_A + r) = \frac{1}{2}ah_A + \frac{1}{2}ar$ $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_A$ 이므로, $M = S_{ABC} + \frac{1}{2}ar$ 입니다.

4. $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-(\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}(2c)(c)\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}c^2$. $a = 2c$이고 $r = c/2$이므로, $\frac{1}{2}ar = \frac{1}{2}(2c)(\frac{c}{2}) = \frac{c^2}{2}$. $M = \frac{\sqrt{15}}{4}c^2 + \frac{c^2}{2} = c^2\left(\frac{\sqrt{15}+2}{4}\right)$.

5. 주어진 최대 넓이가 $12\sqrt{15}+24 = 12(\sqrt{15}+2)$이므로, $c^2\left(\frac{\sqrt{15}+2}{4}\right) = 12(\sqrt{15}+2)$ $\frac{c^2}{4} = 12 \implies c^2 = 48$.

6. $\overline{BC}^2$ **계산**: 구하려는 값은 $\overline{BC}^2 = a^2$입니다. $a^2 = 4c^2$이므로, $a^2 = 4\times 48 = 192$.

15 문제 15번 유형: 미분가능성과 극값

상수 $a(a \neq 3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7, & (x \leq 0) \\ f(x), & (x > 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다. (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 함수 $g(x)$의 극값을 결정하는 과정에서, 방정식 $g'(x) = 0$은 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖고, 이 근들은 $\alpha + \beta + \gamma = -3$과 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35$를 만족시킨다. $g(-2) + g(2)$의 값은?

① 32

② 34

③ 36

④ 38

⑤ 40

정답: ①

설명: 1. **연속성 및 미분가능성 조건 분석**:
$g(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하려면 $x = 0$에서 연속이고 좌/우 미분계수가 같아야 합니다.
- 연속성: $\lim_{x \to 0-} g(x) = g(0) = 7$이고, $\lim_{x \to 0+} g(x) = f(0)$이므로, $f(0) = 7$입니다.
- 미분가능성: $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax + 15, & (x \leq 0) \\ f'(x), & (x > 0) \end{cases}$
$\lim_{x \to 0-} g'(x) = 15$이고 $\lim_{x \to 0+} g'(x) = f'(0)$이므로, $f'(0) = 15$입니다.

2. $f(x)$ **특정**:
$f(x) = kx^2 + mx + n$ (k¡0)에서 $f(0) = n = 7$이고
$f'(x) = 2kx + m$에서 $f'(0) = m = 15$입니다.
따라서 $f(x) = kx^2 + 15x + 7$ $(k < 0)$입니다.

3. **방정식** $g'(x) = 0$**의 근 분석**:
$g'(x) = 0$은 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖습니다.
- $x > 0$일 때: $g'(x) = f'(x) = 2kx + 15 = 0$에서 $x = -15/2k$입니다. $k < 0$이므로 이 근은 양수입니다. 이 근을 γ라 합시다.
- $x \leq 0$일 때: $g'(x) = 3x^2 + 2ax + 15 = 0$입니다. 이 방정식은 서로 다른 두 음의 실근(α, β)을 가져야 합니다.
- 판별식: $D/4 = a^2 - 3(15) = a^2 - 45 > 0 \implies a^2 > 45.$
- 두 근의 합: $\alpha + \beta = -2\frac{a}{3} < 0 \implies a > 0.$
- 두 근의 곱: $\alpha\beta = 15/3 = 5 > 0.$
- 따라서 $a > \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 입니다.

4. **연립방정식을 이용한 a, k 값 결정**:
- 세 근의 합: $\alpha+\beta+\gamma = (-\frac{2a}{3}) + (-\frac{15}{2k}) = -3$
- 세 근의 제곱의 합: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 35$ $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2\frac{a}{3})^2 - 2(5) = \frac{4a^2}{9} - 10$
따라서, $(\frac{4a^2}{9} - 10) + (\frac{-15}{2k})^2 = 35 \implies \frac{4a^2}{9} + \frac{225}{4k^2} = 45$

5. 첫 번째 식에서 $\gamma = -\frac{15}{2k} = \frac{2a}{3} - 3$으로 놓고, 두 번째 식에 $\frac{225}{4k^2} = (2\frac{a}{3} - 3)^2$을 대입합니다.
$\frac{4a^2}{9} + (\frac{2}{3}a - 3)^2 = 45 \implies \frac{4a^2}{9} + (\frac{4a^2}{9} - 4a + 9) = 45$
$\frac{8a^2}{9} - 4a - 36 = 0 \implies 2a^2 - 9a - 81 = 0 \implies (2a+9)(a-9) = 0$
조건 $a > 3\sqrt{5}$를 만족하는 값은 $a = 9$입니다.

6. $a = 9$를 대입하여 γ와 k를 구합니다.
$\gamma = 2(9)/3 - 3 = 6 - 3 = 3.$
$\gamma = -15/2k \implies 3 = -15/2k \implies 6k = -15 \implies k = -5/2$ ($k < 0$ 만족).

7. **함수값 계산**: $g(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 15x + 7, & (x \le 0) \\ -5/2x^2 + 15x + 7, & (x > 0) \end{cases}$
- $g(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 15(-2) + 7 = -8 + 36 - 30 + 7 = 5$ - $g(2) = -5/2(2)^2 + 15(2) + 7 = -10 + 30 + 7 = 27$ - 따라서 $g(-2) + g(2) = 5 + 27 = 32$ 입니다.

16 문제 16번 유형: 로그방정식

$\log_3(x-1) = \log_9(x+5) + \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 실수 x의 값은?

정답: 7

설명:

1. **진수 조건 확인**: 로그의 정의에 따라 진수는 양수여야 합니다.
   $x - 1 > 0 \implies x > 1$ $x + 5 > 0 \implies x > -5$ 두 조건을 동시에 만족시키는 x의 범위는 $x > 1$ 입니다.
2. **밑 변환 및 방정식 정리**: 밑을 3으로 통일합니다.
   $\log_9(x+5) = \log_{3^2}(x+5) = \frac{1}{2}\log_3(x+5)$ 주어진 방정식: $\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_3(x+5) + \frac{1}{2}$
3. 양변에 2를 곱합니다. $2\log_3(x-1) = \log_3(x+5) + 1$
4. $1 = \log_3 3$으로 바꾸고, 로그의 성질을 이용해 합칩니다.
   $\log_3((x-1)^2) = \log_3(x+5) + \log_3(3)$ $\log_3((x-1)^2) = \log_3(3(x+5))$
5. **이차방정식 풀이**: 밑이 같으므로 진수를 비교합니다.
   $(x-1)^2 = 3(x+5)$ $x^2 - 2x + 1 = 3x + 15$ $x^2 - 5x - 14 = 0$ $(x-7)(x+2) = 0$ 따라서, $x = 7$ 또는 $x = -2$ 입니다.
6. **무연근 확인**: 구한 해를 진수 조건 $x > 1$과 비교합니다.
   $x = 7$은 $x > 1$을 만족시키므로 유효한 해입니다. $x = -2$는 $x > 1$을 만족시키지 않으므로 무연근입니다.
7. 따라서, 실수 x의 값은 7입니다.

17 문제 17번 유형: 부정적분

다항함수 $F(x)$에 대하여, 그 도함수 $F'(x)$가 등식 $\frac{d}{dx}F(x) - 2x = 3x^2 + 1$ 을 만족시킨다. $F(0) = 5$일 때 $F(2)$의 값은?

정답: 19

설명:

1. 주어진 등식에서 $\frac{d}{dx}F(x)$는 $F'(x)$를 의미합니다.
   $F'(x) - 2x = 3x^2 + 1$
2. $F'(x)$에 대하여 식을 정리하면 $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 입니다.
3. $F(x)$를 구하기 위해 $F'(x)$의 부정적분을 계산합니다. $F(x) = \int(3x^2 + 2x + 1)dx = x^3 + x^2 + x + C$ (단, C는 적분상수)
4. 주어진 조건 $F(0) = 5$를 이용하여 적분상수 C를 구합니다.
   $F(0) = (0)^3 + (0)^2 + 0 + C = C$ 이므로, $C = 5$ 입니다.
5. 함수 $F(x)$는 $F(x) = x^3 + x^2 + x + 5$ 로 확정됩니다.
6. $F(2)$의 값은 $F(2) = (2)^3 + (2)^2 + 2 + 5 = 8 + 4 + 2 + 5 = 19$ 입니다.

18 문제 18번 유형: 수열의 합 (주기성)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+3} = 5$ 를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{12} \log_5(a_k)$의 값을 구하시오.

정답: 6

설명:

1. 구하고자 하는 값은 $\sum_{k=1}^{12} \log_5(a_k)$ 입니다.
2. $b_k = \log_5(a_k)$라고 치환하면, 구하는 값은 $\sum_{k=1}^{12} b_k$가 됩니다.
3. 주어진 점화식 $a_n a_{n+3} = 5$의 양변에 밑이 5인 로그를 취합니다. $\log_5(a_n a_{n+3}) = \log_5(5)$ $\log_5(a_n) + \log_5(a_{n+3}) = 1$
4. 치환한 b_k를 이용하면, $b_n + b_{n+3} = 1$ 이라는 새로운 점화식을 얻습니다.
5. 이 점화식의 주기성을 파악합니다. $b_{n+3} = 1 - b_n$ $b_{n+6} = 1 - b_{n+3} = 1 - (1 - b_n) = b_n$ 따라서 수열 $\{b_n\}$은 주기가 6인 주기수열입니다.
6. 주기가 6이므로, 첫 6개 항의 합 S_6을 계산합니다. $S_6 = \sum_{k=1}^{6} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$ $S_6 = (b_1 + b_4) + (b_2 + b_5) + (b_3 + b_6)$
7. $b_n + b_{n+3} = 1$이므로, $b_1 + b_4 = 1, b_2 + b_5 = 1, b_3 + b_6 = 1$ 입니다. $S_6 = 1 + 1 + 1 = 3$ 입니다.
8. 구해야 할 값은 $\sum_{k=1}^{12} b_k$ 입니다. $\sum_{k=1}^{12} b_k = \sum_{k=1}^{6} b_k + \sum_{k=7}^{12} b_k$
9. 주기성에 의해 $\sum_{k=7}^{12} b_k = \sum_{k=1}^{6} b_k = 3$ 입니다.
10. 따라서, 구하는 총합은 $3 + 3 = 6$ 입니다.

19 문제 19번 유형: 극댓값과 극솟값

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 양수 a가 $f'(x) = 4x(x-a)(x-2a)$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차가 16일 때, a의 값은?

정답: 2

설명:

1. $f(x)$는 최고차항 계수가 1인 사차함수이므로, $f'(x)$는 최고차항 계수가 4인 삼차함수입니다.
2. 주어진 $f'(x) = 4x(x-a)(x-2a)$는 $x = 0, a, 2a$에서 $f'(x) = 0$이 됨을 의미합니다.
3. a가 양수이므로 $0 < a < 2a$입니다. $f(x)$는 최고차항 계수가 양수인 4차 함수 (W 모양)입니다.
4. 따라서 $f(x)$는 $x = a$에서 극댓값을, $x = 0$과 $x = 2a$에서 극솟값을 갖습니다.
5. $f'(x) = 4x(x^2 - 3ax + 2a^2) = 4x^3 - 12ax^2 + 8a^2x$
6. $f(x)$를 구하기 위해 $f'(x)$를 적분합니다. $f(x) = \int(4x^3 - 12ax^2 + 8a^2x)dx = x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 + C$
7. 극댓값과 극솟값을 계산합니다. - 극댓값: $f(a) = a^4 - 4a(a^3) + 4a^2(a^2) + C = a^4 + C$ - 극솟값 1: $f(0) = C$ - 극솟값 2: $f(2a) = (2a)^4 - 4a(2a)^3 + 4a^2(2a)^2 + C = 16a^4 - 32a^4 + 16a^4 + C = C$
8. 두 극솟값은 C로 같습니다.
9. 극댓값과 극솟값의 차는 $f(a) - f(0) = (a^4 + C) - C = a^4$입니다.
10. 문제에서 이 차가 16이라고 주어졌으므로, $a^4 = 16$입니다.
11. a는 양수이므로 $a = 2$입니다.

20 문제 20번 유형: 함수 방정식

곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x > k$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}$ 이고 $f(f(x)) = 9x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^2 \cdot 2^{2k}}\right)$의 값을 구하시오.

정답: 108

설명:

1. **k의 관계식 분석**: 점 (k, k)는 두 그래프의 교점이므로 $k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4}$를 만족합니다. $k = 2^{-(k-4)} = 2^{4-k}$ 양변에 2^k를 곱하면 $k \cdot 2^k = 2^{4-k} \cdot 2^k = 2^4 = 16$이라는 핵심 관계식을 얻습니다.
2. (참고: $x = 2$일 때 $y = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$, $x = 3$일 때 $y = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$. $y = x$와 비교하면 $2 < k < 3$임을 알 수 있습니다.)
3. **함숫값의 입력 단순화**: 구해야 할 값은 $f\left(\frac{1}{k^2 \cdot 2^{2k}}\right)$입니다. 입력값 $A = \frac{1}{k^2 \cdot 2^{2k}} = \frac{1}{(k \cdot 2^k)^2}$ $k \cdot 2^k = 16$을 대입하면, $A = \frac{1}{16^2} = \frac{1}{(2^4)^2} = \frac{1}{2^8} = 2^{-8}$입니다. 따라서 우리는 $f(2^{-8})$의 값을 구하면 됩니다.
4. **함수 방정식 활용**: k는 2와 3 사이에 있으므로, 2^{-8}은 k보다 작습니다. ($2^{-8} < 1 < k$) $f(2^{-8})$의 값을 직접 구할 수 없으므로, $f(x_0) = 2^{-8}$을 만족하는 $x_0 > k$를 찾습니다.
5. $x_0 > k$일 때, $f(x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0-4} = 2^{-(x_0-4)}$입니다. $2^{-(x_0-4)} = 2^{-8} \implies -(x_0 - 4) = -8 \implies x_0 - 4 = 8 \implies x_0 = 12$
6. **조건 검증 및 최종 계산**: $x_0 = 12$는 $x > k$ $(2 < k < 3)$ 조건을 만족합니다. 따라서 $x_0 = 12$에 대해 함수 방정식 $f(f(x)) = 9x$를 적용할 수 있습니다. $f(f(12)) = 9 \times 12 = 108$ $f(12) = 2^{-8}$이므로, $f(f(12)) = f(2^{-8}) = 108$
7. 따라서 구하는 값은 108입니다.

21 문제 21번 유형: 함수의 극한과 근의 추론

두 정수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 16$ 이 있다. 모든 실수 α에 대하여, $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(3x+2)}{f(x)}$ 의 극한값이 존재할 때, $f(1)$의 최솟값은?

정답: 20

설명:

1. **핵심 조건 분석**: 극한값이 모든 실수 α에 대해 존재해야 합니다. 만약 어떤 α에 대해 분모 $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha) = 0$ 이라면, 극한값이 존재하기 위해서는 분자 $\lim_{x \to \alpha} f(3x+2) = f(3\alpha+2) = 0$ 이어야 합니다.
2. 따라서, 이 문제는 "α가 함수 $f(x)$의 근이면, $3\alpha + 2$도 함수 $f(x)$의 근이다" 라는 조건을 의미합니다.
3. **근 추론**: $f(x)$는 삼차함수이므로 반드시 하나 이상의 실근 α를 가집니다. 만약 α가 근이면 $\alpha_1 = 3\alpha+2$도 근입니다. 그러면 $\alpha_2 = 3\alpha_1+2 = 3(3\alpha+2)+2 = 9\alpha+8$도 근이 됩니다.
4. 이 과정이 무한히 반복되면 무한히 많은 근이 생성되는데, $f(x)$는 3차 함수이므로 최대 3개의 근만 가질 수 있습니다.
5. 이 모순을 피하는 유일한 방법은 $\alpha = 3\alpha + 2$ 인 경우 뿐입니다. $-2\alpha = 2 \implies \alpha = -1$.
6. (엄밀하게) 만약 $\alpha > -1$인 근이 존재하면 $3\alpha+2 > \alpha$가 되어 무한히 많은 근이 생겨 모순. 만약 $\alpha < -1$인 근이 존재하면 $3\alpha+2 < \alpha$가 되어 무한히 많은 근이 생겨 모순.
7. 따라서 $f(x)$가 가지는 유일한 실근은 $x = -1$ 이어야 합니다.
8. **계수 결정**: $f(-1) = 0$이어야 합니다. $f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 16 = -1 + a - b + 16 = 0 \implies b = a + 15$.
9. $f(x)$는 $(x+1)$을 인수로 가지므로 인수분해하면, $f(x) = (x+1)(x^2+(a-1)x+16)$ 입니다.
10. $f(x)$가 $x = -1$ 외의 실근을 갖지 않으려면, 이차방정식 $Q(x) = x^2+(a-1)x+16 = 0$ 은 실근을 갖지 않아야 합니다. (만약 $x = -16$과 같은 다른 근 β가 존재하면 $3\beta + 2$도 근이어야 하므로 모순).
11. $Q(x)$의 판별식 $D = (a-1)^2 - 4(1)(16) < 0$ 이어야 합니다. $(a-1)^2 - 64 < 0 \implies (a-1)^2 < 64$ $-8 < a-1 < 8 \implies -7 < a < 9$.
12. **최솟값 계산**: 구하려는 값은 $f(1) = 1+a+b+16 = a+b+17$ 입니다. $b = a+15$를 대입하면 $f(1) = a + (a+15) + 17 = 2a + 32$ 입니다.
13. a는 정수이고 $-7 < a < 9$ 이므로, a의 최솟값은 -6 입니다.
14. 따라서 $f(1)$의 최솟값은 $2(-6) + 32 = -12 + 32 = 20$ 입니다.

22 문제 22번 유형: 수열의 귀납적 정의

모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$
(나) $a_m + a_{m+2} = 0$인 자연수 m의 최솟값은 2이다.

정답: 24

설명:

1. 조건 (나)에서 $m = 2$가 최솟값이므로, $a_2 + a_4 = 0$ 이고 $a_1 + a_3 \neq 0$ 입니다.
2. $a_2 = k$라 가정하고 k의 값을 먼저 찾습니다.
3. $a_2 = k$**가 홀수인 경우**: $a_3 = a_2 + 3 = k + 3$ (짝수) $a_4 = -a_3/2 = -(k+3)/2$ $a_2 + a_4 = 0 \implies k - (k+3)/2 = 0 \implies 2k - k - 3 = 0 \implies k = 3$. ($k = 3$은 홀수이므로 가정을 만족. $a_2 = 3$)
4. $a_2 = k$**가 짝수인 경우**:
   $a_3 = -\frac{a_2}{2} = -\frac{k}{2}$

   - $a_3 = -\frac{k}{2}$**가 홀수인 경우**:
   $a_4 = a_3 + 3 = -\frac{k}{2} + 3$ $a_2 + a_4 = 0 \implies k + (-\frac{k}{2} + 3) = 0 \implies \frac{k}{2} + 3 = 0 \implies k = -6$.
   (이때 $a_3 = -\frac{(-6)}{2} = 3$ (홀수), $k = -6$ (짝수)이므로 가정을 만족. $a_2 = -6$)

   - $a_3 = -\frac{k}{2}$**가 짝수인 경우**:
   $a_4 = -a_3/2 = -(-\frac{k}{2})/2 = k/4$ $a_2 + a_4 = 0 \implies k + k/4 = 0 \implies 5k/4 = 0 \implies k = 0$.
   (이때 $a_3 = -0/2 = 0$ (짝수), $k = 0$ (짝수)이므로 가정을 만족. $a_2 = 0$)

5. a_2의 후보는 $3, -6, 0$입니다. 이제 a_1을 역추적하고 $a_1 + a_3 \neq 0$ 조건을 확인합니다.

6. **Case Ⅰ:** $a_2 = 3$
   $a_3 = 6$입니다.
   - a_1이 홀수: $a_2 = a_1 + 3 \implies 3 = a_1 + 3 \implies a_1 = 0$ (모순: a_1은 홀수여야 함)
   - a_1이 짝수: $a_2 = -\frac{a_1}{2} \implies 3 = -\frac{a_1}{2} \implies a_1 = -6$.
   조건 확인: $a_1 + a_3 = -6 + 6 = 0$ ($m = 1$ 성립). m의 최소값이 2라는 조건에 위배됩니다. (탈락)

7. **Case Ⅱ:** $a_2 = -6$
   $a_3 = 3$입니다.
   - a_1이 홀수: $a_2 = a_1 + 3 \implies -6 = a_1 + 3 \implies a_1 = -9$. (가정 만족) 조건 확인: $a_1 + a_3 = -9 + 3 = -6 \neq 0$. (통과) - a_1이 짝수: $a_2 = -\frac{a_1}{2} \implies -6 = -\frac{a_1}{2} \implies a_1 = 12$. (가정 만족) 조건 확인: $a_1 + a_3 = 12 + 3 = 15 \neq 0$. (통과)

8. **Case Ⅲ:** $a_2 = 0$
   $a_3 = 0$입니다.
   - a_1이 홀수: $a_2 = a_1 + 3 \implies 0 = a_1 + 3 \implies a_1 = -3$. (가정 만족) 조건 확인: $a_1 + a_3 = -3 + 0 = -3 \neq 0$. (통과) - a_1이 짝수: $a_2 = -\frac{a_1}{2} \implies 0 = -\frac{a_1}{2} \implies a_1 = 0$. 조건 확인: $a_1 + a_3 = 0 + 0 = 0$ ($m = 1$ 성립). m의 최소값이 2라는 조건에 위배됩니다. (탈락)
9. 가능한 a_1의 값은 $-9, 12, -3$입니다.
10. 따라서 모든 $|a_1|$의 값의 합은 $|-9| + |12| + |-3| = 9 + 12 + 3 = 24$입니다.

1 미적분 23번 유형: 삼각함수의 극한

$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

정답: ③

설명: 1. (방법 1: 기본 공식 활용) 핵심 공식 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$을 활용합니다.

2. 주어진 식을 변형합니다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} 3 \times \frac{x^2}{1 - \cos x} = 3 \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2}}$$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 이므로, 극한값은 다음과 같습니다.

$$3 \times \frac{1}{1/2} = 3 \times 2 = 6$$

4. (방법 2: 켤레식 곱하기) 분자와 분모에 $(1 + \cos x)$를 곱합니다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

5. 식을 분리하여 극한값을 계산합니다.

$$\lim_{x \to 0} 3 \times \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \times (1 + \cos x)$$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ 이고 $\lim_{x \to 0}(1 + \cos x) = 2$ 이므로,

$$3 \times 1^2 \times 2 = 6$$

2 미적분 24번 유형: 정적분 (피적분함수 변형)

$\int_0^2 \frac{x^3+8}{x+2}dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{16}{3}$
② $\frac{17}{3}$
③ 6
④ $\frac{20}{3}$
⑤ $\frac{22}{3}$

정답: ④

설명:
1. 피적분함수의 분자를 인수분해하여 약분합니다.
2. 세제곱의 합 공식 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용합니다.

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$$

3. 따라서 피적분함수는 다음과 같이 간단해집니다.

$$\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=x^2-2x+4$$

4. 주어진 정적분은 다항함수의 정적분으로 바뀝니다.

$$\int_0^2 (x^2-2x+4)dx$$

5. 정적분의 기본정리에 따라 계산합니다.

$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^2=\left(\frac{1}{3}(2)^3-(2)^2+4(2)\right)-(0)$$

$$=\frac{8}{3}-4+8=\frac{8}{3}+4=\frac{8}{3}+\frac{12}{3}=\frac{20}{3}$$

3 미적분 25번 유형: 수열의 극한 (부정형)

양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n^2+5n} = 2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n^2+3n} - a_n)$ 의 값은?

① $\frac{3}{8}$
② $\frac{3}{4}$
③ 1
④ $\frac{3}{2}$
⑤ 2

정답: ①

설명:

1. **주어진 조건 분석**: $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n^2+5n} = 2$는 ∞/∞ 꼴입니다.
2. 극한값이 0이 아닌 상수(2)로 수렴하고 분모가 n에 대한 2차식이므로, 분자 na_n 역시 2차식이어야 합니다.
3. 최고차항의 계수비가 2가 되어야 하므로, $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n^2} = 2$ 입니다.
4. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n} = 2$, 즉 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 4$임을 추론할 수 있습니다.
5. **구하고자 하는 값 분석**: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n^2+3n} - a_n)$은 $\infty - \infty$ 꼴의 부정형입니다.
6. 켤레식을 곱하여 유리화합니다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{a_n^2+3n} - a_n)(\sqrt{a_n^2+3n} + a_n)}{\sqrt{a_n^2+3n} + a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n^2+3n) - a_n^2}{\sqrt{a_n^2+3n} + a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{a_n^2+3n} + a_n}$$

7. **극한값 도출**: ∞/∞ 꼴이 되었으므로, 분모와 분자를 n으로 나눕니다.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n/n}{\frac{\sqrt{a_n^2+3n}}{n} + \frac{a_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{a_n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2}} + \frac{a_n}{n}}$$

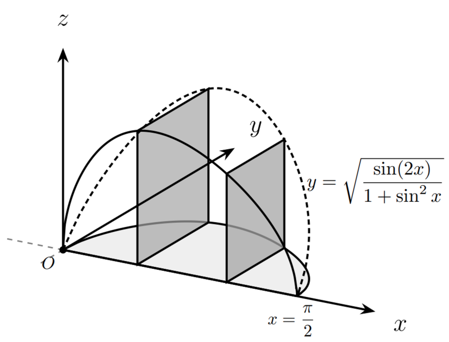
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 + \frac{3}{n}} + \frac{a_n}{n}}$$

8. 1단계에서 구한 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 4$와 $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$을 대입합니다.

$$\frac{3}{\sqrt{4^2+0}+4} = \frac{3}{\sqrt{16}+4} = \frac{3}{4+4} = \frac{3}{8}$$

4 미적분 26번 유형: 정적분의 활용 (부피)

그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\dfrac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}}$와 x축 및 두 직선 $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형의 부피를 구하기 위해 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$

② $\frac{ln(\sqrt{2})}{4}$

③ $\ln(\sqrt{2})$

④ $\ln(\frac{3}{2})$

⑤ $\ln(2)$

정답: ⑤

설명:
1. 입체도형의 부피 V는 x축에 수직인 단면의 넓이를 $S(x)$라 할 때, $V = \int_0^{\pi/2} S(x)dx$로 구할 수 있다.
2. 단면이 한 변의 길이가 y인 정사각형이므로, 단면적 $S(x)$는 다음과 같다.
$$S(x) = y^2 = \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}$$
3. 따라서 부피 $V = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}dx$ 이다.
4. 치환적분법을 이용하기 위해 $t = 1 + \sin^2 x$로 놓는다.
5. 양변을 미분하면 $dt = 2\sin x \cos x dx = \sin(2x)dx$가 된다.
6. 적분 구간을 t에 대해 바꿔준다.
   - $x = 0$일 때 $t = 1 + \sin^2(0) = 1$
   - $x = \pi/2$일 때 $t = 1 + \sin^2(\pi/2) = 1 + 1^2 = 2$

7. 적분은 다음과 같이 변환된다.

$$V = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

5 미적분 27번 유형: 역함수 미분법

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = f(\ln x) - \ln x$ 라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(e, g(e))$에서의 접선이 $y = -1$이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(7)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① $\dfrac{e^3}{24}$

② $\dfrac{e^3}{12}$

③ $\dfrac{e^2}{6}$

④ $\dfrac{e^3}{6}$

⑤ $\dfrac{e^2}{3}$

정답: ②

설명:

1. 접선 조건에서 $g(e) = -1$이고 $g'(e) = 0$입니다.
2. $g(e) = f(\ln e) - \ln e = f(1) - 1 = -1$ 이므로, $f(1) = 0$입니다.
3. $g(x)$를 미분하면 $g'(x) = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(f'(\ln x) - 1)$ 입니다.
4. $g'(e) = \frac{1}{e}(f'(\ln e) - 1) = \frac{1}{e}(f'(1) - 1) = 0$ 이므로, $f'(1) = 1$입니다.
5. $g(x)$가 역함수를 가지려면 $g'(x)$의 부호가 변하지 않아야 합니다. $x > 0$에서 $\frac{1}{x} > 0$이므로, $f'(\ln x) - 1$의 부호가 변하지 않아야 합니다.
6. $t = \ln x$로 치환하면 t는 모든 실수 값을 가지며, $f'(t) - 1$은 모든 실수 t에 대해 항상 0 이상이거나 항상 0 이하여야 합니다.
7. $f(x)$는 최고차항 계수가 1인 3차 함수이므로 $f'(t)$는 최고차항 계수가 3인 2차 함수입니다. $f'(t) - 1$ 역시 2차 함수입니다.
8. 2차 함수 $f'(t) - 1$이 t에 대해 항상 ≥ 0 이거나 ≤ 0 이어야 하는데(판별식 $D \leq 0$), 4단계에서 $f'(1) - 1 = 0$임을 알았으므로, 이 2차 함수는 $t = 1$에서 t축에 접해야 합니다.
9. 따라서 $f'(t) - 1$은 $3(t-1)^2$ 형태여야 합니다.

$$f'(t) - 1 = 3(t-1)^2 = 3t^2 - 6t + 3$$

10. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ 입니다.
11. $f(x) = \int(3x^2 - 6x + 4)dx = x^3 - 3x^2 + 4x + C$ 입니다. $f(1) = 0$이므로 $1 - 3 + 4 + C = 0 \implies C = -2$.
12. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ 입니다.
13. 역함수 미분법에 의해 $h'(7) = \frac{1}{g'(x_0)}$이며, $g(x_0) = 7$을 만족하는 x_0을 찾아야 합니다.

14. $g(x_0) = f(\ln x_0) - \ln x_0 = 7$입니다. $t_0 = \ln x_0$라 하면 $f(t_0) - t_0 = 7$입니다.

$$(t_0^3 - 3t_0^2 + 4t_0 - 2) - t_0 = 7 \implies t_0^3 - 3t_0^2 + 3t_0 - 1 = 8$$

$$(t_0 - 1)^3 = 8 \implies t_0 - 1 = 2 \implies t_0 = 3$$

15. $\ln x_0 = 3$ 이므로 $x_0 = e^3$입니다.

16. $g'(x_0) = g'(e^3)$의 값을 계산합니다.

$$g'(x) = \frac{1}{x}(f'(\ln x) - 1) = \frac{1}{x}(3(\ln x - 1)^2)$$

$$g'(e^3) = \frac{1}{e^3}(3(\ln e^3 - 1)^2) = \frac{1}{e^3}(3(3-1)^2) = \frac{12}{e^3}$$

17. $h'(7) = \dfrac{1}{g'(e^3)} = \dfrac{1}{12/e^3} = \dfrac{e^3}{12}$ 입니다.

6 미적분 28번 유형: 정적분으로 정의된 함수와 미분

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x) = 3x\ln(x)$이다. 양수 t에 대하여, $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y = L(x)$라 할 때, 곡선 $y = f(x)$, 직선 $y = L(x)$, 그리고 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하면, $g(1) + g'(1)$의 값은?

① $-\dfrac{13}{6}$

② -2

③ $-\dfrac{11}{6}$

④ $-\dfrac{5}{3}$

⑤ $-\dfrac{3}{2}$

정답: ③

설명:

1. 접선의 방정식 $L(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$입니다.
2. 넓이 $g(t)$는 $g(t) = \int_0^t (L(x) - f(x))dx = \int_0^t (f'(t)(x-t) + f(t) - f(x))dx$ 입니다.
3. $g'(t)$ **계산**:
$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t (f'(t)(x-t) + f(t) - f(x))dx$$
$$= (f'(t)(t-t) + f(t) - f(t)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(f'(t)(x-t) + f(t) - f(x))dx$$
4. 피적분함수의 t에 대한 편미분은 $\frac{\partial}{\partial t}(f'(t)(x-t) + f(t)) = f''(t)(x-t) + f'(t)(-1) + f'(t) = f''(t)(x-t)$ 입니다.
5. 따라서 $g'(t) = \int_0^t f''(t)(x-t)dx = f''(t)\left[\frac{1}{2}x^2 - tx\right]_0^t = f''(t)(\frac{1}{2}t^2 - t^2) = -\frac{1}{2}t^2 f''(t)$ 입니다.
6. $f'(x) = 3x\ln(x)$이므로, $f''(x) = 3\ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3\ln(x) + 3$ 입니다.
7. $t = 1$일 때, $f''(1) = 3\ln(1) + 3 = 3$ 입니다.
8. $g'(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 f''(1) = -\frac{3}{2}$ 입니다.
9. $g(1)$ **계산**: $t = 1$일 때, $f'(1) = 3(1)\ln(1) = 0$ 입니다.
10. $f'(1) = 0$이므로 접선의 방정식은 $L(x) = f(1)$이 됩니다.
11. $g(1) = \int_0^1 (f(1) - f(x))dx = [f(1)x]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx$ 입니다.
12. $\int_0^1 f(x)dx$를 부분적분($u = f(x), v' = 1$)하면, $[xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx$ 입니다.
13. $g(1) = f(1) - \left(f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx\right) = \int_0^1 xf'(x)dx$ 입니다.
14. $f'(x)$를 대입하여 $g(1)$을 계산합니다. $g(1) = \int_0^1 x(3x\ln x)dx = \int_0^1 3x^2 \ln x dx$.

15. 다시 부분적분($u = \ln x, v' = 3x^2$)합니다.

$$g(1) = \left[x^3 \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (0 - 0) - \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

16. **최종 값 계산**: $g(1) + g'(1) = -\frac{1}{3} + (-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{11}{6}$.

7 미적분 29번 유형: 등비급수의 응용 (복합 추론)

등비수열 $\{a_n\}$에 대한 두 등비급수의 합이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n) = 8, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n) = 16$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times a_{m+k}\right) < -\frac{1}{100}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은?

정답: 16

설명: 1. **1단계: 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비 구하기**
주어진 두 등비급수 식은 다음과 같습니다.

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n) = 8$$
$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n) = 16$$

두 식을 더하면 $2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = 24$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = 12$ 입니다.
(1)에서 (2)를 빼면 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n = -8$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = -4$ 입니다.
급수 $\sum a_n$이 수렴하고 그 합이 0이 아니며, $\sum |a_n|$의 값과 다르므로 공비 r은 음수여야 합니다. $(0 < |r| < 1)$
첫째항을 a라 할 때, a_n은 양수와 음수를 오가며 나타납니다.
만약 $a > 0, r < 0$ 이면, 홀수항은 양수, 짝수항은 음수입니다. 이 경우 $\sum a_n > 0$ 이 되어 $\sum a_n = -4$에 모순입니다.
따라서 $a < 0, r < 0$ 이어야 합니다.
이 경우, 홀수항$(a_1, a_3, \ldots)$은 음수, 짝수항$(a_2, a_4, \ldots)$은 양수가 됩니다.
이를 이용하여 주어진 식을 다시 분석합니다.
$|a_n| + a_n$은 $a_n > 0$ (n이 짝수)일 때 $2a_n$, $a_n < 0$ (n이 홀수)일 때 0 입니다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n) = \sum_{k=1}^{\infty}2a_{2k} = 2(a_2+a_4+\ldots) = 2\times\frac{ar}{1-r^2} = 8 \implies \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

$|a_n| - a_n$은 $a_n > 0$ (n이 짝수)일 때 0, $a_n < 0$ (n이 홀수)일 때 $-2a_n$ 입니다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n) = \sum_{k=1}^{\infty}-2a_{2k-1} = -2(a_1+a_3+\ldots) = -2\times\frac{a}{1-r^2} = 16 \implies \frac{a}{1-r^2} = -8$$

이제 두 식을 연립하여 a와 r을 구합니다.

$$\frac{ar/(1-r^2)}{a/(1-r^2)} = \frac{4}{-8} \implies r = -\frac{1}{2}$$

$$a = -8(1-r^2) = -8\left(1-\frac{1}{4}\right) = -8 \times \frac{3}{4} = -6$$

따라서 일반항은 $a_n = -6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 입니다.

2. **2단계: 주기성을 갖는 급수의 합 S_m 계산하기**
   수열 $\{c_k\}$를 $c_k = \sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$라 하고 항을 계산합니다.

$$c_1 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$

$$c_2 = \sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$

$$c_3 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$c_4 = \sqrt{2}\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

   수열 $\{c_k\}$는 주기가 4이고 $(-1,-1,1,1)$이 반복됩니다.

   $S_m = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k a_{m+k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_{m+k}$

   $S_m = (-a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4}) + (-a_{m+5} - a_{m+6} + a_{m+7} + a_{m+8}) + \dots$

   이는 첫째항이 $G_1 = -a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4}$ 이고 공비가 r^4인 등비급수입니다.

   $G_1 = -ar^m - ar^{m+1} + ar^{m+2} + ar^{m+3} = -ar^m(1+r-r^2-r^3) = -ar^m(1+r)(1-r^2)$

$$S_m = \frac{G_1}{1-r^4} = \frac{-ar^m(1+r)(1-r^2)}{(1-r^2)(1+r^2)} = \frac{-ar^m(1+r)}{1+r^2}$$

   $a=-6, r=-\dfrac{1}{2}$를 대입합니다.

$$S_m = \frac{-(-6)(-\frac{1}{2})^m(1-\frac{1}{2})}{1+(-\frac{1}{2})^2} = \frac{6(-\frac{1}{2})^m(\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3(-\frac{1}{2})^m}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

3. **3단계: 부등식 풀기**
   주어진 부등식은 $S_m < -\frac{1}{100}$ 입니다.

$$\frac{12}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^m < -\frac{1}{100}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^m < -\frac{1}{100} \times \frac{5}{12} = -\frac{5}{1200} = -\frac{1}{240}$$

(i) m이 짝수일 때: $(-\frac{1}{2})^m > 0$ 이므로, (양수) ¡ (음수) 형태가 되어 부등식은 성립하지 않습니다.
(ii) m이 홀수일 때: $(-\frac{1}{2})^m = -(\frac{1}{2})^m$ 입니다.

$$-(\frac{1}{2})^m < -\frac{1}{240} \implies (\frac{1}{2})^m > \frac{1}{240} \implies 2^m < 240$$

이를 만족하는 홀수 m을 찾습니다.
$2^1 = 2, 2^3 = 8, 2^5 = 32, 2^7 = 128$. $(2^9 = 512 > 240)$
따라서 가능한 자연수 m은 $1, 3, 5, 7$ 입니다.
모든 자연수 m의 값의 합은 $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ 입니다.

8 미적분 30번 유형: 함수의 극대/극소와 미분

양수 a와 상수 b에 대하여 함수

$$f(x) = e^{ax+b+\cos x} - (ax + b + \cos x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\pi/2) = 1$

(나) 함수 $f(x)$는 $x = \pi$에서 함수의 극대와 극소 중 하나인 극값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극소인 α의 값 중 열린구간 $(0, 2\pi)$에 속하는 모든 값의 개수를 n이라 할 때, $n + b$의 값은?

정답: 1

설명:

1. **1. 미정계수 a, b 결정**

   함수 $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$ 꼴로 생각할 수 있습니다. (단, $g(x) = ax + b + \cos x$)

   (가) 조건에서 $f(\pi/2) = e^{a\pi/2+b+\cos(\pi/2)} - (a\pi/2 + b + \cos(\pi/2)) = e^{a\pi/2+b} - (a\pi/2 + b) = 1$입니다.

   $h(Y) = e^Y - Y$라 하면, $h'(Y) = e^Y - 1$입니다. $Y = 0$에서 $h'(Y) = 0$이고, $Y > 0$에서 $h'(Y) > 0$, $Y < 0$에서 $h'(Y) < 0$이므로 $h(Y)$는 $Y = 0$에서 최솟값 $h(0) = e^0 - 0 = 1$을 갖습니다.

   따라서 방정식 $h(Y) = 1$의 유일한 해는 $Y = 0$입니다.

   그러므로 $a\pi/2 + b = 0$ 이어야 합니다. $\cdots$ (ㄱ)

   (나) 조건에서 $f(x)$는 $x = \pi$에서 극값을 가집니다. $f'(x) = e^{ax+b+\cos x}(a - \sin x) - (a - \sin x) = (e^{ax+b+\cos x} - 1)(a - \sin x)$입니다.

   $f'(\pi) = 0$이므로 $(e^{a\pi+b+\cos\pi} - 1)(a - \sin\pi) = 0$입니다.

   $(e^{a\pi+b-1} - 1)(a) = 0$ 입니다. $a > 0$이므로, $e^{a\pi+b-1} - 1 = 0$ 이어야 하고, 이는 $a\pi + b - 1 = 0$임을 의미합니다. $\cdots$ (ㄴ)

   (ㄱ)과 (ㄴ)을 연립하여 a, b를 구합니다.

   (ㄱ)에서 $b = -a\pi/2$ 이므로, 이를 (ㄴ)에 대입하면 $a\pi - a\pi/2 - 1 = 0 \implies a\pi/2 = 1 \implies a = 2/\pi$ 입니다.

   $b = -(2/\pi)\pi/2 = -1$ 입니다.

   $a = 2/\pi$는 조건 $a > 0$을 만족합니다.

2. **2. 극소점의 개수 n 찾기**

   $a = 2/\pi, b = -1$이므로 $f'(x) = (e^{2/\pi x-1+\cos x} - 1)(2/\pi - \sin x)$ 입니다.

   함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극소라는 것은 $f'(\alpha) = 0$이고 $x = \alpha$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀜을 의미합니다.

   $f'(x) = 0$인 경우는 두 가지입니다.

   Case 1: $2/\pi - \sin x = 0 \implies \sin x = 2/\pi$.

   $0 < 2/\pi < 1$ 이므로, 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 이 방정식의 해는 두 개 존재합니다. 이 해들을 β_1, β_2라 합시다 ($\beta_1 < \beta_2$).

   $x = \beta_1$에서 $\sin x$가 증가하므로 $2/\pi - \sin x$의 부호가 (+)에서 (-)로 바뀝니다.

   $x = \beta_2$에서 $\sin x$가 감소하므로 $2/\pi - \sin x$의 부호가 (-)에서 (+)로 바뀝니다.

Case 2: $e^{2/\pi x-1+\cos x}-1=0 \implies 2/\pi x-1+\cos x=0.$
$g(x)=2/\pi x-1+\cos x$라 합시다. $g'(x)=2/\pi-\sin x$ 입니다.
$g'(x)=0$인 x가 위에서 구한 β_1, β_2입니다. $g(x)$는 $x=\beta_1$에서 극대, $x=\beta_2$에서 극소를 갖습니다.
경계값을 계산하면:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0-1+1=0 \\ g(\pi) &= 2/\pi(\pi)-1+\cos(\pi)=2-1-1=0 \\ g(2\pi) &= 2/\pi(2\pi)-1+\cos(2\pi)=4-1+1=4 \end{aligned}$$

$g(\beta_1)>0$ (극댓값), $g(\beta_2)<0$ (극솟값)이므로, $(0,2\pi)$ 구간에서 $g(x)=0$의 해는 다음과 같이 4개 존재합니다:

- $x=0$ (경계)
- $x=\alpha\in(\beta_1,\beta_2)$ (극대에서 극소로 내려가며 0을 지남)
- $x=\pi$ (극소에서 올라가며 0을 지남)
- $x=\gamma\in(\pi,2\pi)$ (이미 양수인 상태에서 계속 증가)

그런데 $g(\pi)=0$이고 $\pi>\beta_2$이므로, 실제로는 $x=\pi$가 $(\beta_2,2\pi)$ 구간에서 유일한 해입니다.
따라서 열린구간 $(0,2\pi)$에서 $g(x)=0$의 해는 $x=\alpha, x=\pi$ 두 개입니다.

3. **3.** $f'(x)$ **부호 분석 및 최종 값 계산**
$f'(x)=(e^{g(x)}-1)\times(2/\pi-\sin x)$에서 각 구간별 부호를 분석합니다:

구간	$e^{g(x)}-1$	$2/\pi-\sin x$	$f'(x)$
$(0,\beta_1)$	$+$	$+$	$+$
(β_1,α)	$+$	$-$	$-$
(α,β_2)	$-$	$-$	$+$
(β_2,π)	$-$	$+$	$-$
$(\pi,2\pi)$	$+$	$+$	$+$

$f'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌는 점은:

- $x=\alpha\in(\beta_1,\beta_2)$: $(-)$에서 $(+)$로 변화 → **극소**
- $x=\pi$: $(-)$에서 $(+)$로 변화 → **극소**

따라서 열린구간 $(0,2\pi)$에서 극소점은 2개 존재합니다. 즉, $n=2$ 입니다.
$n=2$이고 1단계에서 $b=-1$을 구했습니다.
문제에서 요구하는 값은 $n+b$이므로, $2+(-1)=1$ 입니다.

문제 23번 유형: 이항정리

자연수 n과 양수 a에 대하여, $(x+a)^n$에서 x^{n-1}의 계수가 12이고 x^{n-2}의 계수가 54일 때, $n+a$의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

정답

정답: ②

설명

주어진 다항식 $(x+a)^n$의 전개식에서 일반항은 **이항정리**에 따라 ${}_nC_r x^{n-r} a^r$ 입니다.

1. x^{n-1}**의 계수**

- x의 지수가 $n-1$이 되려면 $n-r=n-1$, 즉 $r=1$이어야 합니다.
- $r=1$을 일반항에 대입하면 계수는 ${}_nC_1 a^1 = na$ 입니다.
- 문제 조건에 따라 $na=12$ 입니다. —(1)

2. x^{n-2}**의 계수**

- x의 지수가 $n-2$가 되려면 $n-r=n-2$, 즉 $r=2$이어야 합니다.
- $r=2$를 일반항에 대입하면 계수는 ${}_nC_2 a^2 = \frac{n(n-1)}{2}a^2$ 입니다.
- 문제 조건에 따라 $\frac{n(n-1)}{2}a^2 = 54$ 입니다. —(2)

이제 두 식을 연립하여 n과 a를 구합니다. (1)번 식에서 $a = 12/n$ 입니다. 이를 (2)번 식에 대입합니다.

$$\frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{12}{n}\right)^2 = 54$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{144}{n^2} = 54$$

$$\frac{72(n-1)}{n} = 54$$

$$72(n-1) = 54n$$

$$72n - 72 = 54n$$

$$18n = 72$$

따라서 $n = 4$ 입니다. $n = 4$를 (1)번 식에 대입하면 $4a = 12$, 따라서 $a = 3$ 입니다. 문제에서 요구하는 값은 $n + a$ 이므로, $4 + 3 = 7$ 입니다.

문제 24번 유형: 조건부 확률

두 사건 A, B에 대하여 $P(B^C) = \frac{3}{5}$ 이고 $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ 이다. 두 사건 A와 B^C가 서로 독립일 때, $P(A)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{5}$

⑤ $\frac{2}{3}$

정답

정답: ⑤

설명

두 사건 A와 B^C가 서로 독립이면, 두 사건 A와 B도 서로 독립입니다. $P(B^C) = \frac{3}{5}$이므로, 여사건의 확률에 의해 $P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$입니다. 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로, 확률의 곱셈정리에 의해 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5}P(A)$입니다. 확률의 덧셈정리에 의해 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$이므로, 주어진 값들을 대입하면 다음과 같습니다.

$$\frac{4}{5} = P(A) + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}P(A)$$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = P(A)\left(1 - \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{5}P(A)$$

따라서, $P(A) = \frac{2}{3}$입니다.

문제 25번 유형: 모평균의 신뢰구간

어느 음료수 공장에서 생산하는 제품의 용량은 표준편차가 10mL인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 중에서 n개를 임의추출하여 모평균 용량을 신뢰도 99%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 12mL 이하가 되도록 하려고 한다. n의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① 17

② 18

③ 19

④ 20

⑤ 21

정답

정답: ③

설명

이 문제는 주어진 신뢰구간의 길이를 만족시키는 최소 표본의 크기(n)를 구하는 모평균의 추정 문제입니다.
모평균 m에 대한 신뢰도 99% 신뢰구간의 길이는 $2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$으로 주어집니다.
문제에서 표준편차 $\sigma = 10$이고, 신뢰도 99%에 해당하는 k값은 2.58입니다.
신뢰구간의 길이가 12 이하가 되어야 하므로, 다음 부등식을 세울 수 있습니다.

$$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 12$$

식을 정리하면,

$$51.6 \leq 12\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} \geq (\frac{51.6}{12} = 4.3)$$

양변을 제곱하면,

$$n \geq (4.3)^2 = 18.49$$

표본의 크기 n은 자연수여야 하므로, 이 부등식을 만족하는 n의 최솟값은 19입니다.

문제 26번 유형: 여사건의 확률

흰 구슬 5개와 검은 구슬 7개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 검은 구슬이 적어도 한 개 포함될 확률은?

① $\frac{14}{99}$

② $\frac{7}{12}$

③ $\frac{92}{99}$

④ $\frac{31}{32}$

⑤ $\frac{98}{99}$

정답

정답: ⑤

설명

이 문제는 '적어도 한 개'가 포함될 확률을 구하는 문제이므로, 전체 확률에서 해당 사건이 전혀 일어나지 않을 **여사건의 확률**을 빼서 계산하는 것이 편리합니다.

1. **전체 경우의 수 계산** 주머니에는 흰 구슬 5개와 검은 구슬 7개, 총 12개의 구슬이 있습니다. 이 중에서 4개의 구슬을 동시에 꺼내는 전체 경우의 수는 다음과 같습니다.

$$_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

2. **여사건 정의 및 경우의 수 계산** 문제에서 요구하는 사건은 '검은 구슬이 적어도 한 개 포함될' 확률입니다. 이것의 여사건은 '검은 구슬이 하나도 포함되지 않을' 확률, 즉 '꺼낸 구슬 4개가 **모두** 흰 구슬일' 확률입니다. 주머니에 있는 흰 구슬 5개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 다음과 같습니다.

$$_5C_4 =_5 C_1 = 5$$

3. **여사건의 확률 계산** 여사건(4개 모두 흰 구슬)의 확률은 (여사건의 경우의 수) / (전체 경우의 수) 입니다.

$$P(A^c) = \frac{5}{495} = \frac{1}{99}$$

4. **원래 사건의 확률 계산** 구하고자 하는 '검은 구슬이 적어도 한 개 포함될' 확률 P(A)는 $1 - P(A^c)$ 입니다.

$$P(A) = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$$

문제 27번 유형: 이산확률분포, 표본평균

주머니 속에 숫자 $0, 3, 6$이 각각 하나씩 적혀 있는 공이 총 6개 들어있다. 단, 0이 적힌 공은 1개, 3이 적힌 공은 2개, 6이 적힌 공은 3개이다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개 꺼내어 숫자를 확인하고 다시 넣는 과정을 n번 반복하여 공에 적힌 수를 모두 확인하였다. 확인한 n개 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $V(2\overline{X} - 5) = 2$이 성립할 때, 표본의 크기 n의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

정답

정답: ①

설명

이 문제는 주어진 이산확률분포를 따르는 모집단에서 표본의 크기 n을 구하는 **표본평균의 분포 문제**입니다. 문제 해결을 위해 다음 단계들을 순차적으로 적용해야 합니다.

1. **모집단의 확률분포 파악 및 모평균(기댓값) 계산** 주머니 속 6개의 공 중 '0'이 적힌 공은 1개, '3'이 적힌 공은 2개, '6'이 적힌 공은 3개입니다. 따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 확률은 다음과 같습니다.

   - $P(X = 0) = 1/6$
   - $P(X = 3) = 2/6 = 1/3$
   - $P(X = 6) = 3/6 = 1/2$

   모평균 $m = E(X)$를 계산합니다.

   $$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \left(0 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{2}{6}\right) + \left(6 \times \frac{3}{6}\right) = 0 + \frac{6}{6} + \frac{18}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

2. **모분산 계산** 모분산 $\sigma^2 = V(X)$를 계산하기 위해 먼저 X^2의 기댓값 $E(X^2)$을 구합니다.

   $$E(X^2) = \sum x_i^2 P(X = x_i) = \left(0^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3^2 \times \frac{2}{6}\right) + \left(6^2 \times \frac{3}{6}\right) = 0 + \frac{18}{6} + \frac{108}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

   이제 분산의 성질 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$을 이용하여 모분산을 계산합니다.

   $$\sigma^2 = V(X) = 21 - 4^2 = 21 - 16 = 5$$

3. **표본평균의 분산 $V(\overline{X})$과 주어진 조건을 연결하여 n 구하기** 문제에 주어진 조건은 $V(2\overline{X}-5) = 2$입니다. 분산의 성질 $V(aY+b) = a^2V(Y)$에 의해, $V(2\overline{X}-5) = 2^2V(\overline{X}) = 4V(\overline{X})$입니다. 따라서, $4V(\overline{X}) = 2$ 이고, $V(\overline{X}) = 1/2$입니다. 표본평균의 분산 공식은 $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$입니다. 위에서 구한 값들을 대입하면, $1/2 = 5/n$입니다. 따라서, $n = 5 \times 2 = 10$입니다.

최종적으로, 표본의 크기 n은 10입니다.

문제 28번 유형: 중복조합

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) + f(6)$의 값은 소수이다.

(나) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$

① 212

② 217

③ 222

④ 227

⑤ 232

정답

정답: ②

설명

함수 f의 개수를 구하기 위해, 조건 (가)를 만족하는 $f(1)$과 $f(6)$의 순서쌍을 기준으로 경우를 나누고, 각 경우에 대해 조건 (나)를 만족하는 $f(2), f(3), f(4), f(5)$의 개수를 **중복조합**을 이용하여 계산합니다. 조건 (가)에서 $f(1)+f(6)$의 값은 소수여야 합니다. $f(1), f(6) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로, 두 함숫값의 합은 2 이상 12 이하입니다. 이 범위의 소수는 2, 3, 5, 7, 11입니다.

조건 (나)는 $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$입니다. 이 부등식이 성립하려면 항상 $f(1) \le f(6)$이어야 합니다. 따라서 $f(1) > f(6)$인 순서쌍은 고려하지 않습니다. $f(2), f(3), f(4), f(5)$의 값은 $f(1)$ 이상 $f(6)$ 이하의 자연수 집합, 즉 $\{f(1), f(1) + 1, \ldots, f(6)\}$에서 중복을 허용하여 4개를 선택하는 경우의 수와 같습니다. 이 집합의 원소 개수는 $n = f(6) - f(1) + 1$이며, 구하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{H}_4$입니다.

1. $f(1) + f(6) = 2$**일 경우**
   - $f(1) = 1, f(6) = 1$인 순서쌍 (1,1)만 가능합니다.
   - $f(2), f(3), f(4), f(5)$는 $\{1\}$에서 4개를 중복 선택합니다.
   - 경우의 수: ${}_1\mathrm{H}_4 = \binom{1+4-1}{4} = \binom{4}{4} = 1$
2. $f(1) + f(6) = 3$**일 경우**
   - $f(1) \le f(6)$을 만족하는 순서쌍은 (1,2)뿐입니다.
   - $f(2), \ldots, f(5)$는 $\{1, 2\}$에서 4개를 중복 선택합니다.
   - 경우의 수: ${}_2\mathrm{H}_4 = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$

3. $f(1)+f(6)=5$**일 경우**

   - $f(1) \le f(6)$을 만족하는 순서쌍은 (1,4), (2,3)입니다.
   - (1,4): $\{1,2,3,4\}$에서 4개 중복 선택: ${}_4\mathrm{H}_4 = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35$
   - (2,3): $\{2,3\}$에서 4개 중복 선택: ${}_2\mathrm{H}_4 = \binom{5}{4} = 5$
   - 경우의 수: $35+5=40$

4. $f(1)+f(6)=7$**일 경우**

   - $f(1) \le f(6)$을 만족하는 순서쌍은 (1,6), (2,5), (3,4)입니다.
   - (1,6): $\{1,...,6\}$에서 4개 중복 선택: ${}_6\mathrm{H}_4 = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$
   - (2,5): $\{2,...,5\}$에서 4개 중복 선택: ${}_4\mathrm{H}_4 = \binom{7}{4} = 35$
   - (3,4): $\{3,4\}$에서 4개 중복 선택: ${}_2\mathrm{H}_4 = \binom{5}{4} = 5$
   - 경우의 수: $126+35+5=166$

5. $f(1)+f(6)=11$**일 경우**

   - $f(1) \le f(6)$을 만족하는 순서쌍은 (5,6)뿐입니다.
   - $f(2),\dots,f(5)$는 $\{5,6\}$에서 4개를 중복 선택합니다.
   - 경우의 수: ${}_2\mathrm{H}_4 = \binom{5}{4} = 5$

모든 경우의 수를 더하면, 총 함수의 개수는 $1+5+40+166+5=217$입니다.

문제 29번 유형: 정규분포의 성질, 표준정규분포표 통계적 추론

두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma_1^2)$, $N(m_2, \sigma_2^2)$을 따르고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f_X(x)$, $f_Y(x)$이다. 이 두 확률변수가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(X \leq 25) = P(X \geq 35)$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f_Y(x) = f_X(x+5)$이다.

(다) $P(|X-30| \leq 5) + P(Y \geq 30) = 0.8413$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $m_1 - \sigma_2$의 값을 구하시오. (단, σ_1과 σ_2는 양수이다.)

[표준정규분포표]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

정답

정답: 25

설명

1. **조건 (가) 분석: 평균의 결정**
   - 정규분포는 평균에 대해 대칭인 분포입니다.
   - 조건 (가)에서 $P(X \leq 25) = P(X \geq 35)$이므로, 평균 m_1은 25와 35의 중앙값이어야 합니다.
   - 따라서 $m_1 = \frac{25+35}{2} = 30$입니다.
2. **조건 (나) 분석: 두 확률분포의 관계**
   - 조건 (나)는 확률밀도함수(PDF) 사이에 $f_Y(x) = f_X(x+5)$ 관계가 성립함을 의미합니다.
   - 이는 Y의 분포가 X의 분포를 x축 방향으로 -5만큼 평행이동한 것과 같다는 뜻입니다.
   - 따라서 두 분포의 모양은 같으므로 표준편차는 동일합니다. $\sigma_2 = \sigma_1$.
   - 평균은 -5만큼 이동했으므로 $m_2 = m_1 - 5$입니다.
   - $m_1 = 30$이므로, $m_2 = 30 - 5 = 25$입니다.
3. **조건 (다) 분석: 표준편차 계산**
   - $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$라 놓고, 주어진 확률의 합을 표준화하여 계산합니다.

- 첫 번째 항: $P(|X-30| \le 5) = P(-5 \le X-30 \le 5) = P\left(\frac{-5}{\sigma} \le \frac{X-m_1}{\sigma} \le \frac{5}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-5}{\sigma} \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right) = 2 \times P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right)$
- 두 번째 항: $P(Y \ge 30) = P\left(Z \ge \frac{30-m_2}{\sigma}\right) = P\left(Z \ge \frac{30-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \ge \frac{5}{\sigma}\right) = 0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right)$
- 두 확률의 합은 다음과 같습니다. $2 \times P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right) + \left(0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right)\right) = P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right) + 0.5$
- 이 값이 0.8413이므로, $P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right) + 0.5 = 0.8413$입니다.
- $P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right) = 0.3413$.
- 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \le Z \le 1.0) = 0.3413$이므로, $5/\sigma = 1.0$입니다.
- 따라서 $\sigma = 5$입니다. 즉, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$.

4. **최종 값 계산**
   - 구하고자 하는 값은 $m_1 - \sigma_2$입니다.
   - $m_1 = 30, \sigma_2 = 5$이므로, $30 - 5 = 25$입니다.

문제 30번 유형: 독립시행, 경우의 수 분석

한 기업의 중앙 보안실에 4개의 구역을 나타내는 표시등이 있다. 각 표시등은 'Red'(위험) 또는 'Green'(안전) 상태를 가진다. 초기 상태는 1, 2번 구역이 'Red', 3, 4번 구역이 'Green'이다. 관제 시스템은 1분마다 주사위 한 개를 던져서 다음 규칙에 따라 독립시행으로 구역의 상태를 자동 변경한다. 이 시행을 3번 반복한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, - $k \le 4$이면 k번 구역 표시등의 상태를 바꾼다. (R↔G) - $k = 5$이면 1번과 2번 구역 표시등의 상태를 모두 바꾼다. - $k = 6$이면 3번과 4번 구역 표시등의 상태를 모두 바꾼다.

3번의 시행 후, 4개 구역의 표시등이 모두 'Green' 상태가 될 확률은 $\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

정답

정답: 29

설명

이 문제는 각 조작이 독립적으로 발생하는 **독립시행의 확률** 문제이며, 여러 개의 상태가 연동되어 변하는 시스템을 분석해야 합니다. 핵심 전략은 전체 시스템을 서로 영향을 주지 않는 부분 시스템으로 나누어 **경우를 분할**하고, 각 부분 시스템의 상태 변화의 **홀짝성**을 추적하는 것입니다.

1. **상태 정의와 목표 분석**

- 상태를 이진법으로 표현합시다. Red(R)는 1, Green(G)는 0으로 대응시킵니다.
- 초기 상태: (R, R, G, G) $\implies$ **(1, 1, 0, 0)**
- 목표 상태: (G, G, G, G) $\implies$ **(0, 0, 0, 0)**
- 따라서 3번의 시행 동안 각 표시등의 상태가 바뀐 총 횟수(f_i)의 홀짝성은 다음과 같아야 합니다.
  - f_1: 1(홀) $\implies$ 0(짝) $\implies$ **홀수** 번 변경
  - f_2: 1(홀) $\implies$ 0(짝) $\implies$ **홀수** 번 변경
  - f_3: 0(짝) $\implies$ 0(짝) $\implies$ **짝수** 번 변경
  - f_4: 0(짝) $\implies$ 0(짝) $\implies$ **짝수** 번 변경

2. **시스템 분할 및 시행 분석** 주사위의 규칙을 보면, $\{1,2,5\}$는 1, 2번 표시등에만 영향을 주고, $\{3,4,6\}$은 3, 4번 표시등에만 영향을 줍니다.

- **시스템 A**: 표시등 1, 2. 관련 주사위 눈: $\{1,2,5\}$.
- **시스템 B**: 표시등 3, 4. 관련 주사위 눈: $\{3,4,6\}$.

N_A (시스템 A 시행 횟수) + N_B (시스템 B 시행 횟수) = 3입니다. n_k를 주사위 눈 k가 나온 횟수라 정의합시다.

- 시스템 A 조건: $f_1 = n_1 + n_5$는 **홀수**, $f_2 = n_2 + n_5$는 **홀수**.
- 시스템 B 조건: $f_3 = n_3 + n_6$는 **짝수**, $f_4 = n_4 + n_6$는 **짝수**.

이제 (N_A, N_B)의 조합에 따라 경우를 나눕니다.

- **Case 1:** $(N_A, N_B) = (3, 0)$
  - 3번의 시행이 모두 $\{1,2,5\}$에서 나옵니다. ($n_1 + n_2 + n_5 = 3$)
  - 시스템 B는 $f_3 = 0, f_4 = 0$ (짝, 짝)이므로 자동 만족합니다.
  - 시스템 A (f_1, f_2 홀수) 조건을 만족해야 합니다.
  - $n_5 = 0$ ($n_1+n_2 = 3$): $f_1 = n_1, f_2 = n_2$. (홀, 홀)이면서 합이 3 $\to$ 불가능. (0가지)
  - $n_5 = 1$ ($n_1 + n_2 = 2$): $f_1 = n_1 + 1, f_2 = n_2 + 1$. (n_1, n_2)가 (짝, 짝)이어야 함.
    * (2,0) $\to$ 눈 $\{1,1,5\}$ (3!/2! = 3가지).
    * (0,2) $\to$ 눈 $\{2,2,5\}$ (3!/2! = 3가지). (총 6가지)
  - $n_5 = 2$ ($n_1 + n_2 = 1$): $f_1 = n_1 + 2, f_2 = n_2 + 2$. (n_1, n_2)가 (홀, 홀)이어야 함.
    * (1,0) $\to$ 눈 $\{1,5,5\}$: $f_1 = 1 + 2 = 3$(홀), $f_2 = 0 + 2 = 2$(짝). **불충족**.
    * (0,1) $\to$ 눈 $\{2,5,5\}$: $f_1 = 0 + 2 = 2$(짝), $f_2 = 1 + 2 = 3$(홀). **불충족**. (총 0가지)
  - $n_5 = 3$ ($n_1 + n_2 = 0$): $f_1 = 3, f_2 = 3$. (홀, 홀) 충족.
    * (0,0) $\to$ 눈 $\{5,5,5\}$ (1가지).

- 총 경우의 수: $6+0+1=7$가지.

- **Case 2:** $(N_A, N_B) = (2, 1)$
  - 시스템 B부터 분석 ($n_3 + n_4 + n_6 = 1$): f_3, f_4가 (짝, 짝)이어야 함.
  - $n_6 = 0$ ($n_3 + n_4 = 1$): $f_3 = n_3, f_4 = n_4$. (짝, 짝) 불가능.
  - $n_6 = 1$ ($n_3 + n_4 = 0$): $f_3 = 1, f_4 = 1$. (홀, 홀)이므로 불가능.
  - 시스템 B를 만족시킬 수 없으므로, 이 경우의 수는 0가지입니다.

- **Case 3:** $(N_A, N_B) = (1, 2)$
  - 시스템 A 분석 ($n_1 + n_2 + n_5 = 1$): f_1, f_2가 (홀, 홀)이어야 함.
  - $n_5 = 0$ ($n_1 + n_2 = 1$): $f_1 = n_1, f_2 = n_2$. (홀, 홀) 불가능.
  - $n_5 = 1$ ($n_1 + n_2 = 0$): $f_1 = 1, f_2 = 1$. (홀, 홀) 충족. $\implies$ 시스템 A 시행은 반드시 $\{5\}$여야 합니다.
  - 시스템 B 분석 ($n_3 + n_4 + n_6 = 2$): f_3, f_4가 (짝, 짝)이어야 함.
  - $n_6 = 0$ ($n_3 + n_4 = 2$): $f_3 = n_3, f_4 = n_4$. (n_3, n_4)가 (짝, 짝)이어야 함.
    * (2,0) $\rightarrow$ 눈 $\{3, 3\}$. 조합 $\{5, 3, 3\}$ ($3!/2! = 3$가지).
    * (0,2) $\rightarrow$ 눈 $\{4, 4\}$. 조합 $\{5, 4, 4\}$ ($3!/2! = 3$가지).
  - $n_6 = 1$ ($n_3 + n_4 = 1$): $f_3 = n_3 + 1, f_4 = n_4 + 1$. (n_3, n_4)가 (홀, 홀)이어야 함.
    * (1,0) $\rightarrow$ 눈 $\{3, 6\}$: $f_3 = 1 + 1 = 2$(짝), $f_4 = 0 + 1 = 1$(홀). **불충족**.
    * (0,1) $\rightarrow$ 눈 $\{4, 6\}$: $f_3 = 0+1 = 1$(홀), $f_4 = 1+1 = 2$(짝). **불충족**. (총 0가지)
  - $n_6 = 2$ ($n_3 + n_4 = 0$): $f_3 = 2, f_4 = 2$. (짝, 짝) 충족.
    * (0,0) $\rightarrow$ 눈 $\{6, 6\}$. 조합 $\{5, 6, 6\}$ ($3!/2! = 3$가지).
  - 총 경우의 수: $3+3+0+3=9$가지.

- **Case 4:** $(N_A, N_B) = (0, 3)$
  - 3번의 시행이 모두 $\{3, 4, 6\}$에서 나옵니다.
  - 시스템 A는 $f_1 = 0, f_2 = 0$ (모두 짝수)이 됩니다.

– 목표(홀, 홀)와 다르므로 불가능합니다. (경우의 수: 0가지)

3. **확률 계산**

- 조건을 만족하는 총 경우의 수는 7 (Case 1) $+ 0$ (Case 2) $+ 9$ (Case 3) $+ 0$ (Case 4) $= 16$ 가지입니다.
- 전체 경우의 수는 $6^3 = 216$가지입니다.
- 따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{216} = \frac{2}{27}$입니다.
- $p = 2, q = 27$이며, 이 둘은 서로소입니다.
- 최종적으로 $p + q = 2 + 27 = 29$입니다.