2026학년도 대학수학능력시험 대비 FLUX FINAL 모의평가 2회

빠른정답

<공통>

1번	④	2번	④	3번	⑤	4번	②	5번	②
6번	①	7번	⑤	8번	①	9번	②	10번	②
11번	①	12번	③	13번	③	14번	②	15번	⑤
16번	6	17번	19	18번	2	19번	28	20번	4
21번	9	22번	5						

<확통>

확통				23번	⑤	24번	④	25번	①
26번	③	27번	③	28번	④	29번	30	30번	659

<미적>

미적분				23번	②	24번	③	25번	②
26번	①	27번	①	28번	③	29번	16	30번	7

<공통 주요문항 해설>

#10번

[정답] ② $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

[해설]

(가) 조건 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ 와 코사인법칙
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ 를 비교하면
$-2bc \cdot \cos A = bc$ 이므로

$\cos A = -\frac{1}{2}$

따라서 $0 < A < \pi$ 에서 $A = 120^\circ$.

선분 AD는 ∠A의 이등분선이므로
△ABC의 넓이 = △ABD의 넓이 + △ACD의 넓이.

즉,

$$\frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$= bc \cdot \sin 120^\circ = (b+c) \cdot AD \cdot \sin 60^\circ$$

$$= bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (b+c) \cdot AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $AD = \frac{bc}{b+c}$.

(나) AD = 6, c = 9 이므로

$$6 = \frac{9b}{b+9}$$

정리하면

$6(b+9) = 9b \rightarrow b = 18$.

$b = 18$, $c = 9$ 를 (가)에 대입하면

$$a^2 = 18^2 + 9^2 + 18 \cdot 9 = 324 + 81 + 162 = 567.$$

따라서 $a = \sqrt{567} = \sqrt{(81 \times 7)} = 9\sqrt{7}$.

이제 삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{567 + 9^2 - 18^2}{2 \cdot 9\sqrt{7} \cdot 9}$$

$$= \frac{567 + 81 - 324}{162\sqrt{7}}$$

$$= \frac{324}{162\sqrt{7}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

#11번

[정답] ① 2

[해설]

① $y = t^x$ $(t > 1 \rightarrow y > 0)$라 두면

㉠ $\rightarrow \log_t\left(y + \frac{1}{y}\right) = 3 - \log_t 2$

$\Rightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{t^3}{2} = S$

㉡ $\rightarrow \log_t\left|y - \frac{1}{y}\right| = 1 + \log_t \sqrt{3}$

$\Rightarrow \left|y - \frac{1}{y}\right| = t\sqrt{3} = D$

② y>0이므로 항상

$(y+\frac{1}{y})^2-(y-\frac{1}{y})^2$ = 4.

따라서 S^2 − D^2 = 4 가 성립해야 공통근이 존재한다.

대입하면

$(\frac{t^3}{2})^2-(\frac{t^3}{2})^2$= 4

$\Rightarrow \frac{t^6}{4}-3t^2=4$

$\Rightarrow t^6-12t^2-16=0.$

③ t^2 = u (>1)로 두면

$u^3-12u-16=0.$

인수분해:

$u^3-12u-16=(u-4)(u+2)^2.$

따라서 $u=4 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=2.$

④ (나) 모든 공통근의 합이 0인 이유:

$y \rightarrow \frac{1}{y}$ 가 동시에 해가 되므로

$x=\log_t y$와 $x=-\log_t y$는 짝으로 존재.

즉, 공통근의 합 = 0

#12번

[정답]

③ 272

[출제의도]

- 삼차함수의 근의 중복 구조(두 실근만 존재)와 부호를 이용해 $f(x)$ 의 형태를 결정한다.
- 절댓값이 들어간 적분에서 $g(p)$ 와 $h(k)+g(k)$ 의 의미를 해석하여 g(p) → 2 int f, h+g → 2 int f 로 단순화하고, 이를 통해 p, k 를 구한다.
- 마지막으로 | f'(x) - f'(p) | 적분을 부호 분할로 계산하여 정밀한 구적 능력을 평가한다.

[해설]

[1] 근의 구조와 함수형

서로 다른 두 실근이 0, p 뿐이므로 (삼차, 최고차항 1)

$f(x)$ 는 0, p 중 하나가 중근이어야 한다.

g(p) 가 음수이려면

구간 (0, p) 에서 f < 0 이어야 하므로

$f(x)=x^2(x-p)$ 로 잡는다.

[2] g(p) 조건으로 p 결정

(0, p) 에서 f < 0 이므로

$g(p)=\int_0^p (f(t)-|f(t)|)dt=2\int_0^p f(t)dt.$

$\int_0^p f(t)dt$

$=\int_0^p (t^3-pt^2)dt$

$=\frac{p^4}{4}-p\frac{p^3}{3}$

$=p^4(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})=-\frac{p^4}{12}.$

따라서 $g(p)=2\times(-\frac{p^4}{12})=-\frac{p^4}{6}.$

조건

$g(p)=-216$ 이므로

$\frac{p^4}{6}=216 \rightarrow p^4=1296=6^4 \rightarrow p=6.$

[3] (나)로 k 결정

$h(k)+g(k)=\int_0^k (f+|f|)dt+\int_0^k (f-|f|)dt=2\int_0^k f(t)dt=0.$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{x^4}{4}-p\frac{x^3}{3}.$

$F(k)=0$ 에서 $k^3(\frac{k}{4}-\frac{p}{3})=0 \rightarrow k=\frac{4p}{3}.$

$p=6$ 이므로 $k=8.$

[4] A 계산

$f'(x)=3x^2-2px$, $f'(p)=p^2.$

$p=6$

이므로 $f'(x)-f'(p)=3x^2-12x-36.$

이차식의 근은 $x=-2$, 6 이고, $[0, 8]$ 에서 부호는

$x\in[0, 6)$: 음수, $x\in(6, 8]$: 양수.

따라서

$A=\int_0^8|3x^2-12x-36|dx=$

$-\int_0^6(3x^2-12x-36)dx$

$+\int_6^8(3x^2-12x-36)dx.$

$G(x)=x^3-6x^2-36x.$

$\int_0^6(...)dx=G(6)-G(0)$

$=(216-216-216)-0=-216.$

$\int_6^8(...)dx=G(8)-G(6)$

$=(512-384-288)-(-216)$

$=-160+216=56.$

따라서

$A=-(-216)+56=216+56=272.$

#13번

[정답] ③ 196

[해설]

① 조건 (가): $f(x)\geq 2f'(x)-x$ $(x\geq 0)$

→ $f(x)-2f'(x)+x\geq 0$ 이므로, 등식이 성립하는 점에서 접하는 형태를 가질 수 있다.

② 조건 (나): $x=0$에서 $f(x)=2f'(x)-x$의 해는 $x=0$뿐이다.

→ 즉, $f(0)=2f'(0)$ 이고, 이때 두 그래프가 한 점에서만 만난다.

③ 조건 (다): $f'(x)$의 $x=0$에서의 접선 기울기는 12

→ $f'(x)$가 이차함수이므로,

$f'(x)=3x^2+bx+c$ 라고 하면

$f''(x)=6x+b$, $f''(0)=b=12$

→ $b=12.$

따라서 $f'(x)=3x^2+12x+c$

④ $f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+6x^2+cx+d$

⑤ $f(0)=d$, $f'(0)=c$

$f(0)=2f'(0)$ → $d=2c$

⑥ $f(x)\geq 2f'(x)-x$ 조건을 이용

$f(x)-2f'(x)+x$

$=(x^3+6x^2+cx+d)-2(3x^2+12x+c)+x$

$=x^3+6x^2+cx+d-6x^2-24x-2c+x$

$=x^3+(c-23)x+(d-2c)$

이 식이 $x\geq 0$에서 항상 0 이상이고, $x=0$에서만 0이 되려면

$(x^3+(c-23)x+(d-2c))=x^3+(c-23)x$ 가 되어야 함.

(상수항이 0이어야 $x=0$에서만 0이 되므

로)

$x^3+(c-23)x \geq 0$ $(x \geq 0)$ 이어야 함.

$x>0$일 때 이 부등식이 항상 성립하려면
$c-23 \geq 0$ → $c \geq 23$

⑦ $f(3)$의 최소값:
$f(x)=x^3+6x^2+cx+2c$
$f(3)=27+54+3c+2c=81+5c$

c의 최소값은 23이므로

$f(3)$의 최소값
$=81+5\times23=81+115=196$

#14번

[정답]
②19

[출제의도]
- 분기형 점화식에서 “자연수 유지” 제약을 해석하여 4 가 유일한 고정점임을 파악하게 한다.
- 조건으로 특정 위치의 값을 고정시키고, 초기 구간에 4 이하가 금지됨을 이용해
역추적으로 초기값을 결정하는 능력을 평가한다.
- 조건은 후보값 검증 및 유일성 확인에 쓰이는 필터로서, 조건 종합 추론을 요구한다.

[해설]

[1] 점화식의 기본 거동

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n-2} & (a_n \leq 4)\\ a_n-3 & (a_n>4)\end{cases}$$

$a_n \leq 4$ 에서 자연수를 유지하려면 가능한 값은 4 뿐이다.

$a_n=4 \rightarrow a_{n+1}=2^2=4$(고정점)

$a_n=3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{2}$(자연수아님)

$a_n=2 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{2}$

$a_n=1 \rightarrow \frac{1}{2}$

따라서 1, 2, 3 은 어느 위치에서도 나올 수 없고, 4 가 한 번 나오면 이후는 계속 4 이다.

[2] $a_6+a_7=8$ 의 해석

a_6+a_7 이 자연수이고 [1]의 관찰에 의해 4 이하가 허용되려면 4 뿐이다.
또 4 가 나오면 다음 항도 4 이므로 $(a_6,\ a_7)$ = $(4,4)$가 유일하다.

[3] “a_1~a_6 중 4 이하인 항의 개수 = 1”

a_6 = 4 이므로, a_1 ~ a_5 에서는 4 이하가 나오면 안 된다(나오면 개수가 2 이상이 됨).
즉 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 는 모두 > 4 이어야 한다.

[4] 역추적으로 a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 결정

a_6 = 4 가 되려면 직전 상태는 두 경우뿐이다.
- (i) a_5 ≤ 4 분기에서 2^{a_5-2} = 4 → a_5 = 4 (불가: [3]에 위배)
- (ii) a_5 > 4 분기에서 a_6 = a_5 - 3 → a_5 = 7 (허용)

같은 방식으로 모두 > 4 를 유지하며 3씩 거슬러 올라가면
$a_5=7,\ a_4=10,\ a_3=13,\ a_2=16,\ a_1=19$
가 유도된다.

[5] 나머지 조건 검증
- $a_6+a_7=4+4=8$(성립)
- a_2 = 16 은 4 의 배수 (성립)
- $\sum_{k=1}^{5} a_k = 19+16+13+10+7=65$ (홀수, 성립)
- (라) a_1 ~ a_6 중 4 이하인 항은 a_6 = 4 한 개 (성립)

[6] 유일성
[3]에 의해 a_1 ~ a_5 는 모두 > 4 여야 하므로 역추적 경로는 (ii)만 가능하고
그 결과가 유일하게 결정된다. 따라서 해는 유일하며 a_1 = 19 이다.

#15번
[정답] ⑤ 512

[해설]

좌표 평행이동을 하여 $\alpha=0$으로 두어도 일반성은 잃지 않는다.
이때 $\beta=8\sqrt{3}$, $f(0)=M$, $f(\beta)=M$이다.

$x>0$에서

$$xf(x)=g(x) \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{g(x)}{x}$$

f가 0에서 연속이므로
$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x}=g'(0)=M$이다.
따라서
$$g(0)=0,\quad g'(0)=M$$

또한 $f'(\beta)=0$이므로

$$\beta f'(\beta)=\beta\times\frac{(\beta g'(\beta)-g(\beta))}{\beta^2}=0$$
$\rightarrow$ $g(\beta)=\beta g'(\beta)=\beta M.$

즉, g는 다음 조건을 만족한다.

$g(0)=0$, $g'(0)=M$, $g(\beta)=M\beta$, $g'(\beta)=M.$

$g(x)$를 최고차항 계수가 -1인 사차식으로 두자.
$$g(x)=-x^4+ax^3+bx^2+Mx.$$

조건 $g(0)=0$, $g'(0)=M$을 이미 반영하였다.

$g(\beta)=M\beta$, $g'(\beta)=M$을 대입하면,
$-\beta^4+a\beta^3+b\beta^2=0$, .
$-4\beta^3+3a\beta^2+2b\beta=0$

이를 풀면
$$a=2\beta,\ b=-\beta^2.$$

따라서
$$g'(x)$$
$$=-4x^3+6\beta x^2-2\beta^2x+M$$
$$=-2(2x^3-3\beta x^2+\beta^2x-\frac{M}{2}).$$

함수 g의 극값은 $g'(x)=0$인 곳에서 생긴다.
$h(x)=2x^3-3\beta x^2+\beta^2x-\frac{M}{2}$라 하면,
$$g'(x)=-2h(x).$$

$x\geq0$에서 g가 극값을 갖는 x의 개수가 1개이므로,
$[0,\beta]$ 구간에서는 $g'(x)\geq0$, 즉 $h(x)\leq0$이어야 한다.

최솟값 $M_{\min}$은 $h(x)$가 $[0,\beta]$에서 0이 되는

접촉 상황에서 결정된다.
즉, 어떤 $t \in (0, \beta)$에서 $h(t)=0$이고, 나머지 구간에서는 $h(x)<0$

$x=\beta y$로 치환하면

$$h(x)=\beta^3(2y^3-3y^2+y)-\frac{M}{2}$$

따라서 [0,1]에서 항상 $h \le 0$이 되려면,

$$M \ge 2\beta^3 \cdot \max(2y^3-3y^2+y).$$

이때 극대값은 미분 0에서 얻어진다.

$$(2y^3-3y^2+y)'=6y^2-6y+1=0$$

$$\rightarrow \quad y=\frac{(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}})}{2}.$$

그중 [0,1]에서의 최대값은

$$y_1=\frac{(1-\frac{1}{\sqrt{3}})}{2}$$ 일 때,

$$\max=\frac{(\sqrt{3})}{18}.$$

따라서

$$M_{\min}=2\beta^3\cdot(\frac{\sqrt{3}}{18)}=\beta^3\cdot(\frac{\sqrt{3}}{9}).$$

$\beta=8\sqrt{3}$ 을 대입하면,

$$\beta^3=1536\sqrt{3}.$$

그러므로

$$M_{\min}=(1536\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{9})$$

$$=\frac{(1536\times 3)}{9}=512.$$

#20번

[정답] 4

[해설]

① 기본 설정
$f(x)=k(x^3-x)(k>0)$. 접선의 기울기
$f'(x)=k(3x^2-1)$.

점 $(a, f(a))$ $(a<0)$에서의 접선 ℓ :
$m=f'(a)=k(3a^2-1)$,
$y=m(x-a)+f(a)$.

절편 b(= y절편)을 구하면
$b=f(a)-ma=k(a^3-a)-k(3a^2-1)a=-2ka^3$.

② 넓이 S, T
- 직선 $y=mx+b$와 좌표축이 이루는 삼각형 넓이

$$S=(\frac{1}{2})\cdot|b|\cdot|x\text{절편}|=\frac{b^2}{(2|m|)}$$

$$=(\frac{4k^2a^6)}{(2|k(3a^2-1)|)}=\frac{(2ka^6)}{|3a^2-1|}$$

- 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 전체 넓이
f는 근이 $-1,0,1$ 대칭을 이용하면

$$T=k\int_{-1}^{1}|x^3-x|dx.$$

$$=2k\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$$

$$=2k(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{k}{2}$$

조건 $S=\frac{T}{4}$ 이므로

$$\frac{(2ka^6)}{|3a^2-1|}=\frac{k}{8} \quad \Rightarrow \quad |3a^2-1|=16a^6.$$

$u=a^2$ (>0)라 두면
$|3u-1|=16u^3$.

여기서 $u>0$에 대해 $3u-1=16u^3$는 실근이 없고,

$1-3u=16u^3$는 $u=\frac{1}{4}$를 만족한다.

따라서 $a^2 = \frac{1}{4}$, $a < 0$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$.

③ “공동 접선” 조건으로 k 결정
곡선 $x = f(y)$는 $y = f(x)$의 직선 $y = x$에 대한 대칭이다.
어떤 직선 $y = mx + b$가 두 곡선에 동시에 접하려면,
대칭(기울기 $m \leftrightarrow \frac{1}{m}$)을 거쳐도 자기 자신이어야 하므로
$m = \pm 1$.

여기서 $a = -\frac{1}{2}$이면 $3a^2 - 1 = -\frac{1}{4} < 0$,
$m = k(3a^2 - 1) < 0$ 이므로
$m = -1$ 이다.

따라서
$-1 = k(3a^2 - 1) = k(-\frac{1}{4}) \Rightarrow k = 4$.

#21번

[정답] 9

[해설]

① (가) 조건 정리
$g(x) = x^3 + px$, $g'(x) = 3x^2 + p$
주어진 식 $(x - f(x))g'(x) = g(x) - g(f(x))$에 대입하면
$(x - f(x))(3x^2 + p)$
$= (x^3 + px) - (f(x)^3 + pf(x))$
정리하면 $2x^3 - 3x^2 f(x) + f(x)^3 = 0$ 이다.

② $f(x)$의 형태 찾기
$x \neq 0$일 때, $t = \frac{f(x)}{x}$라 두면
$t^3 - 3t + 2 = 0 \rightarrow (t-1)^2(t+2) = 0$
따라서 $f(x) = x$ 또는 $f(x) = -2x$
$f(x)$는 미분가능한 기함수이므로, 구간별로 나뉘면 $x = 0$에서 미분 불가능하다.
또 $f(a) = a$ $(a > 0)$이므로 전구간에서 $f(x) = x$이어야 한다.

③ (나) 조건 이용
$g(f(x)) = g(x)$ 이므로, $g(x) = x$의 서로 다른 실근이 0, ±a이다.
$g(x) = x^3 + px = x \rightarrow x^3 + (p-1)x = 0$
$x(x^2 + p - 1) = 0$
→ 근은 0, $\pm\sqrt{(1-p)}$
따라서 $a^2 = 1 - p$, (p < 1)

④ (다) 조건 이용 (넓이 계산)
넓이 $= \int |g(x) - x| dx = \int |x^3 + (p-1)x| dx$
$g(x) - x = x(x^2 - a^2)$
$(x > 0)$에서 $g(x) - x < 0$, $(x < 0)$에서 $g(x) - x > 0$
→ 넓이 $= 2\int_0^a (x - g(x))dx$
$= 2\int_0^a (-x^3 + (1-p)x)dx$
$= 2(\frac{-1}{4}a^4 + \frac{1}{2}(1-p)a^2)$

⑤ $a^2 = 1 - p$를 대입
넓이 $= \frac{1}{2}(1-p)^2$
넓이 $= 8$ 이므로
→ $(1-p)^2 = 16$
p < 1이므로 p = -3

⑥ 최종 결과
$p^2 = 9$

#22번

[정답] 5

[해설]

1) 원 O의 식
중심이 C(2, t), 반지름의 제곱은 $4 + t^2$ 이므로
$(x - 2)^2 + (y - t)^2 = 4 + t^2$

2) 점 $P(x_p, y_p)$에서의 접선 기울기
원의 접선 기울기는 반지름의 기울기와 수직이므로

$$m = -\frac{(x_p - 2)}{(y_p - t)}$$

3) (가) 조건
곡선 $l_1 : y = 2^{(x-1)} + 1$ 위의 점 P이므로

$y_p = 2^{(x_p - 1)} + 1$

$\rightarrow \dfrac{(y_p - 1)}{2} = 2^{(x_p - 2)}$

조건에 따라

$$-\frac{x_p - 2}{y_p - t} = \log\left(\frac{y_p - 1}{2}\right) = (x_p - 2)\log 2$$

따라서 $x_p = 2$ 또는 $y_p - t = \dfrac{-1}{\log 2}$

4) (나) 조건
세로선 $x = x_p$ 가 곡선 l_2: y = 5^(x - 1)과 만나면
$R(x_p, 5^{(x_p - 1)})$이며,
$|PR| = |5^{(x_p - 1)} - (2^{(x_p - 1)} + 1)|$

조건 $|PR| = 10^{(\log 2)} = 2$
$\rightarrow |5^{(x_p - 1)} - (2^{(x_p - 1)} + 1)| = 2$

함수 $h(x) = 5^{(x-1)} - 2^{(x-1)} + 1$은 증가함수이므로
$x_p = 2$

5) t 구하기
$x_p = 2 \Rightarrow y_p = 2 + 1 = 3$
이를 원에 대입:
$(2 - 2)^2 + (3 - t)^2 = 4 + t^2$
$\rightarrow 9 - 6t = 4 \rightarrow t = \dfrac{5}{6}$

6) 최종답
$6t = 6\left(\dfrac{5}{6}\right) = 5$

<확률과 통계 주요문항 해설>

#27번

[정답] ③ 3

[해설]

① 모집단의 수: {1, 3, 5, 7, 9}

$E(X) = \dfrac{(1+3+5+7+9)}{5} = 5$

V(X) = $\dfrac{[(-4)^2+(-2)^2+0^2+2^2+4^2]}{5}$ = 8

② 복원추출이므로 서로 독립이다.

따라서 $V(\overline{x}) = \dfrac{V(X)}{n} = \dfrac{8}{4} = 2$

③ $V(c\overline{x}-10) = c^2 V(\overline{x}) = c^2 \times 2 = 18$

⇒ c^2 = 9

⇒ c = 3

#28번

[정답] ④ 4

[해설]

주머니에 -1, 0, 1이 적힌 공이 각각 u, v, w개. 평균이 0 → -u + 0·v + 1·w = 0 ⇒ w = u.

총 개수 N = u + v + w = 2u + v.

(가) $P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{3}$

두 개를 다시 넣지 않고 뽑아 평균이 0이 되려면 (-1, 1) 한 쌍 또는 (0, 0).

확률:

$P(X_2 = 0)$

= $\dfrac{u \cdot w + {}_N C_2}{{}_N C_2}$

= $\dfrac{u^2 + {}_N C_2}{{}_N C_2}$

= $\dfrac{1}{3}$.

이를 정리하면

$6u^2 + \dfrac{v(v-1)}{2} = (2u+v)(2u+v-1)$

⇒ 2(u - v)(u - v + 1) = 0

⇒ v = u 또는 v = u + 1. (★)

$P(X_2 \geq 0)$ = {2} over {3}

대칭성으로 $P(X_2 \geq 0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} P(X_2 = 0)$

= $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

즉 (다)는 (가)에서 자동 만족.

$P(X_3 = 0) = \dfrac{1}{2}$

세 개를 뽑아 합이 0이 되는 경우는 (-1, 0, 1) 또는 (0, 0, 0).

확률: $P(X_3 = 0) = \dfrac{u \cdot v \cdot w + {}_V C_3}{{}_N C_2}$

$= \dfrac{u^2 v + {}_V C_3}{C(2u+v, 3)} = \dfrac{1}{2}.$

(★)의 두 경우 점검

1) v = u 대입 → 등식 불성립.

2) v = u + 1 대입 후 정리 → $u(13u^2 - 12u - 1) = 0$ → u = 1 (자연수).

따라서 (u, v, w) = (1, 2, 1), N = 2u + v = 4.

[결론] N = 4 → ④

#29번

[답] 30

[해설]

1) 평균 m_1 구하기

조건: 모든 x에 대해

P(X ≤ x) = P(X ≥ 50 - x).

정규분포의 대칭성:

$P(X \le x) = P(X \ge 2m_1 - x)$

따라서 2m1 - x = 50 - x 가 항상 성립

$\Rightarrow\ 2m_1 = 50\ \Rightarrow\ m_1 = 25$

2) Y의 분포

조건: P(Y ≤ x) = P(X ≤ x + 8) (모든 x).

이는 Y ≡ X - 8 과 같은 분포를 뜻함.

따라서

$m_2 = m_1 - 8 = 17,\ \sigma_2 = \sigma_1$

3) 주어진 확률의 해석

구하려는 값: 2P(15 ≤ Y ≤ 20).

Y = X - 8 이므로

P(15 ≤ Y ≤ 20) = P(23 ≤ X ≤ 28).

평균 25 기준 대칭이므로

아래 두 구간 확률이 동일:

P(23 ≤ X ≤ 28) = P(22 ≤ X ≤ 27).

따라서

2P(15 ≤ Y ≤ 20)

= P(23 ≤ X ≤ 28) + P(22 ≤ X ≤ 27)

= P(20 ≤ X ≤ 30)

= P(|X - 25| ≤ 5).

표준화: $Z = \dfrac{(X-25)}{\sigma_2}$.

그러면

$P(|X-25| \le 5) = P(|Z| \le \dfrac{5}{\sigma_2})$.

문제에서 표로 계산한

2P(15 ≤ Y ≤ 20) = 0.6826 이라고 했고,

표 값 0.6826 = P(|Z| ≤ 1).

따라서 $\dfrac{5}{\sigma_2} = 1\quad \Rightarrow\ \sigma_2 = 5$

4) 최종값

$m_{1+}\sigma_2 = 25 + 5 = 30$.

#30번

[답] 659

[해설]

T: 동전의 뒷면(Tail)

H: 동전의 앞면(Head)

(즉, 각 던짐의 결과는 H 또는 T 두 가지 중 하나이다.)

사건 정의

E: 조건 (가)(나)(다)를 모두 만족하는 사건

L_3: 주사위 D_2의 눈이 짝수 → 동전을 3번 던지는 사건

L_4: 주사위 D_2의 눈이 홀수 → 동전을 4번 던지는 사건

구하고자 하는 값은 조건부확률

$P(L_3|E) = \dfrac{P(E\cap L_3)}{P(E\cap L_3) + P(E\cap L_4)}$.

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,   .

$P(L_3)=P(L_4)=\frac{1}{2}$

[1] 사건 $E\cap L_3$의 확률

(동전을 3번 던지는 경우, 즉 n=3)

(다) 첫 2회에서 앞면이 1회만 나온다 → 시작은 HT 또는 TH.
(가) 전체 앞면 2회 → 세 번째까지 총 2개의 H.
(나) 2회째와 3회째 결과가 달라야 한다.

가능한 수열 나열:
HTH (2회=T, 3회=H → 다름, 만족)
THH (2회=H, 3회=H → 같음, 불만족)

→ 만족하는 수열은 HTH 한 가지뿐.

동전의 앞면 확률을 p라 하면
P(HTH) = $p^2(1 - p)$.

따라서
$P(E|L_3)=\Sigma_{X\in A,B,C}P(X)\cdot P(E|X,L_3)$

$=\frac{1}{3}[(\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})]$

$=\frac{1}{3}[\frac{2}{27}+\frac{1}{8}+\frac{4}{27}]$

$=\frac{1}{3}[\frac{2}{9}+\frac{1}{8}]$

$=\frac{25}{216}$.

따라서

$P(E\cap L_3)=P(L_3)\cdot P(E|L_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{216}$.

[2] 사건 E ∩ L_4의 확률

(동전을 4번 던지는 경우, 즉 n=4)

(다) 첫 2회에서 앞면이 1회만 나온다 → 시작은 HT 또는 TH.
(가) 전체 앞면 2회 → 3, 4번째 중 한 번만 앞면.
(나) 2회째와 4회째 결과가 달라야 한다.

가능한 수열 후보:
HTHT, HTTH, THHT, THTH

검사:
- HTHT: 2회=T, 4회=T → 같음 (×)
- HTTH: 2회=T, 4회=H → 다름 (○)
- THHT: 2회=H, 4회=T → 다름 (○)
- THTH: 2회=H, 4회=H → 같음 (×)

→ 만족 수열 2개: HTTH, THHT.

각 수열 확률 = $p^2(1-p)^2$
따라서
$P(E \mid L_4)$

$=\frac{1}{3}\cdot 2[(\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{3})^2$
$+(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^2$
$+(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})^2]$

$=\frac{1}{3}[\frac{16}{81}+\frac{1}{8}]$

$=\frac{209}{1944}$.

따라서
$P(E\cap L_4)$

$=P(L_4)\cdot P(E \mid L_4)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{209}{1944}$.

[3] 최종 계산

$P(L_3 \mid E)$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{216}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{216}+\frac{1}{2}\cdot\frac{209}{1944}}$$

$$= \frac{\frac{25}{216}}{\frac{25}{216}+\frac{209}{1944}}$$

$$= \frac{225}{434}.$$

정답: 659

<미적분 주요문항 해설>

#28번

[정답] ③ $6\pi+2$

[해설]

조건 (가), (나)를 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.
$n=1$, 2에 대하여 구간 $(n\pi,(n+1)\pi)$에서 $x=n\pi+t$ $(0<t<\pi)$라 하면,
f(x) = f(nπ) + s□ f(t) (단, s□은 1 또는 -1)로 나타낼 수 있다.

1. 변곡점을 이용한 s_1, s_2 결정

- 구간 (0, π)에서 f(x) = 1 − cos x 이므로 f''(x) = cos x이다.

  따라서 x = π/2에서 변곡점을 갖는다.
- 구간 (π, 2π)에서 f''(x) = s_1
f''(t) = s_1 cos t 이므로 x = π + π/2 = 3π/2에서 변곡점을 갖는다.

- 구간 (2π, 3π)에서 f''(x) = s_2
f''(t) = s_2 cos t 이므로 x = 2π + π/2 = 5π/2에서 변곡점을 갖는다.

- 열린구간 (0, π), (π, 2π), (2π, 3π)에 변곡점이 총 3개 존재하므로,

조건 (다)에 의해 x=π, x=2π에서도 변곡점이 존재해야 한다.

x=π에서 오목성 조사:
$$\lim_{x\to\pi^-} f''(x)=\cos(\pi)=-1$$
$$\lim_{x\to\pi^+} f''(x)=s_1\cos(0)=s_1$$
→ 부호가 달라야 하므로 s_1 = 1

x=2π에서 오목성 조사:
$$\lim_{x\to 2\pi^-} f''(x)=s_1\cos(\pi)=-1$$
$$\lim_{x\to 2\pi^+} f''(x)=s_2\cos(0)=s_2$$
→ 부호가 달라야 하므로 s_2 = 1

2. 함수 f(x) 확정

s_1=1, s_2=1이므로

- 0 ≤ x ≤ π: f(x) = 1 − cos x
- π < x ≤ 2π: f(π)=2이므로,
  f(x)=f(π)+f(x−π)=2+(1−cos(x−π))=3−cos(x−π)

- 2π < x ≤ 3π: f(2π)=f(π)+f(π)=4이므로,

$$f(x)=f(2\pi)+f(x-2\pi)$$
$$=4+(1-\cos(x-2\pi))=5-\cos(x-2\pi)$$

3. 정적분 계산

$$I=\int_0^{3\pi}|f(x)-1|dx$$
$$=\int_0^{\pi}|(1-\cos x)-1|dx$$
$$+\int_{\pi}^{2\pi}|(3-\cos(x-\pi))-1|dx$$
$$+\int_{2\pi}^{3\pi}|(5-\cos(x-2\pi))-1|dx$$
$$=\int_0^{\pi}|-\cos x|dx$$
$$+\int_{\pi}^{2\pi}|2-\cos(x-\pi)|dx$$
$$+\int_{2\pi}^{3\pi}|4-\cos(x-2\pi)|dx$$

−1 ≤ cosθ ≤ 1이므로

2−cos(x−π) > 0, 4 − cos(x−2π) > 0

$$\int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} (2 - \cos(x - \pi)) dx$$

$$= [2x + \sin(x - \pi)]_{\pi}^{2\pi} = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} (4 - \cos(x - 2\pi)) dx$$

$$= [4x + \sin(x - 2\pi)]_{2\pi}^{3\pi} = 12\pi - 8\pi = 4\pi$$

따라서 구하는 값은
I = 2 + 2π + 4π = 6π + 2

#29번

[정답] : 16

[해설]

조건 (다)의 식 $f(x + f(x)) = ax + b$
에 x=0을 대입하면 f(f(0))=b입니다.
조건 (가)에서 f(0)=0이므로 f(0)=b, 즉 b=0 입니다.

따라서 조건 (다)는 f(x+f(x))=ax입니다.
이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면, 합성함수의 미분법에 의하여 다음을 얻습니다.

f'(x+f(x)) (1+f'(x)) = a

조건 (나)에서 $f'(x) = e^{x - f(x)}$입니다. 이 식을 이용하여 f'(x+f(x))를 구하면 다음과 같습니다.

$$f'(x + f(x))$$

$$= e^{(x + f(x)) - f(x + f(x))}$$

$$= e^{x + f(x) - ax}$$

$$= e^{(1-a)x + f(x)}$$

위에서 구한 식들을 f'(x+f(x)) (1+f'(x)) = a 에 대입하면,
$e^{(1-a)x + f(x)}(1 + e^{x - f(x)}) = a$

좌변을 전개하면
$e^{(1-a)x + f(x)} + e^{(1-a)x + f(x)}e^{x - f(x)} = a$ 이고,
지수법칙에 의해 정리하면 다음과 같습니다.

$e^{(1-a)x + f(x)} + e^{(2-a)x} = a$
이 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식이므로, 좌변의 값은 x의 값에 관계없이 상수 a로 일정해야 합니다.

만약 2-a ≠ 0 이면 $e^{(2-a)x}$는 상수가 아니므로, 좌변 전체가 상수가 되기 위해서는 2-a=0이어야 합니다.

따라서 a=2입니다.
a=2를 항등식에 대입하면,

$$e^{(1-2)x + f(x)} + e^{(2-2)x}$$

$$= e^{-x + f(x)} + e^0$$

$$= e^{f(x) - x} + 1$$

$$= e^{f(x) - x} = 1$$

따라서 f(x)-x = ln(1) = 0 이므로, f(x)=x입니다.

구하고자 하는 값은
$3a^2 + 4\int_0^1 f'(x + f(x)) dx$ 입니다.

a=2이고 f(x)=x이므로 f'(x)=1입니다.

따라서 f'(x+f(x)) = f'(x+x) = f'(2x) = 1입니다.
준 식에 대입하여 계산하면,

$3(2^{2})+4\int_0^1 1dx$입니다.

$=12+4[x]_0^1$

$=12+4(1-0)$

$=16$

#30번

[정답] 7

[해설]

① 주어진 식:
$b_n = (n+1)a_{n+1} - n\ a_n - 3$

양변을 n=1부터 t까지 더하면
$\Sigma b_n = (t+1)a_{t+1} - a_1 - 3t$ ⋯ ①

② (가), (나)에 의해

$a_1=\frac{7}{3}, \quad \lim_{t\to\infty}\Sigma b_n = \frac{1}{2}$

이므로

$(t+1)a_{t+1} - \frac{7}{3} - 3t \ \rightarrow\ \frac{1}{2}$

즉,

$(t+1)a_{t+1}$

$=3t+\frac{7}{3}+\frac{1}{2} = 3t+\frac{17}{6}$

따라서

$na_n = 3n - \frac{1}{6} + o(1)$

③ 이제 $n^2(a_{n+1} - a_n)$을 구한다.

$b_n = (n+1)a_{n+1} - n\ a_n - 3$
$\rightarrow (n+1)a_{n+1} = n\ a_n + 3 + b_n$

양변을 (n+1)로 나누면

$a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)}a_n + \frac{(3+b_n)}{(n+1)}$

따라서

$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{(n+1)} + \frac{(3+b_n)}{(n+1)}$

양변에 n^2을 곱하면

$n^2(a_{n+1} - a_n)$

$=-n^2\frac{a_n}{(n+1)} + \frac{n^2(3+b_n)}{(n+1)}$

④ $na_n = 3n - \frac{1}{6}$ 을 대입하면

$n^2(a_{n+1} - a_n)$

$= \frac{-n(3n-\frac{1}{6}) + n^2(3+b_n)}{(n+1)}$

$= \frac{-3n^2 + \frac{n}{6} + 3n^2 + n^2 b_n}{(n+1)} = \frac{\frac{n}{6} + n^2 b_n}{(n+1)}$

⑤ $\Sigma n|b_n| < \infty \Rightarrow n\ b_n \rightarrow 0$

따라서 $\frac{n^2 b_n}{(n+1)} \rightarrow 0$

$\therefore\ \lim n^2(a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{6}$

즉, $\frac{p}{q} = \frac{1}{6} \rightarrow p=1,\ q=6 \rightarrow p+q=7$